# PRINCIPES
## *DU CALCUL*
ET
## DE LA GÉOMÉTRIE,
OU
## *PARTIE MATHÉMATIQUE*
DE LA
## THÉORIE DES ÊTRES SENSIBLES.

# *PRINCIPES*
# DU CALCUL
ET
## *DE LA GÉOMÉTRIE,*
OU
## COURS COMPLET
### *DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES,*
MISES A LA PORTÉE DE TOUT LE MONDE:

*Ouvrage en grande partie composé, & en petite partie extrait des Auteurs les plus intelligibles,*

Par M. l'Abbé François PARA DU PHANJAS.

A PARIS, RUE DAUPHINE,
Chez CHARLES-ANTOINE JOMBERT, pere, Libraire du Roi pour l'Artillerie & le Génie, à l'Image Notre-Dame.

M. DCC. LXXIII.

ſur preſque toutes nos connoiſſances, même ſur celles qui paroiſſent en être les plus indépendantes : elles ſervent à diſtinguer les vraies d'avec les fauſſes ; à convaincre l'eſprit des vérités déjà connues ; & à lui en découvrir une infinité de nouvelles. *Dans la Phyſique*, la théorie du Mouvement, la Méchanique, la Météorologie, l'Hydroſtatique, l'Optique, la Catoptrique, la Dioptrique, l'Aſtronomie géométrique & phyſique, ſont néceſſairement liées aux Mathématiques ; de qui elles empruntent preſque tout ce qu'elles ont de préciſion, d'étendue, de certitude & de lumiere. *Dans la vie Civile*, la ſcience des rapports, les ſpéculations bien concertées, les calculs prompts & rapides, la théorie des généralités & des détails, en montrent en une infinité de circonſtances, l'uſage & l'utilité. *Dans la Littérature*, le brillant combiné avec le ſolide, la méthode déployant lumineuſement la richeſſe, l'énergie s'uniſſant avec la juſteſſe & avec la clarté, en font par-tout ſentir l'heureuſe influence.

Rectifier & perfectionner l'Eſprit ; l'accoutumer à chercher & à ſaiſir le Vrai ; l'exercer à deſcendre d'un principe connu aux conſéquences éloignées qui en découlent ; ou à remonter des conſéquences éloignées au principe connu, dans lequel en derniere analyſe elles vont ſe réſoudre : tel eſt le fruit des Mathématiques ; fruit plus précieux peut-être, que les connoiſ-

ſances mêmes dont les Mathématiques nous enrichiſſent.

Si le genre mathématique eſt le plus riche & le plus digne théâtre de l'eſprit humain, il faut avouer auſſi, à la gloire de l'eſprit humain, qu'il n'y a point de théâtre où il ſe ſoit déployé avec autant de grandeur & de ſuccès. Dans tous les autres genres, il doit être humilié de voir preſque par-tout ſes lumieres infiniment bornées, & trop ſouvent incertaines & mal aſſurées. Dans le genre mathématique, il doit être moins ſurpris de ſentir qu'il lui manque quelques connoiſſances, que flatté & ravi de ſe voir enrichi de toutes les connoiſſances néceſſaires, & d'un aſſez grand nombre qu'il pourroit regarder comme ſimplement utiles, ou même comme ſuperflues.

Une foule de beaux Génies ſe ſont occupés ſucceſſivement, depuis Euclide juſqu'à nos jours, à enrichir le Public des découvertes du génie en ce genre; les uns dans des Cours complets, les autres dans des Cours élémentaires, dont pluſieurs feront l'admiration de la Poſterité, comme ils font celle de notre Siecle. Mais en réfléchiſſant ſur la nature de ces Ouvrages eſtimables, auxquels nous devons tout ce que nous pouvons avoir de lumieres en ce genre, il nous a paru qu'il n'y en a aucun, du moins parmi ceux qui nous ſont tombés entre les mains, qui mette les Mathématiques à la portée de tout le monde; qui les dépouille

Divers Ouvrages de Mathématiques.

de ce qu'elles peuvent avoir de peu utile & de trop ſcientifique; qui leur donne le degré d'intelligibilité & d'intérêt dont elles ſont ſuſceptibles; qui les adapte ſuffiſamment aux connoiſſances d'utilité ou d'agrément, relatives à la Phyſique & à la vie Civile.

Les uns, *trop diffus*, me font perdre de vue le terme principal où ils doivent me conduire, en détournant mon attention ſur une foule d'objets minutieux, de problêmes ou de corollaires de pure curioſité, dont je puis me paſſer; & qu'on devroit ne me montrer que quand j'aurai déjà parcouru la petite ſphere des connoiſſances eſſentielles, toujours ſuffiſante pour remplir toute l'attention d'un Commençant.

Les autres, *trop concis*, me fatiguent & me rebutent, par les efforts qu'il me faut faire à chaque inſtant pour les entendre: ils me ſuppoſent ou trop d'intelligence ou trop de connoiſſances; & ils m'indiſpoſent contre une Science qui eſt ſuſceptible d'agrément & d'intérêt, quand on la préſente avec méthode & avec lumiere.

Quelques-uns, *mal conçus & mal digérés*, me menent de vérité en vérité, ſans me montrer auparavant ni le terme où ils doivent me conduire, ni la route qui doit me conduire à ce terme. C'eſt comme un grand labyrinte, où tous mes pas iſolés ſont éclairés de la plus vive lumiere; mais où je ne puis ſuivre & retenir la

route trop ſinueuſe, qui me conduit d'un terme à un autre.

Quelques autres, *plus théoriques que pratiques*, me conduiſent aſſez ſimplement & aſſez rapidement, toujours par des ſentiers de lumiere, des plus ſimples connoiſſances aux connoiſſances les plus relevées ; mais ſans me faire aſſez connoître quelle utilité je puis retirer & quelle application avantageuſe je puis faire des lumieres que j'acquiers. En m'enrichiſſant de mille & mille connoiſſances abſtraites, ils me laiſſent ignorer comment il faut s'y prendre dans la pratique, pour meſurer la ſurface d'un jardin, ou pour toiſer un mur qu'on y fait réparer, ou pour trouver la diſtance de tel point de ce jardin au ſommet d'un colombier voiſin. Tels ſont les principaux défauts que nous avons tâché d'éviter dans cet Ouvrage.

Le vrai moyen de rendre intéreſſantes les Mathématiques, c'eſt de faire connoître & ſentir leur rapport avec l'étude de la Phyſique & avec les utiles connoiſſances qui découlent des différentes branches de la Phyſique. Il y a un rapport eſſentiel entre les Sciences phyſiques & les Sciences mathématiques : celles-ci doivent être le flambeau de celles-là ; & celles-là doivent montrer l'uſage & l'utilité de celles-ci. Un Ouvrage de Mathématiques, borné aux mathématiques pures, *n'intéreſſe pas aſſez* : parce qu'on ne voit pas ſuffiſamment à quoi peuvent aboutir les brillantes connoiſſances

qu'on y acquiert. Un Ouvrage sur la Physique, séparé des lumieres mathématiques, *n'éclaire pas assez :* parce qu'il donne des connoissances dont souvent il suppose le fondement; & que tout le monde ne connoît pas ce fondement, qu'il faudroit quelquefois aller chercher dans une foule d'ouvrages étrangers. Par exemple, dans tel ouvrage de Mathématiques, on me dit que la proposition qu'on me démontre, peut me conduire à mesurer la distance de la Terre au Soleil, quand je serai au fait des connoissances astronomiques : mais ne sachant en quoi consistent ces connoissances, je me borne à croire aveuglément & sans grande satisfaction, ce qu'on me promet. Dans tel ouvrage sur la Physique, on me dit dans un endroit, que tel point est incontestable; parce que c'est une dépendance d'une démonstration géométrique, que je ne connois pas & que je ne sais où aller chercher : on me dit dans un autre endroit, qu'étant donné un triangle parallactique qu'on me fait connoître, & dont on connoît les trois angles & un côté, il est facile de trouver la distance de l'astre auquel aboutit ce triangle; parce que selon certaine démonstration géométrique que j'ignore, les côtés de ce triangle sont entre eux comme les sinus, que je ne connois peut-être pas, ou que je n'ai pas sous les yeux.

C'est d'après ces observations, qu'un Cours de Physique & de Mathématiques, qui ne se-

roit qu'un seul & même Tout, où la partie Physique seroit rapportée à la partie Mathématique, & la partie Mathématique à la partie Physique, nous a paru un Ouvrage encore à faire ; & c'est celui que nous donnons au Public. Nous ne ferons mention ici que de la partie Mathématique, que renferme ce volume. Nature de cet Ouvrage.

Un Cours de Mathématiques, assez intelligible pour être à la portée des Commençans qui veulent s'instruire par eux-mêmes & sans le secours d'un Maître, assez étendu pour leur donner toutes les lumieres dont on a communément besoin & dans l'étude de la Physique & dans l'usage de la vie Civile, assez concis pour ne pas les effrayer par la volumineuse prolixité des matieres, assez bien conduit pour leur présenter lumineusement toutes les connoissances utiles, en laissant à l'écart une foule de connoissances superflues qui ne servent qu'à rebuter & à fatiguer l'esprit en pure perte, seroit un Ouvrage qui auroit encore le mérite de la nouveauté. Telle est l'idée que nous avons conçue, & que nous avons tâché de remplir. Assez d'autres ont montré combien on pouvoit savoir en fait de Mathématiques : nous voulons montrer combien peu il est nécessaire de savoir en ce genre, pour en savoir assez. Si ce que cette science a de plus profond, peut conduire à quelques connoissances rares & curieuses ; ce qu'elle a de plus simple, suffit

pour nous mener à presque toutes les connoissances nécessaires & utiles.

Le fameux Sage de la Grece, l'immortel Socrate, sembla improuver une trop grande curiosité à pénétrer les mysteres des Mathématiques. « Quand on sait, dit-il, assez de » Géométrie pour mesurer son champ, assez » d'Astronomie pour connoître les heures & » les tems, pour se conduire dans les voyages » de terre & de mer, on ne doit pas affecter » un savoir plus profond». Persuadé que la premiere étude de l'Homme est la Morale, qui tend à le rendre & plus vertueux & plus heureux, Socrate vouloit que le Sage fût *éclairé*, *& non absorbé*, par l'étude des Mathématiques. Mais en blâmant peut-être avec trop de sévérité un excès de goût & de penchant pour ces sortes de Sciences, Socrate exige ou approuve dans le Sage, du moins la connoissance de tout ce qu'on nomme Mathématiques élémentaires: puisqu'il lui faut au moins tout cela, pour être en état de mesurer son champ avec quelque lumiere, de connoître les tems avec quelque précision, de se conduire par lui-même & sans guide sur terre & sur mer. Plus occupé de l'homme moral & social que de l'homme calculateur & géometre, Socrate semble décider & déterminer ici quel degré de lumiere, en genre de Mathématiques, convient à l'homme du monde, à l'homme d'état, à l'homme littérateur, à l'homme militaire, à l'homme

naturaliste, en un mot, à l'homme éclairé qui n'est point Mathématicien de profession ; & tel est le fond de lumieres mathématiques, que renferme cet Ouvrage.

Les propositions mathématiques peuvent se démontrer en deux manieres, par voie de Synthese, ou par voie d'Analyse ; à la façon d'Euclide, ou à la façon de Descartes. Quand on démontre *par voie de Synthese*, on conçoit des figures, on en examine la formation & la décomposition ; & de-là on en déduit les propriétés. Quand on démontre *par voie d'Analyse*, on emploie certaines formules de calcul, qui supposent les figures toutes formées, qui en représentent algébriquement la formation ou la décomposition, & d'où naissent des résultats qui en expriment les propriétés. La premiere méthode, qui est celle d'Euclide (*) &

(*) Euclide le Géometre florissoit à Alexandrie sous le premier Ptolémée, environ 300 ans avant l'ere chrétienne. Il ramassa & rédigea en corps d'ouvrage, toutes les vérités élémentaires de la Géométrie & du Calcul, découvertes avant lui ; & c'est à cet ouvrage qu'Euclide doit principalement sa célébrité. Ces Elémens d'Euclide (divisés en treize livres, auxquels Hypzicle d'Alexandrie en ajouta dans la suite un quatorzieme & un quinzieme assez peu nécessaires), sont peut-être la plus forte *chaîne de vérités* qui ait été jamais ourdie ou formée par l'esprit humain. Mais il faut avouer aussi que cette admirable chaîne, où l'ordre & la marche naturelle des idées semblent totalement renversés, où du composé on va au simple, où la théorie des Surfaces, par exemple, mene à celle des Lignes, où tout paroît formé de matériaux qui semblent être violemment assortis & fondus ensemble, est quelque chose de bien ennuyeux & de bien rebutant pour l'Esprit hu-

de tous les anciens Géometres, & qui est aussi celle que recommandent les Wolfe, les Newton, la plupart des plus grands Géometres de ces derniers tems, mene toujours à la connoissance de la Vérité par des sentiers de lumiere : elle est plus propre à donner de la justesse & de la solidité à l'esprit. La seconde méthode, qui est celle de Descartes & d'un très-grand nombre de Mathématiciens modernes, mene au même but par des routes plus courtes, mais toujours un peu ténébreuses dans le fond, & moins propres à perfectionner l'esprit. La *Méthode synthétique* est celle que nous emploierons communément, sans exclure la *Méthode analytique* qu'il est à propos & souvent très-

---

main. Ce vice, si c'en est un, fut senti par le Roi Ptolémée lui-même, le protecteur & l'ami d'Euclide, auquel il demanda s'il n'y auroit pas quelque route plus facile pour arriver aux Mathématiques. Non, Sire, répondit fierement le Géometre; les Mathématiques n'ont pas un chemin fait exprès pour les Rois. *Non est regia ad Mathesim via.*

Cette décision d'Euclide, décision applaudie & adoptée par quelques-uns des plus grands Géometres de ces derniers siecles, n'a point empêché un assez grand nombre d'autres Géometres non moins profonds & non moins célebres, de prendre une marche différente de celle d'Euclide; de tendre & d'arriver au même terme, par une route plus simple & moins scabreuse. D'ailleurs, parmi les treize ou quinze livres de l'ancien Géometre, il y en a plusieurs qu'on regarde aujourd'hui comme inutiles; savoir, ceux dont l'objet principal est ou le Calcul, qui a totalement changé de face depuis Euclide; ou la théorie des Incommensurables & des Corps réguliers, à laquelle personne ne s'intéresse plus : ces livres, réputés inutiles, sont le septieme, le huitieme, le neuvieme, le dixieme, & le treizieme.

utile de ne pas ignorer. L'un des plus grands Calculateurs, le fameux Newton, s'est souvent repenti, au rapport de Pemberton son commentateur, d'avoir passé trop tôt à la Géométrie de Descartes & à la lecture des traités analytiques des Modernes, lorsqu'il commençoit à étudier les Mathématiques. Il sentoit que la méthode synthétique est infiniment plus propre à éclairer & à satisfaire l'esprit, que la méthode analytique ; & c'est sans doute pour cette raison, dit M. l'Abbé Deidier (*), que quoiqu'il eût composé beaucoup d'ouvrages algébriques qui ont extrêmement enrichi nos Méthodes, avant de travailler à ses *Principes Mathématiques de la Philosophie naturelle* ; il n'a cependant employé dans celui-ci, que la méthode des Anciens.

Les Elémens de Mathématiques que nous donnons au Public, renferment neuf traités, quatre sur le Calcul, & cinq sur la Géométrie. On trouvera dans ces neuf traités, tout ce que les Mathématiques élémentaires contiennent

(*) Dans la Préface de l'Ouvrage qui a pour titre : *Élémens généraux des principales parties des Mathématiques, nécessaires à l'Artillerie & au Génie* ; ouvrage primitivement imprimé avec peu de correction & sans goût, mais excellent pour le fond des choses, & le meilleur peut-être, le plus riche & le plus intelligible du moins, qui ait encore été fait en ce genre, pour les Eleves de cette intéressante classe de Militaires, dont les opérations, dans le systême présent des Armes, décident principalement du fort des sieges & des batailles, & par-là même, des États.

d'intéreſſant & d'utile, avec la maniere de faire uſage des connoiſſances qu'elles donnent. Par le moyen de la Méthode & de la Lumiere que nous avons données à toutes les parties de cet Ouvrage, tout Eſprit mûr & ſolide pourra ſe mettre au fait, ſeul & ſans Maître, en moins de trois mois d'une étude modérée, de tout ce qu'il renferme. Si nous avions à diriger ſa marche dans cette carriere, nous lui conſeillerions de commencer par ſe mettre bien au fait de l'Arithmétique; d'en bien ſaiſir les regles, les démonſtrations, les opérations, en ſe donnant lui-même des exemples, la plume à la main, ſur chaque regle & ſur chaque objet : de paſſer de là au traité des Proportions, & de le bien concevoir, juſqu'à l'article des Fractions excluſivement : de paſſer enſuite de-là à la Longimétrie, qui ne ſuppoſe qu'une ſimple connoiſſance de l'Arithmétique & de la Regle de Trois. Après quoi, commençant à voir & à ſentir l'utilité des Mathématiques, il pourra indifféremment ou paſſer à la Planimétrie, ou revenir ſur ſes pas pour s'occuper des autres parties du Calcul dont il aura beſoin dans la ſuite, ſoit pour la Géométrie, ſoit pour la Phyſique, ſoit pour différens uſages de la vie civile.

La Trigonométrie, qui dans la plupart des Auteurs eſt très-compliquée & très-difficile, ſe trouve ſi ſimplifiée dans cet Ouvrage, qu'elle ne renferme qu'un ſeul théorême qui ſoit un peu difficile à ſaiſir : tout le reſte n'eſt qu'une

ſimple application de ce théorême. On trouvera dans ce Traité une *Méthode pour transformer les Tables ordinaires des Sinus, en Tables des Sinus des Secondes;* méthode dont on ſentira l'utilité, & dont nous ne devons l'idée à perſonne.

Pour réſoudre les triangles par la Trigonométrie, on a toujours néceſſairement beſoin d'une *Table des Sinus;* & c'eſt ce qui nous a déterminé à la placer à la fin de ce Volume. On aura par-là, en un ſeul & même ouvrage, tout ce dont on a beſoin dans l'étude de la Phyſique & des Mathématiques. Les Géometres & les Aſtronomes de profeſſion, qui font habituellement de grands calculs trigonométriques, ont des tables des Sinus jointes à des tables des Logarithmes, qui leur facilitent ces calculs: mais les Perſonnes qui ne font pas fréquemment des calculs, & qui veulent cependant quelquefois ſe donner la ſatisfaction de réſoudre un triangle par la méthode trigonométrique, ſeront bien aiſe d'avoir ici une Table des Sinus qui leur procure la facilité de réſoudre ce triangle par un calcul qui leur coûtant un quart-d'heure de plus, les diſpenſera de ſe procurer des Tables des Logarithmes, & de la peine d'apprendre à s'en ſervir. Ces Tables des Sinus leur donneront auſſi toutes les tangentes & toutes les ſécantes dont elles pourroient quelquefois avoir beſoin, avec la même préciſion qu'elles ont dans les tables où elles

ſe trouvent le plus exactement calculées.

Dans l'étude des Mathématiques, on obſervera que tout l'art de cette Science conſiſte à faire connoître ou trouver des grandeurs inconnues, par leur rapport avec des grandeurs connues : ainſi cette ſcience eſt principalement la *Science des rapports*. On obſervera auſſi que les démonſtrations mathématiques ont communément la plus grande généralité poſſible : il faut donc que l'eſprit s'accoutume & s'habitue, en conſidérant une figure géométrique ſur le papier, à la tranſporter par la penſée hors du papier, ſur la ſurface de la terre, ou dans l'immenſité des Cieux, où elle doit conſerver toujours les propriétés qu'on y démontre. « Le conſeil le plus important que l'on puiſſe » donner à ceux qui étudient les Mathéma- » tiques, dit M. de la Lande dans la Préface » de ſon excellent Ouvrage ſur l'Aſtronomie, » c'eſt d'exercer leur imagination beaucoup » plus que leur mémoire ; c'eſt de lire peu & » de penſer beaucoup ; de chercher par eux- » mêmes les démonſtrations, ou du moins d'eſ- » ſayer leurs forces le plus ſouvent qu'ils pour- » ront. C'eſt ainſi qu'on acquiert l'eſprit des » Mathématiques, le goût de recherches, la » facilité de découvrir & d'inventer. Il faut en » tirer des corollaires, en faire des applica- » tions ; & ne chercher dans le Livre, s'il eſt » poſſible, que la confirmation de ce qu'on » aura trouvé ».

L'unique but que nous nous sommes proposé dans cet Ouvrage, c'est de rendre plus simple, plus intelligible, moins épineuse & plus intéressante la science des Mathématiques. Pour parvenir à cette fin, nous avons lu & médité un assez grand nombre d'ouvrages en ce genre; & nous avons profité de ce que nous y avons trouvé de plus simple & de plus lumineux, pour en enrichir l'ouvrage dont nous avions conçu l'idée. Ainsi dans cet Ouvrage, la méthode, le cadre, le choix sont de nous: le remplissage sera en grande partie de nous, & en petite partie des Auteurs les plus clairs & les plus intelligibles en genre de Mathématiques. Nous avons emprunté quelquefois de ces Auteurs, quelques-unes des propositions fondamentales, que nous avons éclaircies, quand elles avoient besoin d'éclaircissement; qu'il importe peu de démontrer différemment, quand elles sont clairement & solidement démontrées.

Nous conçumes il y a sept ou huit ans l'idée & le plan de ce Cours de Mathématiques élémentaires: nous l'exécutâmes alors en partie, & nous en fimes imprimer à Besançon un Essai, pour l'usage uniquement d'une nombreuse Jeunesse que nous y formions, par religion & par état, à la Physique & aux Mathématiques. Cette idée, ce plan, se sont successivement étendus & perfectionnés pendant les trois à quatre ans que nous avons employés à

composer notre Cours de Physique, auquel nous avons assorti ce Volume de Mathématiques qui en fait comme partie, quoiqu'il forme lui-même un Ouvrage à part ; & nous le livrons aujourd'hui au Public, après nous être efforcés de lui donner à loisir toute la perfection dont nous le croyons susceptible.

Il nous eût été possible, sans doute, de ne rien emprunter de personne dans ce Volume de Mathématiques : mais il nous auroit fallu pour cela, avec beaucoup de peine & d'ennui, & le tout pour ne pas faire mieux, renoncer à profiter de notre premier travail, qui n'étoit guere alors qu'un excellent Extrait de tout ce qu'il y avoit de plus clair & de plus intelligible dans les meilleurs Auteurs, assorti & lié au plan méthodique & lumineux que nous nous étions tracé. Nous avons donc mieux aimé renoncer en partie, dans ce Volume, au titre d'Auteur ; & conserver une partie de cet ancien Extrait dans ce Cours de Mathématiques, qui sera peut-être quelque chose d'infiniment moins qu'un Ouvrage en tout nouveau, créé par le génie ; qui est certainement quelque chose d'infiniment mieux qu'une simple compilation, à laquelle il ne ressemble en rien. Le compilateur assemble & transcrit, souvent sans méthode & sans goût ; toujours sans tirer de lui-même un fonds de lumieres nouvelles ; sans s'attacher à créer dans les choses qu'il emprunte d'autrui, un nouveau

jour,

jour, un nouveau goût, une nouvelle perfection, une nouvelle maniere d'être, qui les lui rende en quelque ſorte propres; ou s'il fait autrement, il ceſſe d'être compilateur.

Nous eſpérons que le frontiſpice & la préface de ce Volume, nous mettront à couvert du reproche de plagiat; vice qui conſiſte, non à profiter des découvertes & des lumieres d'autrui, à l'exemple d'Euclide & de tant d'autres grands hommes, mais à ſe les approprier furtivement & ſans en prévenir le Public. Nous avertiſſons donc ici authentiquement le Public, qu'il trouvera dans ce Volume, quelques théorêmes & quelques problêmes, qui ne ſont point ou qui ne ſont qu'en partie de notre compoſition. Qu'un habile Architecte, dirigé par le génie & par le goût, forme le plan d'un nouvel édifice utile au Public! Si ce plan eſt bien conçu & bien exécuté, lui fera-t-on un crime d'y avoir heureuſement adapté quelques colonnes, quelques ſtatues, quelques pierres artiſtement taillées, qui avoient ſervi antérieurement à certains édifices admirés? Nous avouerons hardiment que nous ſerions très-flattés d'être un tel Architecte.

Un Cours complet de Mathématiques élémentaires, tel que celui dont nous avons tracé l'idée, tel que la méthode en enchaîne & que la lumiere en éclaire puiſſamment toutes les parties, ſera toujours un ouvrage dont l'exécution préſentera au Génie de grandes diffi-

cultés à vaincre. Si nous n'osons nous flatter d'avoir rempli cet objet dans toute sa perfection, nous pouvons du moins nous rendre la justice de n'avoir rien négligé pour en approcher. Notre unique vue, en travaillant à cet Ouvrage, a été en premier lieu, de faciliter & d'applanir l'étude des Mathématiques ; en second lieu, de nous rendre utiles aux Amateurs de la Physique, pour qui nous avons spécialement travaillé, en leur présentant sous un point de vue simple & resserré, méthodique & lumineux, tous les principes mathématiques qui ont un rapport plus ou moins prochain avec cette Science ; & en nous efforçant de leur rendre plus intelligible & plus sensible, ce qui ne l'est pas assez dans une foule d'Auteurs, qui souvent semblent n'écrire que pour des Savans comme eux.

Nous nous bornons dans ce Volume, qui fait comme partie de notre Cours de Physique, mais qui en est lui-même indépendant, à ouvrir ou à montrer au Génie l'immense carriere des Mathématiques. Le Génie, excité & mis en jeu, saura trouver en lui-même, des ressources pour la parcourir & peut-être pour l'étendre : semblable assez souvent au salpêtre inflammable que forma la Nature ou l'Art, une simple étincelle l'atteint & le met en action ; & un embrasement soudain, qui surprend & étonne, en fait éclater l'énergie intérieure, auparavant liée & comme ensevelie.

Un tableau hiſtorique, qui mettroit ſous les yeux & l'origine & les progrès des différentes branches des Mathématiques, termineroit heureuſement cette Préface : mais il lui feroit perdre un mérite eſſentiel, celui de la brieveté. Les perſonnes, qui voudront ſe procurer des connoiſſances détaillées ſur cet objet, trouveront amplement de quoi ſatisfaire leur goût, dans un Ouvrage plein de ſagacité & d'érudition, dans l'excellente Hiſtoire des Mathématiques par M. de Montucla; hiſtoire plus intéreſſante & plus utile que celle de toutes les ſanglantes batailles & de toutes les déſaſtreuſes révolutions qui ont ſucceſſivement effrayé & déſolé la Terre : puiſque celle-ci n'eſt que l'hiſtoire des paſſions des Souverains & des malheurs des Peuples; & que celle-là eſt l'hiſtoire du Génie & des grandes lumieres qui en ſont émanées.

# REMARQUES GÉNÉRALES.

Ce *Volume de Mathématiques* se vendra, ou conjointement avec le Cours de Physique dont il fait partie ; ou séparément sans ce Cours de Physique, parce qu'il peut en être détaché, formant lui seul un ouvrage à part.

Dans la *Théorie des Êtres sensibles*, la partie physique est dépendante de la partie mathématique : mais la partie mathématique, quoique relative & assortie à la partie physique, en est au fond indépendante. Ainsi ce Volume de Mathématiques, seul & isolé, est un ouvrage complet en son genre ; & il peut être détaché des quatre volumes qui forment le Cours de Physique.

On trouve chez le même Libraire à Paris, les *Élémens de Métaphysique*, ou la *Théorie des Êtres Insensibles*, du même Auteur. Cet Ouvrage, en un seul volume in-octavo, est divisé en sept Traités, qui ont pour objet :

I°. La *Métaphysique pure*, ou les notions les plus générales & les plus abstraites de toutes les Sciences.

II°. La *Certitude humaine*, où l'on fait voir que toutes nos connoissances dérivent ou du témoignage du Sentiment intime, ou du témoignage des Idées, ou du témoignage des Sens, ou du témoignage des Hommes revêtu de certaines conditions.

III°. La *Logique*, ou les regles de la Dialectique sur les perceptions, sur les jugemens, sur les raisonnemens.

IV°. L'*Existence* & la *Nature de Dieu*, c'est-à-dire, toutes les intéressantes questions qui ont trait à cet Être adorable.

V°. L'*Ame humaine*, envisagée dans sa spiritualité, dans son immortalité, dans sa liberté, dans ses facultés naturelles, dans son contraste avec l'Ame des Brutes.

VI°. La *Morale*, ou la théorie générale de la Religion & des Mœurs.

VII°. La *théorie métaphysique de la Matiere*, où l'on traite de son Essence, de ses Accidens, de tout ce qui doit servir de préparatif & de prélude à un Cours de Physique.

Ces sept traites sont suivis de *trois Discours philosophiques* sur la Religion, dans lesquels les preuves fondamentales de spéculation & de fait, qui établissent la vérité & la divinité

de la Religion révelée, sont développées dans le genre oratoire. Le prix de ce volume de Métaphysique, est de 3 livres 10 sols en brochure, & de 4 livres 10 sols relié en veau.

III°. On sera peut-être surpris, au premier coup d'œil, que ces trois Ouvrages, le *Cours de Métaphysique*, le *Cours de Physique*, & le *Cours de Mathématiques*, soient chacun si peu volumineux, eu égard à l'immense quantité de matieres qu'ils embrassent & qu'ils renferment. Mais la surprise & la prévention cesseront, quand on sera attention, comme nous l'avons déjà observé ailleurs, qu'on n'est communément long & diffus dans les Ouvrages d'esprit, que parce qu'on n'a pas eu ou le tems ou le talent de les faire courts; & qu'il est possible de tout abréger, quand on a su se mettre en état de tout voir. Les ouvrages concis & bien présentés sont toujours assez longs, pour les personnes qui ont de l'intelligence & de la pénétration; & il est fort inutile de les étendre & de les alonger, pour celles qui en manquent. L'ensemble de ces trois Ouvrages, renferme le Cours le plus complet & le plus méthodique de Philosophie, qu'on ait encore en aucune langue.

IV°. Le Cours de Physique, en quatre volumes in-octavo, est relatif au volume de Métaphysique & au volume de Mathématiques: parce qu'il n'y a point de Physique, comme on sait, sans quelques connoissances sur la Métaphysique & sur les Mathématiques. Ce Cours de Physique a aussi dans ses premiers traités, des rapports & des renvois aux traités suivans: ce qui signifie, non qu'il faut interrompre la lecture de ces premiers traités, pour passer à celle des numéros indiqués; mais simplement, que ce qu'on lit dans ces premiers traités, a un rapport avec d'autres branches de la Physique, dont on verra l'explication & la démonstration en tems & lieu. Il en est de même du volume de Mathématiques.

Dans ce Volume de Mathématiques, ainsi que dans les quatre volumes de la Physique, on a quelquefois dessiné & gravé les Figures, non selon les regles du Dessin & de la Gravure; mais selon l'exigence de la chose à expliquer ou à démontrer, & de la maniere qui a paru la plus propre à fixer à la fois & l'œil & l'imagination & l'esprit sur le point fondamental qui doit occuper l'attention & la sagacité d'un Commençant.

# TABLE ALPHABÉTIQUE
## DES MATIERES,
### *Qui fait de tout cet Ouvrage, un vrai* DICTIONNAIRE DE MATHÉMATIQUES.

*Ce signe* = *signifie ici* jusqu'à. *Par exemple, 559 = 575, signifie que la matiere indiquée est traitée depuis le numero 559, jusqu'au numero 575. Il y aura aussi un petit nombre de renvois, relatifs aux pages, qui seront marquées expressément.*

## A B.

à 112

## E C.



## F A.

## Q U.



## R A.

## S C.

## T A.



FIN DE LA TABLE.

# PRINCIPES DU CALCUL ET DE LA GÉOMÉTRIE, OU ÉLÉMENS DE MATHÉMATIQUES.

## NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

### GRANDEUR DISCRETE ET CONTINUE.

1. DÉFINITION I. LES Mathématiques sont une science qui a pour objet la grandeur en tant que mesurable.

I°. On nomme *grandeur* ou *quantité* (car ces deux termes sont parfaitement synonymes), tout ce qui peut se concevoir comme composé de parties; tout ce qui est susceptible d'augmentation ou de diminution: comme l'étendue, le mouvement, le tems, les nombres. La grandeur est ou discrete ou continue.

II°. On nomme *grandeur discrete*, un assemblage de parties désunies entr'elles, qui forment plusieurs touts, plutôt que des parties d'un même tout: par exemple, un monceau de bled, un tas de sable.

III°. On nomme *grandeur continue*, celle dont les

parties ſont unies entr'elles, & forment un même tout: comme un bâton, un bloc de marbre.

IV°. La grandeur diſcrete, ou composée de parties ſéparées, s'exprime par des *nombres*; & c'eſt l'objet du *calcul*. La grandeur continue, ou composée de parties unies, eſt ce qu'on appelle l'*étendue*; & c'eſt l'objet de la *géométrie*. De ſorte que le Calcul, ou la ſcience des nombres, & la Géométrie, ou la ſcience de l'étendue, embraſſent toutes les ſciences mathématiques.

2. REMARQUE I. On peut conſidérer les grandeurs diſcretes, qui ſont l'objet du calcul, ou en elles-mêmes, ou dans leurs rapports; & comme on peut combiner entr'elles ces grandeurs, on peut auſſi combiner entr'eux leurs rapports. Ces quantités peuvent être, ou déterminées, ou indéterminées: leurs rapports peuvent être ou des rapports connus avec des rapports connus; ou des rapports dont quelques-uns ſont connus, & quelques autres inconnus. Delà l'objet des quatre parties du calcul.

I°. Les *quantités diſcretes déterminées* ſont celles qui expriment une grandeur plutôt qu'une autre: tel eſt le nombre 8, qui ſignifie une grandeur de huit parties, plutôt que de trois, de ſept ou de neuf. Elles ſont l'objet du *calcul arithmétique*.

II°. Les *quantités diſcretes indéterminées* ſont celles qui expriment une grandeur qui n'eſt pas plutôt l'une que l'autre. Telle eſt la lettre ou la quantité *a*, qui ne ſignifie rien de fixe, qui ne repréſente pas plutôt un mouvement qu'une étendue, un tems plutôt qu'une meſure, une toiſe plutôt qu'un pouce, un nombre 10 plutôt qu'un nombre 1000. Elles ſont l'objet du *calcul algébrique*.

III°. Les quantités diſcretes, déterminées ou indéterminées, peuvent avoir entr'elles des *rapports* exprimés par des termes connus; & la comparaiſon ou la combinaiſon de ces rapports eſt l'objet du *calcul*

*analogique*, ou de la *théorie des proportions*.

IV°. Les quantités discretes, déterminées ou indéterminées, peuvent avoir entr'elles des *rapports* dont quelques-uns soient connus, & quelques autres inconnus; & la comparaison ou la combinaison de ces rapports, est l'objet du *calcul analytique*.

Ainsi l'Arithmétique, l'Algebre, les Proportions, & l'Analyse renferment tout ce qui concerne le calcul ou la science des nombres. Tel sera l'objet de la premiere partie de cet ouvrage. Un conseil à donner à ceux qui veulent entendre & posséder le calcul, c'est de l'étudier la plume à la main, en appliquant à des exemples qu'on se donne, les regles des opérations qu'on veut se graver dans l'esprit.

3. REMARQUE II. La *quantité continue*, ou l'étendue, qui est l'objet de la géométrie, peut être ou une simple ligne, sans largeur & sans profondeur; ou une simple surface, sans profondeur; ou un solide, long, large, & profond. Delà l'objet de la *Longimétrie*, de la *Planimétrie*, de la *Stéréométrie*, & enfin de la *Trigonométrie*; comme nous l'expliquerons plus en détail au commencement de la seconde partie de cet ouvrage.

### *Mathématiques pures, & mixtes.*

4. DÉFINITION II. On divise communément les mathématiques, en mathématiques pures, & en mathématiques mixtes.

I°. Les *mathématiques pures* ont pour objet la grandeur, en tant que grandeur précisément, & sans aucun rapport aux qualités sensibles & physiques.

II°. Les *mathématiques mixtes* ont pour objet la grandeur, en tant que revêtue de qualités sensibles; telles que sont le mouvement, la dureté, la fluidité, l'élasticité, la gravité, & autres semblables.

Mais les mathématiques mixtes ne sont au fond,

qu'une application des mathématiques pures, ou du calcul & de la géométrie, à des objets particuliers; par exemple, à l'accélération des graves, aux mouvements des astres, aux loix du choc & de l'équilibre, aux propriétés du son & de la lumiere; & ainsi du reste.

*Grandeurs commensurables & incommensurables.*

5. DÉFINITION III. Le but du calcul & de la géométrie, est de mesurer. Chercher combien de fois une quantité moindre, mais connue, est contenue dans une plus grande, c'est ce qu'on appelle *mesurer*.

Ainsi, mesurer une longueur, c'est porter sur cette longueur une quantité moindre, mais connue, telle que la toise ou le pied, pour savoir combien de fois elle y est contenue; & l'on dit alors que cette longueur a tant de toises ou de pieds. Cette quantité moindre que l'on prend un certain nombre de fois, s'appelle *mesure*: la quantité plus grande à laquelle on applique la mesure, s'appelle *grandeur*.

6. DÉFINITION IV. Lorsqu'on connoît le rapport de la mesure avec la grandeur, cette grandeur est appellée *commensurable*; & lorsqu'on ne peut pas trouver de rapport juste & précis entre l'une & l'autre, cette grandeur est appellée *incommensurable*. Ainsi,

I°. *La plupart des grandeurs sont commensurables entr'elles*. Par exemple, 10 & 3 sont deux grandeurs commensurables: parce que la petite grandeur étant prise trois fois & un tiers, est précisément égale à l'autre. De même, 99 & 10 sont des grandeurs commensurables: parce qu'en prenant neuf fois la petite grandeur, plus neuf parties de cette petite grandeur, on aura une grandeur égale à l'autre; & ainsi du reste.

II°. *Il y aussi des grandeurs incommensurables entre elles*, en telle sorte qu'on ne peut assigner aucune partie de la petite quantité qui, prise tel nombre de fois

qu'on voudra, égale précisément la grande, sans aucun excès & sans aucun défaut. Par exemple, la grandeur 2, & la grandeur qui multipliée par elle-même donneroit un produit égal à 2, sont deux grandeurs incommensurables. Car cette seconde grandeur, qui est la *racine* de 2, n'est pas 1 plus 5 dixiemes, qui est trop grand; n'est pas 1 plus 4 dixiemes, qui est trop petit; c'est un *nombre sourd* entre ces deux termes 1 plus 5 dixiemes & 1 plus 4 dixiemes; lequel nombre n'est ni une moitié, ni un tiers, ni un quart, ni un centieme, ni un millieme, ni un millionieme, ni aucune partie assignable de la grandeur à mesurer (216). De sorte qu'en comparant entr'elles deux grandeurs incommensurables, on trouve toujours une *différence sourde* & inexprimable entre la mesure & toute partie déterminée de la grandeur à mesurer.

## *IDÉE GÉNÉRALE DES MESURES DU TEMS, DE L'ÉTENDUE, DES POIDS.*

7. OBSERVATION. Comme le but général des Mathématiques est de *mesurer*; il est nécessaire de connoître les différentes mesures, soit naturelles, soit de convention, qui servent à évaluer les différentes grandeurs discretes ou continues. On a des mesures naturelles du tems, qui sont données par la nature elle-même, qui sont connues & entendues de tous les peuples. On n'a pas de même, du moins aisément, des mesures naturelles du poids & de l'étendue : parce que la nature ne produit aucun corps d'un volume ou d'un poids déterminé, qui puisse servir de mesure commune aux différentes nations. Par exemple,

Il m'est facile, en écrivant de Paris à Pekin, d'apprendre à un Chinois, ce que j'entends par une *année astronomique tropique*; en lui disant que c'est une durée égale à celle de la révolution réelle ou apparente du

ſoleil autour du zodiaque, à compter du moment où le centre du ſoleil eſt dans l'interſection de l'écliptique & de l'équateur au printems, juſqu'au moment où le centre du ſoleil ſera de nouveau dans l'interſection de l'écliptique & de l'équateur au printems ſuivant. Il m'eſt facile de lui apprendre de même, ce que j'entends par un *jour naturel;* en lui diſant que c'eſt une durée égale à la révolution réelle ou apparente du ſoleil autour de la terre, à compter du paſſage du centre du ſoleil par le méridien d'un lieu quelconque, juſqu'au retour du même centre du ſoleil dans le même méridien. Il me ſera également facile de lui apprendre ce que j'entends par *une heure*, qui eſt la vingt-quatrieme partie du jour naturel; par *une minute*, qui eſt la ſoixantieme partie d'une heure; par *une ſeconde*, qui eſt la ſoixantieme partie d'une minute; par *une tierce*, qui eſt la ſoixantieme partie d'une ſeconde; & ainſi du reſte.

Mais ſi je veux apprendre à ce même Chinois ce que j'entends par une étendue d'une lieue ou d'une toiſe, par un poids d'un quintal ou d'une livre; je ne ſais guère comment m'y prendre pour lui exprimer mon idée, en ſuppoſant qu'il n'a pas, & que je ne lui envoie pas ma meſure ou une partie déterminée de ma meſure. Je ne connois que deux grandeurs dans la nature, qui puiſſent me ſervir de terme de comparaiſon, par où je puiſſe lui apprendre ce que j'entends par *une toiſe:* l'une eſt l'étendue d'un degré du méridien terreſtre; l'autre eſt la longueur d'un pendule à ſecondes. Il ne ſera donc pas hors de propos de donner ici une idée de ces deux grandeurs, qui peuvent ſervir de fondement à une meſure univerſelle de l'étendue.

Meſure univerſelle de l'étendue.

### *Arc d'un degré dans le méridien terreſtre.*

I°. Un *arc d'un degré*, pris dans le méridien terreſtre, entre Paris & Amiens, à 49 dégrés & 23 minutes de latitude, embraſſe une étendue de 57072

toises (*Phys.* 1368). Je dirai donc à ce Chinois que la toise dont je parle, est une mesure ou une étendue en longueur, telle qu'un arc d'un degré, pris dans le méridien terrestre, à la latitude de Paris, en contient cinquante-sept-mille-soixante-douze; ou qu'*une toise* est la cinquante-sept-mille-soixante-douzieme partie de l'étendue de cet arc d'un degré. Que ce Chinois mesure exactement un degré du méridien terrestre à la latitude de 49 degrés & 23 minutes: la mesure qu'il trouvera sera égale à la mesure du degré pris à Paris; & la cinquante-sept-mille-soixante-douzieme partie de cette mesure, sera la valeur de ma toise.

### *Pendule à secondes simple.*

II°. Le *pendule à secondes* pourra me servir plus aisément & plus fidelement pour donner à ce Chinois une idée de nos mesures de France, par exemple, du pied, qui est la sixieme partie de la toise. (*fig.* 119.)

Soit P une boule de plomb ou de laiton, dont le diametre égale à peu près le grand ou le petit diametre d'un œuf de poule: un peu plus ou un peu moins de grosseur dans la boule, ne change rien à la chose. Que le diametre de cette boule soit percé de part en part, en telle sorte que par l'ouverture très-petite on puisse insérer & fixer un fil de laiton très-droit & très-mince AOQ, d'une longueur indéterminée. L'extrêmité supérieure de ce fil sera fixée à un petit anneau solide & bien poli A, lequel reposera librement sur un petit cylindre horisontal très-poli, immobilement fixé à un plan vertical, tel qu'un mur ou une planche, & suffisamment saillant hors du plan: il faut que le diametre de l'anneau soit un peu plus grand que le diametre du cylindre saillant qu'il embrasse; afin que le frottement ne gêne en rien les évolutions que doit faire l'anneau. La partie inférieure Q du fil, qui

passe par le diametre de la boule & qui doit emplir à peu près l'ouverture par où il passe, sera fixée en O ou en P ou en Q, à une distance indéterminée du point A, par le moyen d'une petite cheville insérée dans l'ouverture inférieure de la boule. Cet instrument AP, ainsi arrêté & suspendu auprès d'un plan vertical, sans toucher à ce plan, sera un *pendule simple :* il ne s'agit plus que de le régler, pour en faire un pendule à secondes. Le rouage R*rstv*S doit ici disparoître : son usage est pour le pendule composé, dont nous parlerons bientôt.

La boule P, suspendue à son fil de laiton AP, & livrée à sa gravité ou pesanteur, se place dans sa direction perpendiculaire AP, qu'il faudra marquer sur le plan vertical par une ligne noire. Mais si on tire cette boule P hors de sa perpendiculaire, & qu'après l'avoir écartée ou détournée en B, par exemple, on l'abandonne à sa pesanteur; elle descendra de B en P en vertu de sa gravité; elle montera, en vertu de son mouvement accéléré, de P en C; l'arc parcouru BC est sa *premiere vibration* ou oscillation. Elle descendra ensuite de C en P, en vertu de sa gravité; & elle montera de P en *m*, en vertu de son mouvement accéléré; l'arc parcouru C*m* est sa *seconde vibration*. Elle descendra ensuite de *m* en P, & montera de P en *n*; l'arc parcouru *mn* est sa *troisieme vibration*. Elle passera ensuite de *n* en *r*, & de *r* en *s*; c'est sa quatrieme & cinquieme vibration; & ainsi de suite, jusqu'à l'entier épuisement de son mouvement qui peut durer jusqu'à 12 ou 15 ou 20 ou 24 heures, en décrivant des arcs toujours de plus en plus petits.

Galilée fut le premier à observer que *les vibrations d'un même pendule, quand elles ont peu d'étendue, sont toutes isochrones, ou d'égale durée ;* par exemple, que la vibration plus petite *rs* dure précisément autant que la vibration plus grande *mn*, que la vibration encore

plus grande BC : mais que *les vibrations de deux pendules d'inégale longueur sont inégales en durée*, le pendule plus court AO mettant moins de tems à faire chacune de ses vibrations isochrones, que n'en met le pendule plus long AQ à faire ses vibrations aussi isochrones; & que les deux pendules étant mis en mouvement au même instant, *ils avoient fait chacun au bout d'un tems donné, des nombres de vibrations qui sont en raison inverse des racines quarrées des longueurs des pendules* : c'est-à-dire qu'au bout d'un tems donné, d'une heure, d'une minute, par exemple, le nombre des vibrations faites par un pendule AO de 16 pouces de longueur, est au nombre de vibrations faites par un pendule AQ de 36 pouces de longueur; comme 6, racine quarrée de 36, est à 4, racine quarrée de 16; & ainsi du reste. Cette observation de Galilée est parfaitement d'accord avec la théorie du mouvement accéléré, qu'il venoit de créer & de démontrer (*Phys.* 363); & il appliqua sa nouvelle découverte à mesurer la hauteur des voûtes de différentes églises, en comparant le nombre des vibrations des lampes qui y sont suspendues, avec les vibrations que faisoit dans le même tems un pendule AP d'une longueur connue.

Puisqu'il conste par l'expérience que le nombre des vibrations faites par un pendule dans un tems donné, par exemple, dans une minute ou dans une heure, est d'autant plus plus grand, que le pendule est plus court; d'autant plus petit, que le pendule est plus long; il s'agit uniquement, pour faire du pendule AP un *pendule à secondes exact*, d'élever ou d'abaisser la boule P, jusqu'à ce qu'elle fasse exactement & précisément 60 vibrations par minute, 3600 vibrations par heure. Il conste par les expériences & par les observations faites sur cet objet depuis près d'un siecle, que le pendule simple AP, pour faire exactement une vibration en un seconde de tems, doit avoir, à Paris, une

longueur de 36 pouces 8 lignes $\frac{52}{100}$ de ligne; sous l'équateur au niveau de la mer, une longueur de 36 pouces 7 lignes $\frac{7}{100}$ de ligne; à Pello en Laponie, une longueur de 36 pouces 9 lignes $\frac{17}{100}$ de ligne; au Cap de Bonne-Espérance, une longueur de 36 pouces 8 lignes $\frac{7}{100}$ de ligne. Cette longueur du pendule varie avec les latitudes; mais elle est constante à la même latitude : elle peut donc servir à donner une mesure universelle qui se fasse entendre indifféremment à tous les peuples; & il ne s'agit pour cela, que d'évaluer exactement la longueur du pendule.

Cette *longueur du pendule* AP est la distance interceptée entre le point d'appui ou de suspension de l'anneau A sur le cylindre saillant, & le centre de percussion ou d'oscillation pris dans la boule P. Ce centre d'oscillation ou de percussion n'est pas le centre même de la boule P, mais un point un peu au-dessous du centre qu'on trouvera par cette analogie : la longueur du fil, comptée depuis le point de suspension jusqu'à l'extrêmité supérieure du diametre de la boule, est au rayon de la boule, comme les deux cinquiemes du rayon de la boule, sont à un quatrieme terme qui exprimera la quantité dont le *centre d'oscillation* est au-dessous du centre de la boule P. Supposons que la longueur du fil, comprise entre le point de suspension & la surface supérieure de la boule, soit de 435 lignes; que le rayon de la boule soit de 5 lignes, dont les deux cinquiemes sont 2 lignes : la proportion précédente se réduira à celle-ci : $435 . 5 :: 2 . x = \frac{10}{435}$ de ligne : c'est-à-dire que le centre d'oscillation sera au-dessous du centre de la boule, d'une quantité égale à dix parties d'une ligne divisée en 435 parties.

Il me sera facile maintenant d'apprendre exactement au Chinois dont il a été question, ce que j'entends par une étendue d'un pied. Que ce Chinois, à une latitude d'environ 48 degrés & 50 minutes, & à

une hauteur peu considérable au-dessus du niveau de la mer, construise un pendule semblable à celui que je viens de décrire, & que je suppose réglé pour Paris : la longueur de ce pendule Chinois étant divisée en 881 parties égales, chaque partie équivaudra à ce que je nomme une demi-ligne ; 288 de ces parties équivaudront à ce que j'appelle *un pied*, qui est la sixieme partie de la toise Françoise.

Quand enfin ce Chinois connoîtra ce que j'entends par une longueur d'un pied, il ne me sera pas difficile de lui faire connoître ce que j'entends par *un poids d'une livre*. Car alors je lui dirai qu'un poids d'une livre est la soixante-dixieme partie du poids d'un pied cube d'eau de pluie ; la treize cents soixante-quinzieme partie du poids d'un pied cube d'or de coupelle, d'or pur & sans aucun alliage. (*Phys.* 644.)

### *Pendule à secondes composé.*

III°. Le pendule simple, que nous venons de décrire, est propre à mesurer le tems avec toute la précision possible, dans certaines observations de peu de durée. Mais, faute de moyens commodes pour en compter les vibrations & pour en perpétuer les mouvements, la physique & l'astronomie n'avoient tiré que très-peu d'avantage de cet instrument; lorsque le célebre Huyghens, la gloire de la Hollande & l'un des grands hommes du dernier siecle, entreprit de l'appliquer à régler le mouvement des horloges. Également doué du génie de la méchanique & du génie de la géométrie, il imagina une construction d'horloge où le pendule servant de modérateur au rouage, & l'empêchant d'accélérer son mouvement, le réduisit à un mouvement très-uniforme : voici une idée de ce méchanisme. (*fig.* 119.)

Soit AP une verge de fer, plate & solide, au bas de

laquelle est suspendu le poids P. Ce poids est une pesante lentille de cuivre, formée de deux segments de sphere réunis en un même tout, & percée par le milieu de haut en bas pour donner passage à la verge de fer. Cette verge de fer est mobile sur un point fixe en A dans sa partie supérieure; & dans sa partie inférieure, elle est terminée en vis enveloppée d'un écrou mobile, qui puisse élever ou abaisser à volonté la lentille ou le poids P. Le pendule, qui consiste ici en une verge de fer au bas de laquelle le poids est suspendu, communique par sa partie supérieure *a*, saillante au-dessus du point A, un mouvement alternatif à un aissieu garni de deux petites palettes *tv*, *rs*, tellement disposées, qu'à chaque vibration elles ne laissent passer qu'une dent de la roue R avec laquelle elles s'engrenent (*). Cette roue R ne peut donc avoir qu'un mouvement aussi uniforme que celui du pendule même; & puisque de son mouvement dépend celui de tout le rouage, dont les parties s'engrenent mutuellement entr'elles & avec cette roue, ce rouage est contraint de marcher avec la même uniformité que le pendule.

(*) Nous ne prétendons point que la disposition des deux palettes *rs*, *tv*, soit ou doive être telle que nous la représentons ici: nous nous bornons à faire entendre d'une maniere sensible le méchanisme physique de cet instrument, dans lequel il est facile de placer les palettes qui le reglent, d'une maniere plus simple & plus convenable, au choix des artistes qui le composent. Les deux palettes sont supposées ici mobiles autour du point fixe S: la roue R est supposée avoir deux rangs de dents, dont l'un s'engrene avec la palette *r*, & l'autre avec la palette *v*; en telle sorte que quand la dent *r* s'échappe, la dent *v* atteigne l'obstacle qui l'arrête; & réciproquement. Nous supposons encore qu'à mesure qu'une dent s'échappe, la roue R meut un petit ressort qui donne une petite impulsion uniforme à la partie saillante *a*A du pendule, & qui la meut dans un sens opposé à son oscillation finie.

Il y a plus : ce rouage RS, par l'action du poids ou du ressort qui le met en mouvement, fait un petit effort contre le pendule, & lui communique à peu près la même quantité de mouvement qu'il perd à chaque vibration par la résistance de l'air ou par la résistance du frottement : de sorte qu'au lieu de rester environ vingt-quatre heures en mouvement, comme il pourroit faire sans cela, le pendule AP ne peut plus s'arrêter que lorsque le poids ou le ressort de la machine cessera d'agir. En adaptant à ce méchanisme un petit marteau qui frappe sur un timbre à chaque vibration isochrone & uniforme BC du pendule, on aura le *pendule à secondes composé* dont se servent communément les Astronomes. Telle est, pour le fond des choses, la belle découverte de Huyghens, qu'il développa ensuite avec toute l'étendue & toute la sagacité du génie, dans son fameux ouvrage intitulé *Horologium oscillatorium ;* & qui a été universellement applaudie & adoptée par tous les savans & par tous les artistes de l'Europe.

Il nous reste maintenant à donner en détail une idée exacte & précise des différentes mesures dont il est sans cesse question, soit dans les sciences, soit dans le commerce & dans la vie civile.

### *Mesures du tems.*

IV°. L'*année solaire*, celle qui regle les saisons, est de 365 jours 5 heures 48 minutes & environ 44 secondes. (*Phys.* 1137.)

Le *jour moyen* (*Phys.* 1326) est de 24 heures ; l'heure, de 60 minutes ; la minute, de 60 secondes ; la seconde, de 60 tierces ; la tierce, de 60 quartes. Ainsi un jour moyen est de 1440 minutes, de 86400 secondes, de 5184000 tierces : une heure est de 3600 secondes, de 216000 tierces : une minute est de 3600 tierces.

Dans les calculs astronomiques & chronologiques, on a souvent besoin d'une mesure fixe & universelle du tems, à laquelle on puisse rapporter les différentes époques astronomiqnes & politiques des nations anciennes & modernes : sans quoi on ne sait à quoi répondent ces époques dans chaque chronologie isolée. Ce fut dans cette vue que Joseph Scaliger imagina la fameuse période Julienne, pour servir de mesure universelle & de terme de comparaison en fait de chronologie. Le monde savans a adopté avec empressement cette période (*) ; & les grandes époques des différentes nations sont maintenant rapportées à la premiere année de cette période, dans les plus célebres chronologistes, & en particulier par le savant Jésuite Petau.

Mesure universelle du tems.

La *période Julienne* est le produit des trois cycles connus de tout le monde, du cycle solaire, du cycle lunaire, & du cycle d'indiction ; ou de 28 par 19 & 15 : c'est-à-dire un espace de 7980 ans, dans lequel on ne peut avoir le même nombre pour les trois cycles, mais au bout duquel les trois cycles reviennent dans le même ordre. La période Julienne commence précisément 4713 ans avant l'ere chrétienne, le premier janvier; soit que la Création soit antérieure, soit qu'elle soit postérieure à cette époque idéale : ainsi l'année 4713 avant l'ere chrétienne, est la premiere année de la période Julienne. Pour savoir à quelle année de la période Julienne répond une *année donnée après Jesus-Christ*, il ne faut qu'ajouter 4713 à la somme de l'année donnée 1772, par exemple; & l'on a l'année de la période Julienne qui répond à l'année donnée de l'ere

(*) ETYMOLOGIE. Période; révolution, circuit: de περὶ, *circum*, autour; & de ὁδὸς, *via*, chemin: quasi *via in circuitum*, seu *via in se rediens*.

chrétienne. De même, pour trouver à quelle année de cette période répond telle *année donnée avant Jesus-Christ*, par exemple, l'année 747; il n'y a qu'à soustraire l'année donnée 747, de 4714: le reste 3967 marquera l'année de la période Julienne à laquelle répond l'année donnée.

Dans la chronologie, la certitude & la précision ne remontent guere que jusqu'au commencement de l'ere des Olympiades: tout ce qui est antérieur n'a plus rien de fixe & de précis, soit dans l'histoire profane, soit dans l'histoire sacrée. Nous allons placer ici une table des principales époques rapportées à la période Julienne: cette table, depuis l'année présente jusqu'à la premiere année des Olympiades, est tracée exactement d'après la chronologie des Petau & des Bossuet, chronologie adoptée par le savant de Lalande dans son astronomie. Nous n'y ferons point mention des époques profanes antérieures à l'ere des Olympiades, par exemple, de la prise de Troye & de l'expédition des Argonautes, parce qu'elles n'ont pas assez de certitude historique. Bossuet place la prise de Troye, vers l'an 1184 avant l'ere chrétienne: Newton ne place l'expédition des Argonautes, antérieure au siege de Troye, qu'environ 900 ou 936 ans avant l'ere chrétienne. Il est vrai que la chronologie de Newton a été combattue & réfutée par MM. Wiston, Freret, Maraldi, & plusieurs autres savants: mais que prouve ce conflit d'opinions, sinon l'incertitude des choses? Les Chinois & les Indiens n'ont aucune époque fixe & précise, qui remonte plus loin, ou même aussi loin que l'ere des Olympiades: au-delà, c'est chez eux, comme dans les tems héroïques des Grecs, des Egyptiens, des Babyloniens, un tems d'incertitude & de confusion. Dans cette table, l'ere de Nabonassar, à laquelle les deux plus grands astronomes de l'antiquité, Hipparque & Ptolomée, ont rapporté leurs observations

& leurs calculs, mérite une attention ſpéciale.

Quant aux *époques ſacrées*, antérieures à l'ere des Olympiades, nous nous ſommes conformés dans cette table, à la chronologie même des Livres ſaints, laquelle nous paroît ne pas toujours quadrer ni avec celle de Boſſuet, ni avec celle de Petau : le premier place la Création 4004 ans, & le ſecond 3983 ans avant l'ere chrétienne. On trouvera cette chronologie, telle que nous la traçons depuis la dédicace du temple de Salomon juſqu'à la Création, dans les ſources ſacrées que nous citons dans la ſeconde table ; c'eſt-à-dire, dans les différentes polyglottes (*) où ſe trouve à la fois & le texte hébreu des Juifs en caractere chaldaïque, & le texte grec des Septante, & le texte hébreu des Samaritains en ancien caractere hébraïque, avec leurs traductions reſpectives en latin. Il ne s'agit, dans les deux premieres époques de cette ſeconde table, que de réunir par une ſimple addition, les années des différents Patriarches, au tems où ils deviennent peres, depuis Adam juſqu'à Iſaac (*Phyſ.* 530) : la ſomme ſera le nombre des années écoulées depuis la création juſqu'au déluge, & depuis le déluge juſqu'à la vocation d'Abraham ; vocation qui donne commencement au Peuple de Dieu, & qui répond primitivement à la ſoixante-quinzieme année de ce Patriarche, vingt-cinq ans avant la naiſſance d'Iſaac. La troiſieme & la quatrieme époques de la ſeconde table, ſe trouvent toute calculées dans les ſources ſacrées que nous y citons. Quant aux deux dernieres époques de la même ſeconde table, s'il y a quelque petite différence de chronologie entre le texte hébreu & le texte des

(*) ETYMOLOGIE. Polyglotte, ouvrage en pluſieurs langues : de πολύς, *multus* ; & de γλῶττα, *lingua*. Ce terme eſt affecté uniquement à la Bible ou à la collection des Livres ſaints en pluſieurs langues.

Septante,

## PREMIERE TABLE CHRONOLOGIQUE.

| Époques principales, selon la Vulgate. | | Années de la période Julienne. | Années avant Jesus-Christ. | | Époques primitives, selon les Septante. |
|---|---|---|---|---|---|
| | | .... | .... | | |
| | | 639 | 5353 | * | La Création, *antérieure de 639 ans à la période Julienne.* |
| | | .... | .... | | |
| | | 2 | 4715 | | |
| | | 1 | 4714 | | |
| *Commencement de la période Julienne.* | * | 1 | 4713 | | |
| | | 2 | 4712 | | |
| | | .... | .... | | |
| La Création. | * | 718 | 3996 | | |
| | | .... | .... | | |
| | | 1148 | 3119 | * | Le Déluge. |
| | | .... | .... | | |
| Le Déluge. | * | 2374 | 2340 | | |
| | | .... | .... | | |
| Vocation d'Abraham. | * | 2800 | 1914 | * | Vocation d'Abraham. |
| | | .... | .... | * | *Tems héroïques* |
| Sortie d'Egypte. | * | 3230 | 1484 | . | |
| | | .... | .... | . | *des Grecs &* |
| Dédicace du Temple de Salomon. | * | 3710 | 1004 | . | |
| | | .... | .... | . | |
| | | 3937 | 777 | * | *des Egyptiens.* |
| Ere des Olympiades. | * | 3938 | 776 | | Petau : *Doctrina temporum.* |
| | | .... | .... | | |
| Fondation de Rome. | * | 3961 | 753 | | Bossuet : *Discours sur l'Histoire universelle.* |
| | | .... | .... | | |
| Ere de Nabonassar. | * | 3967 | 747 | | |
| | | .... | .... | | De la Lande : *Astronomie*, tom. II, pag. 324 & 328, *édition de* 1771. |
| Délivrance des Juifs, sous Cyrus. | * | 4178 | 536 | | |
| | | .... | .... | | |
| Mort d'Alexandre. | * | 4390 | 324 | | |
| | | .... | .... | | |
| Prise de Carthage, sous Scipion. | * | 4492 | 201 | | |
| | | .... | .... | | |
| | | 4711 | 3 | . | *Naissance effective de* |
| | | 4712 | 2 | . | *de Jesus-Christ.* |
| | | 4713 | 1 | . | |
| Ere chrétienne. | * | 4714 | 1 | * | Années depuis Jesus-Christ. |
| | | .... | .... | | |
| Ere des Mahométans. | * | 5335 | 622 | | |
| | | .... | .... | | |
| | | 6485 | 1772 | * | Année présente. |

## SECONDE TABLE CHRONOLOGIQUE.

| Epoques. | CHRONOLOGIE des Livres saints. | Selon l'Hébreu. | Selon les Septante. | Selon les Samaritains. | |
|---|---|---|---|---|---|
| I. | Depuis la Création, jusqu'au Déluge. | 1656 | 2234 | 1307 | Gen. 5. |
| II. | Depuis le Déluge, jusqu'à la vocation d'Abraham. | 426 (*) | 1245 | 1040 | Gen. 5. 12. |
| III. | Depuis la vocation d'Abraham, jusqu'à la sortie d'Egypte. | 430 | 430 | 430 | Exod. 12. |
| IV. | Depuis la sortie d'Egypte, jusqu'à la dédicace du Temple. | 480 | 440 | III. Regum, 6. | |
| V. | Depuis la dédicace du Temple, jusqu'à la liberté sous Cyrus. | 468 | 468 | | |
| VI. | Depuis la liberté sous Cyrus, jusqu'à Jesus-Christ. | 536 | 536 | Bossuet : *Discours sur l'Histoire universelle.* | |
| | TOTAL | 3996 | 5353 | | |

Depuis le Déluge jusqu'à Jesus-Christ, selon l'Hébreu & la Vulgate, 2340 ans; Selon les Septante, 3119 ans : différence, depuis la création jusqu'à Jesus-Christ, 1357 ans; depuis le Déluge jusqu'à Jesus-Christ, 779 ou 830 ans.

(*) REMARQUE. La généalogie des Patriarches, depuis le Déluge jusqu'à la vocation d'Abraham, ne donne strictement, selon l'Hébreu & la Vulgate, que de 365 ans (*Phys.* 530). En y ajoutant environ 60 ans pour l'âge de Caïnan omis dans le texte Hébreu & dans le texte Samaritain, & rétabli dans le texte des Septante & dans l'Evangile selon saint Luc; ou en étendant cette époque jusqu'à l'entrée d'Abraham en Egypte, où commence l'époque suivante; nous compterons avec Bossuet, 426 ans; pour nous conformer ici à la chronologie la plus reçue.

La Table chronologique qui se trouve dans le second volume de notre Physique, page 97, doit être conforme à celle-ci; & si (faute d'un carton omis) elle étoit différente, c'est à celle-ci qu'il faudroit s'en rapporter.

Septante, nous en faisons abstraction, à l'exemple de presque tous les chronologistes. En rapportant, dans la premiere table, les différentes époques sacrées à la période Julienne, & selon la chronologie de la Vulgate & selon la chronologie des Septante, nous ne dissimulerons point que s'il falloit nous décider pour l'une de ces deux chronologies déterminément, celle des Septante auroit la préférence.

Nous ne faisons aucune mention, dans cette premiere table, de la chronologie Samaritaine, qui differe encore de la chronologie de la Vulgate & de la chronologie des Septante : parce qu'elle nous paroît avoir moins de certitude que les deux dernieres. Selon la chronologie Samaritaine, ou selon la chronologie du Pentateuque conservé en langue & en caractere hébraïque par les schismatiques Samaritains, Adam (*Phys.* 530) devint pere à 130 ans; Seth, à 105; Enos, à 90; Caïnan, à 70; Malaléel, à 65; Jared, à 62; Henoc, à 65; Mathusalem, à 67; Lamech, à 53; Noé, à 500; Sem, à 100; Arphaxad, à 135; Salé, à 130; Heber, à 134; Phaleg, à 130; Reu, à 132; Sarug, à 130; Nachor, à 79; Tharé, à 70; Abraham, à 100; Isaac, à 60. En supposant que dans les premiers tems, les copistes Hébreux & Samaritains marquassent l'âge où les Patriarches devenoient peres, par les lettres de leur alphabet (14 III°.); il est clair qu'une lettre mise en place d'une autre, a pu occasionner cette diversité de chronologie.

On nomme *Ere*, un dénombrement d'années commencé à certain point que quelque grand événement fait remarquer. Telle est l'ere chrétienne, qui a pour époque la naissance de Jesus-Christ. Il faut cependant observer ici que, selon la plupart des savans, la naissance effective de Jesus-Christ paroît précéder d'un ou deux ans l'ere chrétienne.

## *Mesures de l'étendue & des poids.*

V°. En attendant la convention d'une mesure universelle, les Géometres François rapportent maintenant toutes leurs mesures à la *toise de l'Académie Royale des Sciences*, qui est celle du grand châtelet de Paris, & celle qui a servi à mesurer les trois premiers degrés du méridien sous l'équateur. En vertu d'une déclaration du Roi de l'année 1766, ont été construites environ 80 toises parfaitement semblables à celle de l'équateur & du châtelet ; & elles ont été envoyées aux procureurs généraux des parlements, de même que l'aune de Paris & le poids de marc : ensorte que dans les principales villes du royaume, cette mesure existe dans toute son exactitude.

La *toise royale* est de 6 pieds : le pied, de 12 pouces : le pouce, de 12 lignes : la ligne, de 12 points. Le point n'a aucune dimension, ou n'a que des dimensions comme infiniment petites, dont on fait abstraction.

Le *pas géométrique* est de 5 pieds. Cette mesure n'est guere d'usage chez les auteurs François.

La *lieue commune* de France est de 2287 toises. Quelques auteurs lui donnent quatre toises de moins.

Le *mille d'Italie* contient mille pas géométriques, ou 5000 pieds, ou 833 toises & un tiers. Quelques auteurs donnent, les uns plus & les autres moins d'étendue, au mille d'Italie : nous nous en tiendrons à l'idée que nous venons d'en donner.

Le *moyen rayon de la terre* est d'environ 3269985 toises ; qui font 19619910 pieds ; qui font environ 1430 lieues communes de France. (*Phys.* 1377.)

La *circonférence d'un cercle* se divise en 360 degrés (309) : le degré, en 60 minutes ; la minute, en 60 secondes ; la seconde, en 60 tierces ; la tierce, en 60 quartes. Ainsi un cercle est de 360 degrés, de

21600 minutes, de 1296000 secondes, de 77760000 tierces : un degré est de 60 minutes, de 3600 secondes, de 216000 tierces.

Le *pouce quarré* contient 144 lignes quarrées : le pied quarré, 144 pouces quarrés, ou 20736 lignes quarrées.

La *toise quarrée* renferme 36 pieds quarrés, ou 5184 pouces quarrés.

La *toise cube* contient six fois 36 pieds cubes, ou 216 pieds cubes.

L'*arpent* ou le *journal* est toujours de cent perches quarrées : mais la perche est plus grande ou plus petite en différents lieux, & souvent dans le même lieu : sa plus grande longueur est de vingt-huit pieds ; sa plus petite, de dix-huit. A Paris, la perche est de 18 pieds ; & l'arpent y contient 900 toises quarrées, la perche quarrée ayant neuf toises quarrées de superficie. Dans l'usage des Eaux & Forêts, par tout le royaume, la perche est de 22 pieds ; & l'arpent contient 1344 toises & 4 neuviemes de toise.

Le *muid de bled* à Paris, contient 12 septiers ; le septier, deux mines ou 12 boisseaux ; la mine, deux minots ; le minot, trois boisseaux ; le boisseau, seize litrons. Le boisseau de bled pese de 21 à 22 livres ; & il y a 144 boisseaux dans le muid.

Le *muid de vin* à Paris, contient 37 septiers & demi, ou 300 pintes, y compris la lie ; le septier, huit pintes ; la pinte, deux chopines.

Le *millier* contient dix quintaux ; le quintal, cent livres ; la livre, deux marcs ou 16 onces ; le marc, 8 onces ; l'once, 8 gros ; le gros, 72 grains ; l'once, 576 grains.

Il seroit évidemment avantageux pour les sciences, pour le commerce, pour la société, que sous un même Monarque il n'y eût qu'une même loi, qu'un même poids, qu'une même mesure : c'est l'inutile vœu que

forment depuis long-tems, les savans & les particules.

*Mesures de l'étendue comparées.*

VI°. Comme on a souvent besoin de comparer les mesures étrangeres, anciennes & modernes, avec nos mesures; voici, d'après M. de Lalande, les plus intéressantes de ces mesures, rapportées à nos mesures françoises. Nous ne garantirons pas pleinement l'exactitude de tous ces rapports: les personnes qui auroient quelque doute sur cet objet, pourront consulter l'auteur de qui nous les tirons, & qui cite lui-même les autorités sur lesquelles il se fonde, dans son Astronomie, derniere édition, *tome III*, *page* 94.

| | *Toises de France.* | |
|---|---|---|
| Le mille romain de Pline, est de | $757 + \frac{[illegible]}{10}$. | |
| Le mille romain de Strabon, | 766. | |
| Le mille moderne de Rome, | 764. | |
| Le mille d'Angleterre, | 830. | |
| Le li des Chinois, | 265. | |
| Le stade des anciens Romains, | $94 + \frac{693}{1000}$. | |
| Le stade Egyptien, | $114 + \frac{13}{100}$. | |
| | *Pouces,* | *lignes.* |
| Le pied des anciens Romains, est de | 10. | $10 + \frac{90}{100}$. |
| Le pied grec, | 11. | $4 + \frac{16}{100}$. |
| Le pied arabe, | 9. | $10 + \frac{72}{100}$. |
| Le pied d'Alexandrie, | 13. | $2 + \frac{9}{10}$. |
| La coudée des Hébreux, | 19. | $10 + \frac{4}{10}$. |
| Le pied d'Angleterre, | 11. | $3 + \frac{1154}{10000}$. |
| Le pied du Rhin, de Danemarck, | 11. | $7 + \frac{183}{1000}$. |
| Le pied de Vienne en Autriche, | 11. | $8 + \frac{117}{1000}$. |
| La Vare de Castille, | 30. | 11. |
| Le palme romain moderne, | 8. | $3 + \frac{33}{100}$. |
| Le palme de Naples, | 9. | $8 + \frac{15}{100}$. |
| L'archine de Russie, | 26. | $6 + \frac{3}{10}$. |
| Le pied royal de la Chine, | 11. | $9 + \frac{2}{10}$. |

## *Dilatation des mesures par la chaleur.*

VII°. Tout le monde sait que les différents corps se dilatent par la chaleur & se condensent par le froid (*Phys.* 216) : il faut donc avoir égard à ces variations, quand on a besoin d'une extrême précision dans les mesures que l'on cherche. Par exemple, lorsqu'on mesure une grande distance ou une grande base sur terre entre deux objets éloignés & invariables, on se sert d'une toise qui est ordinairement de fer : & comme cette toise est sujette à se dilater par la chaleur & à se condenser par le froid, on trouve dans la distance mesurée pendant un tems froid, un plus grand nombre de toises ou de pieds que quand la même distance est mesurée pendant un tems chaud. Il est donc essentiel, quand on rapporte une semblable opération, de marquer à quel degré de chaleur on l'a faite, afin de faire connoître quelle devoit être alors la longueur de la toise qui a servi de mesure.

M. de la Condamine a trouvé qu'une toise de fer s'alonge d'environ $\frac{1}{87}$ de ligne, pour chaque degré du thermometre de Reaumur ; ou plus exactement d'une toise & un tiers sur cent mille toises : de sorte que si une distance a été trouvée de 100000 toises, le thermometre étant à zéro (*Phys.* 211) ; cette même distance sera trouvée de $100000 + 21 + 7$, le thermometre étant à 21 degrés au-dessus de la congelation.

Suivant les expériences de M. Berthoud, faites dans une étuve où le thermometre de Reaumur étoit monté de zéro à 27 degrés ; sur des verges de 3 pieds 2 pouces 5 lignes de longueur, de 5 lignes de large, & de 3 lignes d'épaisseur,

| | |
|---|---|
| Le cuivre jaune s'est alongé de . . . . | $\frac{121}{360}$ de ligne. |
| Le cuivre rouge, de | $\frac{107}{360}$ |
| Le fer battu à froid, de | $\frac{78}{360}$ |

| | | |
|---|---|---|
| L'acier trempé & revenu bleu, de | $\frac{77}{360}$ | de ligne. |
| Le fer battu à froid & recuit, de | $\frac{77}{360}$ | |
| L'acier trempé & ensuite recuit, de | $\frac{69}{360}$ | |

## MÉTHODE DES GÉOMETRES.

8. DÉFINITION I. On nomme *méthode des Géometres*, la maniere dont ils procedent pour démontrer ou pour découvrir la vérité. Cette méthode consiste à donner d'abord des définitions des objets dont il est question ; à partir de certains axiomes avoués, d'où doit découler la vérité à établir ou à découvrir ; à faire certaines demandes ou suppositions évidemment possibles & incontestables, qui doivent servir à trouver ou à démontrer la chose dont il s'agit. Ainsi procéder dans un ouvrage, par définitions, par axiomes, par demandes, c'est suivre ce qu'on appelle la méthode des Géometres.

I°. Les *définitions* sont l'explication des termes dont on se sert, & des idées qu'on y attache ; pour en fixer le sens, pour éviter l'ambiguité, la confusion, la contestation.

II°. Les *axiomes* sont des propositions dont la vérité est incontestable ; qui sont si évidentes en elles-mêmes & par elles-mêmes, qu'elles n'ont pas besoin de preuves ; & qui peuvent servir à démontrer une foule d'autres propositions liées avec elles.

III°. Les *demandes* sont des suppositions ou des hypotheses si évidemment possibles, ou des choses si faciles à faire, que personne ne les conteste : comme si l'on suppose qu'il y ait une ligne tirée d'un point à un autre ; que cette ligne se meuve sur un plan ; qu'un plan tourne sur une ligne ; ou si l'on demande qu'il soit permis d'ajouter un nombre à un autre, de doubler ou de tripler une grandeur donnée ; & ainsi du reste.

9. DÉFINITION II. C'eſt par le moyen des définitions, des axiomes, des demandes, que le Mathématiciens établiſſent & démontrent toutes leurs propoſitions, qui ſont de quatre ſortes; théorêmes, problêmes, corollaires, & lemmes. Delà dans leurs ouvrages une ſuite lumineuſe de propoſitions tellement aſſorties & liées enſemble, que les vérités qu'on y démontre, ſe déduiſent les unes des autres, & forment entr'elles un enchaînement merveilleux.

I°. Un *théorême* (*) eſt une propoſition dont il faut ſimplement démontrer la vérité.

II°. Un *problême* eſt une propoſition dans laquelle il s'agit d'enſeigner la maniere de faire quelque choſe; & de démontrer que celle qu'on propoſe pour l'exécution, eſt infaillible.

III°. Un *corollaire* eſt une propoſition qui découle d'une vérité précédente & démontrée.

IV°. Un *lemme* eſt une propoſition que l'on ne démontre que pour pouvoir démontrer par ſon moyen, d'autres propoſitions ſuivantes.

Outre ces quatre ſortes de propoſitions, on emploie auſſi des *remarques* ou *ſcholies*, pour l'éclairciſſement de quelques propoſitions, ou pour en montrer l'application & en expliquer l'uſage.

---

(*) ÉTYMOLOGIES. *Théorême*, θεώρημα; propoſition dont on voit ou dont on démontre la vérité. De θεωρία, théorie, contemplation, viſion intuitive des choſes; ou de θεάομαι, *video*, je vois. *Problême*, πρόβλημα; propoſition avancée qu'on réſout ou qu'on donne à réſoudre: de προβάλλω, propoſer, jetter en avant. *Lemme*, λημμα: choſe qu'on prend & qu'on établit pour en établir quelque autre. *Axiome*, ἀξίωμα; maxime conſtante & reçue de tout le monde: d'ἀξιόω, eſtimer digne d'être avoué & applaudi; juger établi & reçu. *Corollaire*, vérité utile, qui découle ou qu'on extrait d'une propoſition démontrée: de ῥύω, *extraho*, & de κορώνη, ou de *corolla*, petite couronne: quaſi *veritas ab aliâ fluens, inſtar corollæ ingenii vi obtentæ*.

10. DÉFINITION III. Les Géometres emploient aussi quelquefois un autre genre de démonstration, qu'on appelle la *preuve de superposition*.

Cette preuve de superposition consiste à placer, non méchaniquement & en réalité, mais mentalement & par la pensée, deux figures planes l'une sur l'autre, par exemple deux triangles; & si l'on conçoit évidemment que les deux figures, placées l'une sur l'autre, se répondent nécessairement dans tous les points correspondants qui forment leurs côtés & qui les terminent, l'égalité de ces deux figures est démontrée, & sert souvent de fondement à de nouvelles démonstrations.

Cette preuve de superposition est fondée sur cet axiome de métaphysique, qu'*on doit affirmer des choses, ce que l'on conçoit évidemment dans les choses*. Dans les deux triangles en question, placés l'un sur l'autre par la pensée, on conçoit évidemment que toutes les parties de l'un quadrant avec toutes les parties correspondantes de l'autre, sans excès & sans défaut, il regne entre l'un & l'autre triangle une parfaite égalité : donc on peut & on doit affirmer cette égalité.

## *AXIOMES DE MATHÉMATIQUES.*

11. OBSERVATION. Comme les deux parties des mathématiques, le Calcul & la Géométrie, sont également fondées sur un certain nombre d'axiomes évidents en eux-mêmes, & par eux-mêmes, il est à propos d'en présenter & d'en réunir ici les principaux sous un même point de vue. Tous les axiomes mathématiques dérivent primitivement de cet axiome fondamental de toutes les connoissances humaines ; *on peut & on doit affirmer des choses, ce que l'on conçoit évidemment dans les choses* ; comme nous l'avons observé & expliqué dans notre métaphysique (*Mét.* 154). Voici donc les axiomes qui fondent toutes les démonstrations mathématiques.

I°. *Le tout est plus grand que sa partie : le tout est égal à toutes ses parties prises ensemble.* On entend par partie d'un tout, une portion quelconque de ce tout, qui n'est pas le tout. Par exemple, dans la grandeur 100, une partie peut être 99 ; & alors l'autre sera 1 ; & ainsi du reste.

II°. *Toute grandeur est égale à elle-même.* Elle ne peut donc être ni plus grande, ni plus petite que toutes ses parties prises ensemble.

III°. *Quand deux grandeurs sont égales entr'elles, on peut prendre l'une pour l'autre ; ou substituer l'une à l'autre.* Par exemple, si le nombre 10 unités est égal à une dixaine d'unités ; il est indifférent qu'en faisant l'addition, je mette dans la somme, dix unités ou une dixaine d'unités ; qu'en faisant la multiplication, je multiplie par un nombre donné 4 ou 6, dix unités ou une dixaine d'unités ; & ainsi du reste.

De même si une ligne donnée AB de six toises est égale à une autre ligne donnée *ab*, j'aurai la même somme de toises 12, en prenant deux fois l'une ou l'autre indifféremment ; j'aurai le même produit, en multipliant l'une ou l'autre indifféremment par un même nombre 4, ou par une même ligne MN.

IV°. *Deux grandeurs, discretes ou continues, qui sont égales chacune à une troisieme grandeur, sont égales entr'elles.* Par exemple, si M est égale à 10 ; si N est égale à 10 ; donc M est égale à N.

V°. *Les grandeurs égales entr'elles, qui ont reçu des augmentations ou souffert des diminutions égales, restent encore égales.* Par exemple, si les grandeurs M & N sont égales chacune à la grandeur 10 ; en retranchant une même grandeur 3 à chacune, on aura deux restes égaux 7 : en ajoutant une même grandeur 100 à chacune, on aura deux nouveaux touts 110, égaux entr'eux.

VI°. *Les grandeurs qui étant d'abord égales entr'elles,*

*ont reçu des augmentations ou souffert des diminutions inégales, sont devenues inégales.* Par exemple, à deux grandeurs égales 10 & 10, ajoutez 2 d'un côté & 4 de l'autre : les deux grandeurs nouvelles 12 & 14 seront inégales. A ces deux mêmes grandeurs égales 10 & 10, ôtez 5 d'un côté & 3 de l'autre, les deux grandeurs restantes 5 & 7 seront inégales.

VII°. *Les grandeurs qui étant inégales entr'elles ont eu des augmentations ou des diminutions égales, restent toujours inégales.* Par exemple, à deux grandeurs inégales 10 & 15, ôtez ou ajoutez une même grandeur 4; les grandeurs restantes 6 & 11, ou les grandeurs augmentées 14 & 19, seront inégales.

VIII°. *Une grandeur est toujours contenue une fois & une seule fois en elle-même.* Par conséquent, une grandeur divisée par elle-même, est égale à l'unité : mais une grandeur retranchée d'elle-même, devient nulle ou égale à zéro. La grandeur $a$, divisée par $a$, est $= 1$ : la grandeur $a$, moins la grandeur $a$, est $= 0$.

Avant d'entrer en matiere, il est nécessaire de prévenir le lecteur sur quelques signes qu'on trouve très-fréquemment dans les ouvrages de Mathématiques. Ce signe $=$ signifie *est égal;* ce signe $+$ signifie *plus :* ce signe $-$ signifie *moins :* ce signe $\times$ signifie *multiplié par.* Ainsi, $5 + 2 = 7$ : de même $5 - 2 = 3$ : ainsi encore, $5 \times 2 = 10$. Ces quatre lettres C. Q. F. D, qui terminent la plupart des démonstrations mathématiques, signifient : *ce qu'il falloit démontrer.*

# PRINCIPES
## *DU CALCUL*
## ET DE LA GÉOMÉTRIE.

# *PREMIERE PARTIE.*
# LE CALCUL.

*CALCUL ARITHMÉTIQUE : Idée générale des nombres ; Addition, Soustraction, Multiplication incomplexe, Division incomplexe, Multiplication complexe, Division complexe, Multiplication & Division par les fractions de l'unité.*

*CALCUL ALGÉBRIQUE : Ses principes & ses regles ; formation du Quarré & du Cube, & extraction des Racines quarrées & cubiques ; exaltation & extraction des Quantités algébriques.*

*CALCUL ANALOGIQUE, ou théorie des Raisons, des Proportions, des Progressions, géométriques & arithmétiques : Calcul des Raisons simples, des Fractions, des Raisons composées, des Progressions finies & infinies.*

*CALCUL ANALYTIQUE, ou théorie des Equations : leur formation, leur Résolution, leur application à divers problêmes fondamentaux : Regle de Trois, de Cinq, de Compagnie, d'Alliage : somme infinie des parties proportionnellement décroissantes.*

# PRINCIPES
## *DU CALCUL*
## ET DE LA GÉOMÉTRIE,
OU
## *ÉLÉMENS DE MATHÉMATIQUES.*

# PREMIER TRAITÉ.

## *LE CALCUL ARITHMÉTIQUE.*

12. DÉFINITION I. L'ARITHMÉTIQUE est la *Science des Nombres*, sur lesquels elle apprend à faire différentes opérations dont elle donne & démontre les regles. Ces opérations consistent à ajouter un nombre à un autre ou à plusieurs autres, pour en avoir la somme; à soustraire un nombre d'un autre, pour en trouver la différence; à multiplier un nombre par un autre, pour en avoir le produit; à diviser un nombre par un autre, pour en avoir le quotient, ou pour trouver combien de fois le petit nombre est contenu dans le grand. L'Arithmétique a donc pour objet, comme nous l'avons annoncé, les grandeurs discretes, dont la

valeur eſt déterminée (2). Arithmétique; ſcience qui a pour objet les nombres : d'Αριθμος, *numerus*.

13. DÉFINITION II. Le *nombre* eſt un aſſemblage de pluſieurs unités, ou de pluſieurs parties de l'unité. Ainſi une ſeule unité, ou une ſeule partie de l'unité, ou 1, n'eſt point un nombre : mais 2 eſt un nombre; 10 eſt un nombre; 2 tiers de l'unité ſont un nombre; 3 dixiemes de l'unité, ou trois parties d'une unité diviſée en dix portions égales, ſont un nombre. Parmi les nombres, ſur leſquels opere l'Arithmétique, il y en a d'abſtraits & de concrets, d'incomplexes & de complexes, d'entiers & de fractionnaires, dont il eſt à propos de donner ici des notions générales & préliminaires.

I°. Les *nombres abſtraits* ſont ceux qui expriment des unités en général, ſans les appliquer à des grandeurs particulieres & déterminées : par exemple, 1000. Les *nombres concrets* ſont ceux qui expriment des grandeurs particulieres & déterminées : par exemple, 1000 toiſes, 1000 lieues, 100 hommes, 4550 livres.

II° Les *nombres complexes* ſont ceux qui contiennent pluſieurs eſpeces de quantités, comme des livres & des ſols; des toiſes & des pieds. Les *nombres incomplexes* ſont ceux qui ne contiennent qu'une même eſpece de quantité, par exemple, de toiſes.

III°. Un *nombre entier* eſt celui qui contient l'unité pluſieurs fois exactement; par exemple, 5, 9, 1. Un *nombre fractionnaire* ou une fraction, eſt celui qui contient une ou pluſieurs parties égales d'une unité. Par exemple, ſi on conçoit que l'unité eſt diviſée en douze parties égales, dont on prenne 5; ces cinq-douziemes feront une fraction, que l'on écrit en cette maniere, $\frac{5}{12}$.

Il faut donc deux nombres pour former une fraction, par exemple la fraction cinq-douziemes. L'un 5, placé au-deſſus, exprime combien l'on prend de parties égales du tout, qui eſt ici l'unité diviſée en 12 parties;

on

on l'appelle le *numérateur:* l'autre 12, placé au-dessous, marque en combien de parties le tout est divisé; on l'appelle le *dénominateur*.

## *SIGNES NUMÉRIQUES.*

14. OBSERVATION. Comme la *Science des Nombres* est extrêmement nécessaire à toutes sortes d'égards, il n'est point de nation qui n'ait imaginé des signes ou des caractères pour exprimer les différents nombres & pour faire aisément les calculs. Mais parmi ces signes ou ces caractères, ceux qui nous viennent des Arabes, sont incontestablement les plus commodes; & toutes les nations éclairées les ont généralement adoptés, du moins dans l'Europe, non seulement dans le commerce, mais encore dans les sciences & dans les beaux-arts. Ces caractères sont au nombre de dix, tels qu'on les voit ici; 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9: ils signifient zero, un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf. On les nomme *chiffres*. Le premier chiffre ne signifie rien, quand il est seul: mais quand il est joint à d'autres chiffres, il sert à augmenter la valeur de tous ceux qui le précedent; comme nous l'expliquerons bientôt. On nomme *chiffres positifs*, tous les chiffres différents du zero.

I°. Tous les hommes, dans leur enfance, commencent naturellement à compter par leurs doigts: delà vraisemblablement l'accord surprenant de tous les peuples, à l'exception des anciens Chinois & d'une petite nation de Thraces, à choisir le même système de numération par *progression décuple*; c'est-à-dire, à compter d'abord jusqu'à dix, pour avoir une *dixaine*: à recommencer ensuite en disant l'équivalent de dix plus un ou onze, dix plus deux ou douze, dix plus trois ou treize, & ainsi de suite jusqu'à vingt, pour avoir deux dixaines: à continuer ainsi par trois, quatre,

cinq dixaines, jusqu'à dix dixaines ou une *centaine*: à compter ensuite les centaines jusqu'à dix, pour avoir dix centaines ou un *mille*; & ainsi du reste.

II°. Un peuple sex-digitaire, au lieu de la progression décuple, auroit vraisemblablement adopté la *progression duo-décuple*; & il s'en seroit très-bien trouvé; c'est-à-dire qu'il auroit d'abord compté jusqu'à douze, pour avoir une douzaine ou une *premiere classe* A de nombres : qu'il auroit recommencé ensuite à dire douze plus un, douze plus deux, jusqu'à vingt-quatre, pour avoir deux douzaines : qu'il auroit repris ensuite deux douzaines plus un, trois douzaines plus un, onze douzaines plus douze ou douze douzaines, qu'il auroit représentées par un signe & par un nom propre à exprimer cette *seconde classe* B de nombres, laquelle auroit répondu à cent-quarante-quatre unités. Après quoi, il auroit repris cette seconde classe de nombres une fois, deux fois, douze fois, pour en former une *troisieme classe* C de nombres, laquelle eût valu douze fois la classe précédente ou 1728 unités.

Il auroit fallu simplement à ce peuple deux signes ou chiffres de plus; & en supposant que notre zero précédé de l'unité exprimât une douzaine ou leur premiere classe ou suite A, leur systême de numération auroit eu tous les avantages du nôtre; & il auroit eu de plus l'avantage d'admettre le plus grand nombre de diviseurs d'usage, entre un & douze, entre douze & soixante: ce qui seroit extrêmement commode en une foule d'occasions, par exemple, dans le calcul des heures, qui ont soixante minutes; dans le calcul des pieds, qui ont douze pouces; des pouces, qui ont douze lignes; dans le calcul des degrés du cercle, qui ont soixante minutes; des minutes, qui ont soixante secondes. Si un grand Monarque, ami des sciences & des arts, parvient jamais à la monarchie universelle dans le monde savant; ou il soumettra

le calcul à la progression duo-décuple ; ou il ordonnera que les principales mesures du tems, de l'étendue, des poids, aillent en progression décuple : ce dernier parti seroit le plus simple & le plus commode.

III°. Quant à la maniere de représenter les nombres par des signes écrits ; presque toutes les anciennes nations se sont accordées à y employer les caracteres de leur alphabet.

*Chez les Hébreux*, les neuf premieres lettres de l'alphabet servoient à exprimer les neuf premiers nombres, ou les unités : les neuf lettres suivantes exprimoient des dixaines : le reste de l'alphabet, avec quelques signes particuliers, exprimoit les centaines. Ainsi on avoit : aleph 1, beth 2, ghimel 3, dalet 4, he 5, vau 6, zain 7, het 8, teth 9, jod 10, kaph 20, kaph-aleph 21, lamed 30, mem 40, nun 50, nun-ghimel 53, samech 60, phe 70, sadé 80, coph 100, resch 200, sin 300, thau 400.

*Chez les Grecs*, on imita la méthode des Hébreux. Ils exprimerent les neuf premiers chiffres, par les lettres de leur alphabet, qui se trouverent analogues à celles de l'alphabeth hébreu (*) ; & quand ils n'eurent pas des caracteres correspondants à ceux de l'alphabet hébreu, au lieu d'employer le caractere suivant, ils aimerent mieux y substituer un signe particulier. Ainsi n'ayant point de lettre *vau* parmi eux, ils mirent en sa place un *sigma-tau* joints ensemble en cette maniere ϛ ; auquel ils donnerent le nom d'επισημον-υαυ, & qui signifie : signe qui tient la place du caractere *vau*. Au lieu donc de prendre les neuf premieres lettres, pour exprimer les neuf premiers chiffres ; ils expri-

(*) Etymologie. Alphabet ; d'αλφα & βητα, nom des deux premieres lettres des Grecs, qui répondent aux deux premieres lettres Aleph & Beth des Hébreux.

merent ces nombres par alpha 1, betha 2, gamma 3, delta 4, epsilon 5, sigma-tau 6, zeta 7, eta 8, teta 9; afin de continuer avec les Hébreux à désigner les dixaines par les caracteres suivants iota 10, kappa 20, lambda 30, mi 40, ni 50, qui répondent aux caracteres jod, kaph, lamed, mem, nun des Hébreux. Comme le reste de l'alphabet grec est fort différent de l'alphabet hébreu; les Grecs prirent le parti, pour ne pas causer trop d'embarras, de l'employer tel qu'il étoit, en intercalant entre leur seixieme & leur dix-septieme lettre, un signe en forme de broche pour exprimer le nombre 90. Ainsi on eut $\mu'$ égal à 40 ou $\mu' = 40$, $\nu' = 50$, $\xi' = 60$, $o' = 70$, $\varpi' = 80$, ϟ $= 90$, $\rho' = 100$, $\sigma' = 200$, $\tau' = 300$, $\upsilon' = 400$, $\varphi' = 500$, $\chi' = 600$, $\psi' = 700$, $\omega' = 800$. Un signe composé d'un pi dans un sigma renversé exprima 900. Sur quoi il faut remarquer que pour exprimer les nombres jusqu'à mille exclusivement, on mit un *accent aigu au-dessus des signes*; & que pour exprimer les milles, on mit l'accent aigu au-dessous des mêmes signes en cette maniere : $\alpha' = 1$; $\beta' = 2$; $\theta' = 9$; $\iota' = 10$; $\iota\alpha' = 11$; $\kappa' = 20$; $\kappa\gamma' = 23$; $\rho' = 100$; $\rho\lambda' = 130$ : ensuite, $\alpha_{,} = 1000$; $\beta_{,} = 2000$; $\iota_{,} = 10000$; $\kappa_{,} = 20000$; & ainsi du reste.

On se servit aussi quelquefois chez les Grecs, pour exprimer les nombres, de six lettres majuscules, qu'ils redoubloient jusqu'à quatre fois chacune : ces six lettres sont Ι = 1, Π = 5, Δ = 10, Η = 100, Χ = 1000, Μ = 10000. Ainsi on avoit ΙΙΙ = 3, ΠΙΙΙΙ = 9, ΔΔ = 20, ΔΔΔΠΙΙΙ = 38, ΗΗ = 200, ΗΗΗΔΙΙ = 312, ΧΧΗ = 2100, ΜΜ = 20000; & ainsi de suite. Chez les Grecs & chez les Hébreux, les lettres de l'alphabet sont aussi employées quelquefois pour exprimer par leur suite naturelle, l'ordre & le nombre des livres ou des chapitres ou des versets dans un ouvrage.

*Chez les Romains*, la numération se marqua aussi par

le moyen des lettres de l'alphabet, mais ſans aucune relation à l'ordre & à la ſuite de ces lettres. La lettre I ſignifia un : la lettre V ſignifia cinq : la lettre X ſignifia dix : la lettre L, cinquante ; la lettre C, cent ; la lettre D, cinq-cents ; la lettre M, mille ; & ainſi du reſte. Ces trois manieres d'exprimer les nombres, étoient fort embarraſſantes dans le calcul.

*Chez les Arabes*, on repréſenta tous les nombres poſſibles par dix ſignes particuliers, qui n'ont rien de commun avec les lettres de l'alphabet : ce ſont les dix chiffres dont nous venons de parler. On peut regarder le ſyſtême de numération arabique, comme l'un des chefs-d'œuvre de l'eſprit humain : mais ce ſyſtême eſt dû aux Indiens, de qui les Arabes l'ont emprunté, comme l'Europe l'a emprunté des Arabes.

### *SYSTÊME DE NUMÉRATION ARABIQUE.*

15. AXIOME. *Dans une ſuite de chiffres, la valeur d'un chiffre augmente en proportion décuple, en allant de droite à gauche.*

EXPLICATION. On eſt convenu (& c'eſt ici le fondement de toute l'Arithmétique) que chaque chiffre auroit à la fois & une valeur abſolue, & une valeur relative. La *valeur abſolue* d'un chiffre quelconque 2, par exemple, eſt celle qu'il a, étant conſidéré ſeul : la *valeur relative* du même chiffre, eſt celle qui lui convient à raiſon du rang qu'il tient dans une ſuite de chiffres.

| | |
|---|---|
| A. . . . . . . . . . . | 2 |
| B. . . . . . . . . . | 20 |
| C. . . . . . . . | 200 |
| D. . . . . . . | 2000 |
| E. . . . . . . | 20000 |

Par exemple, la valeur du chiffre 2, placé au dernier rang en A, eſt deux *unités*. La valeur du même chiffre 2, placé au ſecond rang en B, eſt deux *dixaines*. La valeur du même

chiffre 2, placé au troisieme rang en C, est deux *centaines*. La valeur du même chiffre 2, placé au quatrieme rang en D, est deux *mille*. La valeur du même chiffre 2, placé au cinquieme rang en E, est deux *dixaines de mille*. Et ainsi de suite à l'infini.

Par où l'on voit que, selon la convention dont nous parlons, & qui n'est qu'une *demande mathématique* évidemment possible (8); un même chiffre acquiert une valeur dix fois plus grande ou augmente en *proportion décuple*, à chaque pas qu'il fait, en allant de la droite vers la gauche. Car dans l'exemple précédent, deux dixaines valent dix fois, deux unités; deux centaines valent dix fois, deux dixaines; deux mille valent dix fois, deux centaines; deux dixaines de mille ou vingt mille valent dix fois, deux mille; & ainsi de suite à l'infini. On peut dire la même chose de tout autre chiffre, du 3, du 6, du 8; & ainsi des autres.

16. COROLLAIRE I. *Une unité d'un chiffre positif quelconque, vaut plus que tous les chiffres qui le suivent.*

EXPLICATION. Selon l'axiome précédent, le chiffre 1 vaut une dixaine en A, une centaine en B, mille en C, dix mille en D; & ainsi de suite: or la valeur du chiffre 1 est toujours & partout plus grande que celle de tous les chiffres qui le suivent, qui sont cependant les plus grands qu'il soit possible; comme on voit.

| | |
|---|---|
| A. | 19 |
| B. | 199 |
| C. | 1999 |
| D. | 19999 |
| *a.* | 69 |
| *b.* | 699 |
| *c.* | 6999 |
| *d.* | 69999 |

De même, une seule unité du chiffre 6, lequel renferme six unités, vaut

une dixaine en *a*, une centaine en *b*, mille en *c*, dix mille en *d*: une unité de ce chiffre 6 vaut donc encore plus que tous les chiffres qui le suivent, qui sont encore les plus grands qu'il soit possible.

17. COROLLAIRE II. *Chaque unité d'un chiffre vaut dix unités du chiffre qui le suit immédiatement.*

EXPLICATION. Soit le nombre A, égal à 4524. Selon l'axiome précédent, si je veux augmenter ce nombre A, de 10 unités B; je n'ai qu'à convertir dans le nombre A, le 2 en 3. Si je veux encore augmenter ce même nombre A, de 300 unités C; je n'ai qu'à convertir dans le nombre A, le 5 en 8. Si je veux encore augmenter ce même nombre A, de 2000 unités D; je n'ai qu'à convertir le 4 en 6. Le nombre M ou 6834, vaudra autant que tous les nombres inférieurs ABCD.

| | |
|---|---|
| M. . . . . . | 6834 |
| A. . . . . . . . | 4524 |
| B. . . . . . . . . | 10 |
| C. . . . . . . . | 300 |
| D. . . . . . . . | 2000 |

De même, selon l'axiome précédent, dans le nombre 37259; chaque unité du 3, vaut dix unités du 7; chaque unité du 7, vaut dix unités du 2; chaque unité du 2, vaut dix unités du 5; chaque unité du 5, vaut dix unités du 9. Les unités du 3, sont des dixaines de mille; les unités du 7, sont des mille; les unités du 2, sont des centaines; les unités du 5, sont des dixaines; les unités du 9, sont des unités simples.

18. COROLLAIRE III. *Un zero mis à la fin d'un nombre, rend ce nombre dix fois plus grand:* puisqu'il donne à tous les chiffres qui composent ce nombre, un rang plus avancé, où leur valeur relative est dix fois plus grande.

I°. Par le moyen d'un zero mis à la fin d'un nombre quelconque 4624, les unités 4, deviennent des dixaines; les dixaines 2, deviennent des centaines; les centaines 6, deviennent des mille; les mille 4, deviennent des dixaines de mille: ce nombre sera 46240.

II°. Par la même raison, *si à la suite d'un nombre, on met deux zeros; ce nombre devient cent fois plus grand:* si on met trois zeros, ce nombre devient mille fois plus grand; & ainsi de suite, toujours en proportion décuple.

III°. Si le chiffre ajouté à la fin d'un nombre, est un chiffre positif; il augmente ce nombre, comme le zero; & il l'augmente de plus, de toute sa valeur intrinseque. Par exemple, si au nombre 6 j'ajoute un zero, j'aurai 60; & si au lieu d'un zero, je mets 9, j'aurai 60 + 9 ou 69.

IV°. Par la raison contraire, *un zero retranché à la fin d'un nombre, rend ce nombre dix fois plus petit;* deux zeros retranchés, le rendent cent fois plus petit; trois zeros retranchés, le rendent mille fois plus petit; & ainsi de suite, toujours en raison décuple. Retranchez un zero au nombre 1000, le reste ne vaut plus que 100: retranchez encore un zero, le reste ne vaut plus que 10: retranchez encore un zero, le reste ne vaut plus que 1.

### *Tranches & expressions des chiffres.*

19. OBSERVATION. Quand un nombre est exprimé par une suite considérable de chiffres, *on divise les chiffres en tranches, qui contiennent chacune trois caractères*, excepté la premiere, qui peut n'en contenir que deux ou même qu'un seul. C'est en allant de droite à gauche que l'on partage le nombre en tranches, lesquelles expriment des unités, des mille, des

millions, des billions, des trillions, des quadrillions; des quintillions, des sextillions; & ainsi de suite. Quelques auteurs ont appellé ou appellent encore *milliard*, ce qu'on nomme aujourd'hui plus communément *billion*: la dénomination est différente; mais la valeur exprimée par les chiffres soumis à ces deux dénominations, est précisément la même. Voici un exemple général de cette division des chiffres en tranches.

| Trillions. | | Billions. | | | Millions. | | | Mille. | | | Unités. | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 9, | 6 | 7 | 0, | 3 | 8 | 4, | 6 | 3 | 2, | 3 | 0 | 4, |
| dixaines. | unités. | centaines. | dixaines. | unités. | centaines. | dixaines. | unités. | centaines. | dixaines. | unités. | centaines. | dixaines. | unités. |

I°. On peut bien juger, par ce que nous avons dit, que quoique chaque tranche contienne des centaines, des dixaines & des unités, cependant une tranche signifie des parties de nombre fort différentes. La tranche des millions marque des centaines, des dixaines & des unités de millions; la tranche des mille, marque des centaines, des dixaines & des unités de mille, & ainsi des autres.

II°. La dénomination propre à chaque tranche signifie un nombre, qui vaut mille fois plus que celui qui est exprimé par la tranche suivante. Un billion vaut mille millions. Un million vaut mille fois mille. Un mille vaut mille unités.

20. PROBLÊME I. *Exprimer en chiffres, des nombres énoncés dans le discours.*

SOLUTION. Soit le nombre énoncé, cinq cents quarante-sept millions, six cents vingt-trois mille, quatre cents soixante-neuf. Ce nombre équivaut à cinq cents

millions, quarante millions, sept millions, six cents mille, vingt mille, trois mille, quatre cents, soixante, neuf; comme on le voit marqué ici. Or, comme dans cette suite, les zeros ne servent qu'à faire garder aux *chiffres positifs* les rangs qu'ils doivent tenir pour conserver leur valeur; il s'ensuit qu'en supprimant les zeros & en écrivant tous les chiffres positifs sur une même ligne, on aura l'expression arithmétique du nombre énoncé dans le discours, 547623469.

| | | |
|---|---|---|
| 500, | 000, | 000 |
| . 40, | 000, | 000 |
| . 7, | 000, | 000 |
| . . | 600, | 000 |
| . . | . 20, | 000 |
| . . | . 3, | 000 |
| . . | . . | 400 |
| . . | . . | . 60 |
| . . | . . | . 9 |
| 547, | 623, | 469 |

Si dans le nombre énoncé il se trouve quelques nombres intermédiaires, supprimés dans quelque tranche, il faut mettre des zeros à leur place: afin de conserver aux chiffres précédents leur rang & leur valeur. Par exemple, soit le nombre énoncé, quatre cents millions, quarante mille, trois; dans lequel il n'est point fait mention des dizaines & des unités de millions, des centaines & des unités de mille, des centaines & des dizaines d'unités. En mettant les chiffres positifs à leur place, & en mettant un zero à la place de chaque nombre omis ou supprimé dans une tranche, vous aurez l'expression arithmétique du nombre énoncé dans le discours; ainsi que dans l'exemple

| | | |
|---|---|---|
| 400, | 000, | 000 |
| . 00, | 000, | 000 |
| . 0, | 000, | 000 |
| . . | 000, | 000 |
| . . | 40, | 000 |
| . . | . 0, | 000 |
| . . | . | 000 |
| . . | . | . 00 |
| . . | . . | 3 |
| 400, | 040, | 003 |

précédent où il n'y a point de semblable omission.

21. PROBLÊME II. *Enoncer dans le discours, des nombres exprimés en chiffres.*

SOLUTION. Divisez le nombre donné, en tranches des unités, des mille, des millions, & ainsi de suite : par là vous verrez aisément quelle est la qualité des chiffres à énoncer.

Il ne faut énoncer le nom propre à chaque tranche, qu'à la fin de cette tranche ; & il faut s'abstenir de nommer les rangs où il se trouve des zeros à la place des chiffres positifs. Par exemple, vous énoncerez ce nombre 908, 047, 024, en cette maniere : neuf cents huit *millions*, quarante-sept *mille*, vingt-quatre. Vous énoncerez aussi ce nombre, 70, 080, 000, 900, en cette maniere : soixante-dix *billions*, quatre-vingts *millions*, neuf cents : on ne fait ici aucune mention des mille ; parce qu'il n'y a aucun chiffre positif dans cette tranche.

## *LES QUATRE REGLES DE L'ARITHMÉTIQUE.*

22. OBSERVATION. Il y a quatre Opérations générales dans l'Arithmétique ; savoir, l'*Addition*, la *Soustraction*, la *Multiplication*, & la *Division*. Ces quatre Opérations sont le fondement de toutes les autres : car tous les calculs doivent toujours, en derniere analyse, se résoudre en calculs arithmétiques.

L'Addition, la Soustraction, la Multiplication & la Division peuvent avoir pour sujet ou des nombres tous homogenes & de même nature, & alors elles sont *incomplexes* ; ou des nombres hétérogenes & de différente nature, par exemple des livres & des sols, des toises & des pieds, des heures & des minutes, & alors elles sont *complexes*.

Pour donner plus de simplicité & d'intelligibilité à

tout le calcul arithmétique, nous diſtinguerons partout les opérations incomplexes, des opérations complexes : les premieres ſerviront à faire mieux entendre les dernieres.

## PARAGRAPHE PREMIER.

### *L'ADDITION.*

23. DÉFINITION. L'ADDITION eſt une opération par laquelle étant donnés tous les nombres partiels, on trouve le nombre total : ou bien, l'Addition eſt une opération par laquelle ayant pluſieurs nombres, on en trouve la *ſomme*. Elle conſiſte à trouver un tout, dont on connoît toutes les parties.

L'Addition incomplexe donne la ſomme de pluſieurs nombres homogenes : l'Addition complexe donne la ſomme de pluſieurs nombres, dans leſquels ſe trouvent des quantités hétérogenes.

### *L'ADDITION INCOMPLEXE.*

24. REGLE. *Pour faire l'Addition*, diſpoſez tous les nombres donnés, les uns ſous les autres ; enſorte que les unités répondent aux unités, les dixaines aux dixaines, les centaines aux centaines, les mille aux mille ; & ainſi de ſuite. Enſuite tirez une ligne au-deſſous de tous les nombres donnés, & obſervez ce qui ſuit.

| |
|---:|
| 4029 |
| 49 |
| 3026 |
| 7104 |

I°. Commencez par la colonne des unités à droite, & prenez-en la ſomme. Si cette ſomme peut être exprimée par un ſeul chiffre, écrivez ce chiffre ſous la colonne des unités. Mais ſi cette ſomme ne peut être exprimée que par deux chiffres, écrivez ſous la colonne des unités le dernier des deux chiffres, & re:

tenez le premier pour le joindre à la colonne des dixaines. Par exemple, si la somme de la colonne des unités est 24, & écrivez 4 sous la colonne des unités, & retenez 2 dixaines pour le joindre à la colonne des dixaines.

II°. Passez à la colonne des dixaines & prenez-en la somme, en y joignant ce que vous avez retenu de la colonne des unités. Si cette somme peut s'exprimer par un seul chiffre, vous l'écrirez sous cette colonne. Mais si cette somme renferme deux chiffres, vous écrirez sous cette colonne le dernier chiffre, & vous retiendrez le premier pour l'ajouter à la colonne des centaines.

III°. Vous opérerez de la même maniere sur la colonne des centaines, des mille, des dixaines de mille, des centaines de mille, des millions, & ainsi de suite, plaçant toujours le dernier chiffre sous la colonne dont vous prenez la somme, & retenant le premier chiffre pour le joindre à ceux de la colonne plus avancée vers la gauche, où il aura, comme il doit avoir, une valeur dix fois plus grande. (17.)

IV°. Quand dans quelques-unes des colonnes, par exemple dans la colonne des centaines, il ne se trouve aucun chiffre positif; pour lors on met un zero au-dessous, si l'on n'a rien retenu de la colonne précédente : mais si l'on a retenu quelque chose, il faut écrire sous cette colonne le chiffre qu'on a retenu.

V°. Si les nombres à additionner contenoient un trop grand nombre de chiffres, en telle sorte que le nombre résultant d'une seule colonne ne pût être exprimé que par trois chiffres; on partagera cette addition unique en deux additions, dont on prendra la somme séparément. Si on veut cependant ne faire qu'une seule addition, on écrira la valeur du dernier des trois chiffres sous sa colonne, & on portera la valeur des deux autres chiffres sur la colonne précé-

dente. Par exemple, si dans la colonne des unités, on avoit pour somme 124; on écriroit 4 sous la colonne des unités, & on porteroit 12 dixaines sur la colonne des dixaines.

DÉMONSTRATION. La démonstration de cette Opération est fondée sur cet axiome : *le tout est égal à toutes ses parties prises ensemble*. Les nombres qu'on additionne & dont on cherche la somme, sont les parties : le nombre ou la somme qui en résulte, est le tout. Dans un exemple quelconque, tel que celui qu'on voit ici, je démontre que la somme qui résulte de l'addition, est égale à la somme de tous les nombres donnés.

| | |
|---|---|
| | 8, 240, 364 |
| *Nombres* | 460, 723 |
| *donnés.* | 70 |
| | 40, 234 |
| | 620, 903 |
| *Somme.* | 9, 362, 294 |
| *Preuve.* | 1, 102, 110 |

I°. Les nombres donnés ne contiennent que des unités, des dixaines, des centaines, des mille, des dixaines de mille, des centaines de mille, des millions. Or, en observant la regle précédente, j'ai pris la somme de toutes les unités, de toutes les dixaines, de toutes les centaines, de tous les mille, de toutes les dixaines de mille, de toutes les centaines de mille, de tous les millions : donc j'ai pris toutes les parties des nombres donnés. Toutes les parties prises ensemble sont le Tout : donc j'ai pris le Tout, lequel est exprimé par la somme totale 9362294.

II°. Quant à ce que prescrit la regle, d'ajouter à la colonne précédente, le premier des deux chiffres qui expriment une colonne; cela est fondé sur ce que nous avons dit ailleurs, que la valeur des chiffres augmente en proportion décuple en allant de droite à gauche. (15 & 17.)

En faisant l'Addition dont il est ici question, j'ai trouvé dans la derniere colonne à droite, 14 unités: j'en ai placé 4 sous cette colonne; & j'en ai retenu 10 pour la colonne des dixaines, où je les ai exprimées par 1; parce que dans cette colonnes des dixaines, une unité vaut dix unités de la colonne qui la suit à droite. De même dans la colonne des dixaines, j'avois 19 unités: j'en ai placé 9 sous cette colonne, & j'en ai porté 10 sur la colonne des centaines, en disant, je porte 1; parce que dans cette colonne des centaines, une unité vaut dix unités de la colonne des dixaines. De même encore, dans la colonne des centaines, j'avois 22 unités qui valent des centaines; j'en ai placé 2 sous cette colonne, & j'en ai retenu 20 pour la colonne suivante, où je les ai exprimé par 2, qui valent deux mille. Et ainsi du reste. Donc, en observant la regle précédente, j'ai pris toutes les parties des nombres donnés, & j'ai exprimé toutes ces parties par un nombre total qui en représente la somme sans excès & sans défaut. C. Q. F. D.

25. REMARQUE. Si on demandoit par hasard, pourquoi l'on commence cette opération par la droite, plutôt que par la gauche; la raison en est, que les chiffres croissent en proportion décuple en allant de droite à gauche, & non en allant de gauche à droite. Il faut donc, dans cette opération, commencer par la derniere colonne à droite; afin que les sommes partielles, qui se trouvent assez souvent trop grandes pour être exprimées par un seul chiffre, puissent successivement rejetter leur premier chiffre sur la colonne précédente. C'est pour une semblable raison que l'on commence aussi la Soustraction & la Multiplication par la droite.

Par la raison contraire, on commence la Division par la gauche; afin que les portions trop petites d'un nombre, qui échappent au diviseur dans les premiers

rangs, puissent être en prise au même diviseur dans les rangs suivants, où leur valeur sera exprimée par des nombres dix fois plus grands dans leur énonciation; comme on le verra dans la suite.

### *Preuve de l'Addition.*

26. DÉFINITION. On nomme *preuve de l'Addition*, une opération par laquelle on se convainc qu'on a observé la regle précédente, & qu'on ne s'est point trompé en comptant.

Quand, après avoir fait une addition, on veut savoir si on ne s'est point trompé dans l'opération, *il faut ôter de la somme totale qu'on a trouvée, tous les membres additionnés;* & s'il ne reste rien à la fin de cette Soustraction, c'est une marque que l'Addition est exacte & bien faite : par cet axiome; *si à un Tout on retranche toutes ses parties, il doit ne rester rien.* Le tout est la somme qui résulte de l'Addition : les parties de ce tout, sont les nombres qui forment les colonnes correspondantes.

La preuve de l'Addition se fait en cette maniere. On commence par la premiere colonne à gauche, dont la somme doit être soustraite du premier chiffre ou des premiers chiffres qui répondent à cette colonne; & on écrit le reste au-dessous, s'il y a un reste, pour le joindre par la pensée au chiffre suivant de la somme totale. On opere de même pour les colonnes suivantes; & *à la fin de la preuve, il doit rester zero.* Dans cette opération, on commence par les chiffres plus avancés vers la gauche : afin que les restes des chiffres qui ont plus de valeur, puissent refluer successivement sur les chiffres suivants qui ont une valeur moindre.

Ainsi pour faire la preuve de l'Addition précédente; de 9 j'ôte 8; reste 1, qui joint avec le 3 vaut 13. De 13 j'ôte $2+4+6$ qui font 12; reste 1, qui joint

joint avec le 6 vaut 16. De 16 j'ôte la colonne correspondante 4 + 6 + 4 + 2 ou 16 ; reste zero. De 2 je n'ôte rien ; reste 2, qui joint avec l'autre 2 vaut 22. De 22 j'ôte la colonne correspondante 21 ; reste 1, qui joint avec le 9 vaut 19. De 19 j'ôte la colonne correspondante 18 ; reste 1, qui joint avec le 4 vaut 14. De 14 j'ôte la colonne correspondante 14 ; reste zero ; & l'opération est exacte.

Il ne faut pas confondre la démonstration de l'addition, avec la preuve de l'addition : la démonstration fait voir que la regle est infaillible ; la preuve fait voir qu'on a observé cette regle. La preuve est proprement un examen, une *épreuve* de l'opération ; pour découvrir si elle a été faite conformément à la regle infaillible.

27. REMARQUE. La Soustraction, la Multiplication & la Division, ont chacune une *preuve* ou épreuve destinée à en constater l'exactitude. La preuve de l'Addition est la soustraction ; la preuve de la Soustraction est l'addition ; la preuve de la Multiplication est la division ; la preuve de la Division est la multiplication ; comme on le verra par la suite. Ainsi ces regles se servent réciproquement de preuve.

Mais dans ces opérations on se dispense assez communément de faire la preuve par l'opération contraire, quand on a l'habitude du calcul arithmétique : on se borne à revoir ou à refaire la même opération en une autre maniere. Par exemple, dans l'Addition, on se borne à faire une seconde fois la même addition, en prenant les colonnes de bas en haut, après les avoir prises auparavant de haut en bas.

## *L'ADDITION COMPLEXE.*

28. RÈGLE. *On observe dans l'Addition des nombres complexes, la même regle que dans l'Addition des nombres incomplexes ;* & on commence par les plus petites

especes en allant aux plus grandes. Sur quoi il faut remarquer qu'en passant d'une espece plus petite à une plus grande, comme des deniers aux sols; il faut voir combien de fois celle à laquelle on passe, est contenue dans la somme des plus petites, n'écrivant que le reste, s'il y en a, sous la moindre espece, & retenant le nombre des fois que la grande espece est contenue dans la somme des plus petites, pour ajouter ce nombre à la plus grande.

Par exemple, si on passe des deniers aux sols, & qu'il y ait 38 deniers; comme cette somme de 38 deniers contient trois sols & deux deniers de plus, on écrira 2 sous les deniers, & on retiendra 3 pour les ajouter aux sols. De même, si en passant des sols aux livres on trouve 47 sols; comme cette somme contient 2 livres & 7 sols, on écrira 7 sous la colonne des sols, & on retiendra 2 pour les ajouter aux livres.

*Premier Exemple.*

| | Livres, | sols, | den. |
|---|---|---|---|
| | 42 | 18 | 8 |
| | 125 | 4 | 11 |
| | 72 | 16 | 9 |
| | 1, 000 | 6 | 10 |
| Somme. | 1, 241 | 7 | 2 |
| Preuve. | 0, 112 | 3 | 0 |

*Second Exemple.*

| | Toises, | pieds, | pouces. |
|---|---|---|---|
| | 42 | 5 | 3 |
| | 12 | 2 | 7 |
| | 9 | 0 | 11 |
| | 24 | 4 | 8 |
| Somme. | 89 | 1 | 5 |
| Preuve. | 12 | 2 | 0 |

Par exemple encore, 29 pouces font 2 pieds & 5 pouces: je pose 5 sous la colonne des pouces; & je retiens 2, que je porte à la colonne des pieds. Prenant la somme des pieds, j'ai 13 pieds, qui font 2 toises & 1 pied: je pose 1 sous la colonne des pieds, & je porte 2 à la colonne des toises. Après quoi, le reste de l'addition est une addition incomplexe.

Il faut faire la même chose, quand opérant sur d'autres quantités complexes, on passe des quantités plus petites aux quantités plus grandes, par exemple; des minutes aux heures, des heures aux jours; des onces aux livres; des lignes aux pouces, des toises aux lieues; & ainsi du reste.

La *preuve* de l'Addition complexe, se fait comme dans l'Addition incomplexe (26), en ôtant de chaque chiffre de la somme totale, les chiffres supérieurs qui lui répondent. Par exemple, dans l'addition des toises, du chiffre 8, ôtez $2 + 1 + 4$ qui font 7; reste 1, qui joint par la pensée avec le chiffre 9, vaut 19. De 19, ôtez $2 + 2 + 9 + 4$ qui font 17; reste 2 toises, qui font 12 pieds. On aura donc dans la colonne des pieds, 13 pieds; dont il faudra retancher $5 + 2 + 4$ pieds, qui font 11 pieds: restent 2 pieds qui valent 24 pouces dans la colonne suivante où il y en a 5. De 29 pouces ôtez $3 + 7 + 11 + 8$, qui font 29 pouces: il ne restera rien; & l'addition est exacte & bien faite.

## PARAGRAPHE SECOND.

### *LA SOUSTRACTION.*

29. DÉFINITION. LA *Soustraction* est une opération par laquelle, étant donnés deux nombres, on cherche leur différence: ou bien la Soustraction est une opération par laquelle on ôte un moindre nombre d'un plus grand. Le nombre qui résulte de la soustraction est appellé *reste* ou *différence*.

Par exemple, si de 6 on ôte 3, c'est une soustraction. Cette opération consiste à chercher une *partie inconnue* d'un Tout, dont on connoît déjà l'*autre partie*, aussi bien que le Tout, qui ne contient que ces deux par-

ties. Dans l'exemple proposé le Tout est *6* : la partie connue est *3* : l'autre partie de ce Tout est celle que l'on cherche, savoir *3* ; qui est la différence entre les deux nombres donnés.

## *LA SOUSTRACTION INCOMPLEXE.*

30. AXIOME. *Lorsqu'on ajoute le même nombre à deux autres nombres, la différence de ces nombres est toujours la même, avant & après l'addition.*

Par exemple, si j'ajoute 10 à 4 & à *6*, la différence des sommes augmentées 14 & 16 est la même que celle des nombres primitifs 4 & *6*.

31. REGLE. *Pour faire la Soustraction*, il faut écrire le nombre que l'on veut soustraire au-dessous de l'autre, ensorte que les unités de l'un répondent aux unités de l'autre, les dixaines aux dixaines, les centaines aux centaines, les mille aux mille, & ainsi de suite. Il faut ensuite tirer une ligne au-dessous des deux nombres : après quoi,

I°. On commence par ôter les unités du nombre à soustraire, des unités de l'autre. Il peut arriver trois cas : ou que le chiffre inférieur qui marque les unités, *soit plus petit* que le chiffre supérieur ; & alors on écrit le reste au-dessous dans le même rang : ou que les deux chiffres *soient égaux* ; & alors on met un zero au-dessous ; parce que le caractère inférieur étant ôté de l'autre, il ne reste rien : ou que le caractère inférieur *soit plus grand* que le supérieur : pour lors il faut ajouter une dixaine au chiffre supérieur ; ensuite, de la somme composée de cette dixaine & de ce chiffre, ôter celui qui est au-dessous, & écrire le reste sous la ligne dans le même rang.

II°. Comme on a ajouté une dixaine au nombre dont on veut soustraire, il faut ajouter tout autant au nombre que l'on doit soustraire. C'est pourquoi il faut

ſuppoſer que dans ce dernier nombre le chiffre du rang précédent eſt augmenté d'une unité, laquelle eſt égale à la dixaine ajoutée au chiffre plus reculé d'un rang vers la droite dans le nombre ſupérieur; puiſque chaque unité d'une colonne vaut dix unités de la colonne ſuivante. (17.)

III°. En opérant de même ſur toutes les colonnes, on prendra la différence des deux nombres dans leurs unités, dans leurs dixaines, dans leurs centaines, dans leurs mille, dans leurs dixaines de mille, dans toutes leurs parties: en prenant la différence de toutes les parties des deux nombres donnés, il eſt évident qu'on prend la différence des deux nombres. Cette différence ou ce reſte, jointe au nombre qu'on ſouſtrait, doit égaler le nombre dont on ſouſtrait: puiſque le nombre qu'on ſouſtrait & ce reſte, ſont les deux parties du nombre ſur lequel ſe fait la ſouſtraction.

Voici deux exemples de cette regle. Dans le premier, de 7 ôtez 6; reſte 1. Ajoutez une dixaine au 2, & de 12 ôtez 3; reſtent 9. Ajoutez au 3 une unité qui vaut une dixaine dans le rang ſuivant; & de 4 ôtez 4: reſte zero. De 2 + 10, ôtez 4: reſtent 8. Ajoutant une unité au 7, de 9 ôtez 8: reſte 1.

Additionnez le nombre à ſouſtraire avec le reſte: vous aurez une ſomme égale au nombre dont il falloit ſouſtraire. C'eſt la preuve de la Souſtraction.

| *Premier Exemple.* | | *Second Exemple.* | |
|---|---|---|---|
| Du nombre | 92, 427: | | 497, 245 |
| ſouſtrayez . . . | 74, 336. | | 88, 378 |
| Reſte. | 18, 091. | Reſte. | 408, 867. |
| Preuve. | 92, 427. | Preuve. | 497, 245 |

DÉMONSTRATION. On se propose dans la Soustraction de trouver le reste du nombre dont on veut soustraire, après en avoir ôté le nombre à soustraire. Or, en suivant la regle proposée, il est évident qu'on trouvera ce reste : puisqu'en suivant cette regle, on prend le reste des unités, le reste des dixaines, le reste des centaines, le reste des mille; & ainsi de suite. Donc on trouvera le reste du nombre dont il faut soustraire, lequel reste exprime l'excès de ce nombre sur l'autre que l'on vouloit soustraire. En suivant la regle, on a pris le reste de toutes les parties : donc on a pris le reste du Tout. C. Q. F. D.

32. PREUVE. La *preuve de la Soustraction* se fait par l'addition : c'est-à-dire, qu'il faut ajouter le nombre à soustraire, avec le reste où la différence du nombre supérieur : & la somme des deux sera égale au nombre dont on soustrait, si la soustraction est bien faite. La raison en est évidente : le nombre à soustraire & le reste sont les deux parties du nombre total dont on veut soustraire : donc ces deux parties prises ensemble, doivent être égales à leur Tout. C. Q. F. D.

## *LA SOUSTRACTION COMPLEXE.*

33. REGLE. *Si la Soustraction contient des nombres complexes*, il faut d'abord opérer sur les plus petits, & les extraire les uns des autres. Si le nombre duquel on extrait, étoit surpassé par l'autre; il faut ajouter au premier le valeur d'une des quantités précédentes, &, après la Soustraction, ajouter à l'autre nombre dans la colonne suivante une unité : comme on le verra dans les deux exemples suivants, d'après lesquels on peut s'en proposer d'autres semblables en toute espece de nombres complexes.

*Premier Exemple.*

| | Toiſes, | pieds, | pouc. |
|---|---|---|---|
| Du nombre | 348 | 2 | 6 |
| ſouſtrayez | 237 | 2 | 10 |
| Reſte. | 110 | 5 | 8 |
| Preuve. | 348 | 2 | 6 |

*Second Exemple.*

| | Livres, | ſols, | den. |
|---|---|---|---|
| Du nombre | 123 | 6 | 3 |
| ſouſtrayez | 97 | 12 | 8 |
| Reſte. | 25 | 13 | 7 |
| Preuve. | 123 | 6 | 3 |

I°. Dans le premier exemple, je ne puis pas ôter ou ſouſtraire 10 pouces, de 6 pouces: j'ajoute la valeur d'une des unités précédentes 12 pouces, à ce nombre 6; & j'ai 18 pouces, d'où je ſouſtrais 10, ce qui me donne un reſte 8 que j'écris ſous cette colonne.

Comme j'ai ajouté 12 pouces ou un pied au nombre ſupérieur; il faut, pour rétablir leur différence primitive (30), ajouter la même grandeur au nombre inférieur; & alors ce nombre inférieur aura 3 pieds, qui ne peuvent pas être ſouſtraits de 2 pieds. J'ajoute donc au nombre ſupérieur 2, la valeur d'une unité précédente qui eſt une toiſe ou 6 pieds; & j'ai 8 pieds, d'où ſouſtrayant 3 pieds, j'ai pour reſte 5 pieds. En paſſant enſuite aux toiſes, où la ſouſtraction devient incomplexe, j'ajoute une toiſe au nombre inférieur; & j'ai dans ce nombre, 8 au lieu de 7.

II°. Dans le ſecond exemple, j'ajoute à la ſomme des deniers dans le nombre ſupérieur, la valeur d'une unité précédente qui vaut 12 deniers; j'ajoute à la ſomme des ſols, la valeur d'une unité précédente qui vaut 20 ſols.

III°. Si j'avois à faire une ſouſtraction ſur des jours, des heures, des minutes; j'ajouterois dans le nombre ſupérieur, à la ſomme des minutes, la valeur d'une unité précédente qui vaut 60 minutes; j'ajouterois à la ſomme des heures, la valeur d'une unité précédente

ou d'un jour qui vaut 24 heures ; & ainsi du reste.

IV°. Pour faire la preuve, additionnez le nombre à soustraire avec le reste ou la différence : si la soustraction est bien faite, la somme de ces deux nombres doit égaler le nombre dont il falloit soustraire. Dans le second exemple 8 + 7 deniers font 15 deniers, ou un sol & trois deniers : je pose 3 deniers sous la colonne des deniers, & je porte 1 dans la colonne des sols. Ensuite 1 + 12 + 13 font 26 sols, ou une livre & 6 sols : je pose 6 sols sous la colonne des sols, & je porte 1 dans la colonne des livres. Après quoi, 1 + 7 + 5 font 13 ; je pose 3 & porte 1 sur la colonne plus avancée. Enfin 1 + 9 + 2 font 12 que j'écris ; & l'opération est finie & exacte.

## PARAGRAPHE TROISIEME.

### *LA MULTIPLICATION.*

34. DÉFINITION. LA *Multiplication* est une opération, par laquelle étant donnés deux nombres, le Multiplicande & le Multiplicateur, on en trouve un troisieme qui doit être au multiplicande comme le multiplicateur est à l'unité. Le nombre qu'il faut multiplier, est le *multiplicande* : le nombre par lequel on multiplie, est le *multiplicateur* : le nombre qui naît de la multiplication, est le *produit*. Par exemple, 5 multiplié par 3 donne 15. Le produit 15, contient autant de fois le multiplicande 5 ; que le multiplicateur 3 contient de fois l'unité.

Dans la table suivante, $5 \times 4 = 20$, par exemple, signifie que cinq multipliés par quatre, ou cinq fois quatre, valent vingt. De même $9 \times 9 = 81$, marque que neuf fois neuf font 81 ; & ainsi du reste.

TABLE POUR LA MULTIPLICATION. (II.)

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | × | 4 | = | 20 | 8 | × | 4 | = | 32 |
| 5 | | 5 | | 25 | 8 | | 5 | | 40 |
| 5 | | 6 | | 30 | 8 | | 6 | | 48 |
| 5 | | 7 | | 35 | 8 | | 7 | | 56 |
| 5 | | 8 | | 40 | 8 | | 8 | | 64 |
| 5 | | 9 | | 45 | 8 | | 9 | | 72 |
| 6 | × | 4 | = | 24 | 9 | × | 4 | = | 36 |
| 6 | | 5 | | 30 | 9 | | 5 | | 45 |
| 6 | | 6 | | 36 | 9 | | 6 | | 54 |
| 6 | | 7 | | 42 | 9 | | 7 | | 63 |
| 6 | | 8 | | 48 | 9 | | 8 | | 72 |
| 6 | | 9 | | 54 | 9 | | 9 | | 81 |
| 7 | × | 3 | = | 21 | 12 | × | 12 | = | 144 |
| 7 | | 4 | | 28 | 12 | | 11 | | 132 |
| 7 | | 5 | | 35 | 12 | | 10 | | 120 |
| 7 | | 6 | | 42 | 12 | | 9 | | 108 |
| 7 | | 7 | | 49 | 12 | | 8 | | 96 |
| 7 | | 8 | | 56 | 12 | | 7 | | 84 |
| 7 | | 9 | | 63 | 12 | | 6 | | 72 |

## *LA MULTIPLICATION INCOMPLEXE.*

35. OBSERVATION. Il y a deux ſortes de Multiplications incomplexes, la ſimple & la compoſée. La *Multiplication ſimple* eſt celle dont le multiplicateur eſt exprimé par un ſeul chiffre : telle eſt la multiplication de 764 par 6. La *Multiplication compoſée* eſt celle dont le multiplicateur contient pluſieurs caractères, comme ſi on multiplie 664 par 25 ou par 325.

36. AXIOME. *Le produit de deux chiffres quelconques, comme 4 & 2, eſt toujours le même ; ſoit qu'on mul-*

*tiplie le premier par le second, ou le second par le premier.* Cette proposition est évidente, & peut être placée au rang des axiomes : nous en donnerons cependant une démonstration géométrique dans l'Algebre. (93.)

*Multiplication simple.*

37. Regle. *Quand on veut multiplier un nombre par un multiplicateur qui ne contient qu'un seul chiffre;* il faut écrire le multiplicande, & mettre le multiplicateur au-dessous : puis ayant tiré une ligne sous les deux nombres, on commencera cette opération, comme les précédentes, par la droite ; c'est-à-dire qu'on multiplie d'abord le chiffre du multiplicande qui est au rang des unités, par le multiplicateur.

Si le produit de ce chiffre peut s'exprimer par un seul caractère ; on l'écrit sous le rang des unités. Mais si ce produit ne peut être marqué que par *deux chiffres;* on met le dernier sous le rang des unités, & on retient le premier pour l'ajouter au produit des dixaines, sur lesquelles on opere de la même maniere, comme aussi sur les centaines, sur les milles, sur les millions ; & ainsi de suite. Par-là on prendra le produit de toutes les parties du multiplicande.

| *Premier Exemple.* | | *Second Exemple.* | |
|---|---|---|---|
| Multiplicande. | 912789 | Multiplicande. | 763478 |
| Multiplicateur. | 3 | Multiplicateur. | 5 |
| Produit. | 2738367 | Produit. | 3817390 |

Dans la multiplication simple, on peut renverser l'ordre, & multiplier le multiplicateur par le multiplicande : le produit sera le même (93). Dans le premier exemple précédent, en multipliant 3 par 912789 ; je dirai, 9 fois 3 font 27 : je pose 7 & retiens 2 que je

porte au rang précédent où ils vaudront deux dixaines ou 20. Ensuite, 8 fois 3 font 24 & 2 que je porte font 26 : je pose 6 & je retiens 2. Après cela, 7 fois 3 font 21, & 2 retenus font 23 : je pose 3 & retiens 2. Ensuite, 2 fois 3 font 6, & 2 retenus font 8. Ensuite une fois 3 fait 3 : enfin 9 fois 3 font 27; & l'opération est finie.

### *Multiplication composée.*

38. REGLE. *Lorsque le multiplicateur est composé de plusieurs caractères ; pour faire la Multiplication* :

I°. On multiplie d'abord chaque chiffre du multiplicande, par le chiffre qui est au rang des unités du multiplicateur ; selon la regle de la multiplication simple.

II°. On multiplie de même le multiplicande entier, par le chiffre qui est au rang des dixaines du multiplicateur; observant de mettre le dernier caractère de ce second produit au rang des dixaines.

III°. S'il y a plus de deux chiffres au multiplicateur, on continue de multiplier tout le multiplicande par chacun des chiffres du multiplicateur, & de mettre le dernier chiffre de chaque produit au rang du chiffre par lequel on multiplie. Les multiplications particulieres étant faites, on additionne tous les produits qui en viennent ; & la somme résultante est le produit total.

| *Premier Exemple.* | | *Second Exemple.* | |
|---|---|---|---|
| Multiplicande. | 321 | Multiplicande. | 25729 |
| Multiplicateur. | 412 | Multiplicateur. | 32 |
| | 642 | | 51458 |
| | 321 | | 77187 |
| | 1284 | | |
| Produit. | 132252 | Produit. | 823328 |

DÉMONSTRATION. I°. La regle prescrit de *multiplier chaque chiffre du multiplicande, par chaque chiffre du multiplicateur.* Il est évident qu'en suivant cette regle on trouvera le produit des unités, des dixaines, des centaines, des milles, & de tous les chiffres suivans du multiplicande; & par conséquent on aura le produit du multiplicande entier par tous les chiffres successifs du multiplicateur.

II°. La regle prescrit d'*écrire le dernier chiffre de chaque produit, au rang du chiffre par lequel on le multiplie :* la raison n'en est pas moins évidente. Chaque unité du chiffre, qui est par exemple au rang des dixaines du multiplicateur, vaut dix fois la somme du multiplicande. Pour exprimer cette valeur, il faut donc que le dernier chiffre du produit, soit placé sous la colonne des dixaines : sans quoi il n'exprimeroit pas les dixaines qu'il doit exprimer. De même chaque unité du chiffre, qui est au rang des centaines du multiplicateur, vaut cent fois la somme du multiplicande: donc, pour exprimer cette somme, il faut que le produit soit écrit sous le rang des centaines; puisque c'est de centaines qu'il s'agit. Il en est de même des milles, des dixaines de mille, des centaines de mille, des millions, & ainsi du reste.

III°. Dans l'exemple proposé, où il falloit multiplier 321 par 412; j'ai pris tout le multiplicande autant de fois que le marquent les unités du multiplicateur, autant de fois que le marquent les dixaines du multiplicateur, autant de fois que le marquent les centaines du multiplicateur : donc j'ai multiplié le multiplicande par tout le multiplicateur; donc j'ai pris tout le multiplicande autant de fois que le marque le multiplicateur; donc j'ai rendu le multiplicande 412 fois plus grand qu'il n'étoit, comme le multiplicateur est 412 fois plus grand que l'unité. C. Q. F. D.

39. REMARQUE I. On voit aisément que *la Multipli-*

*cation n'est qu'une espece d'addition*, dont les nombres à ajouter sont égaux. Par exemple, multiplier 365 par 240, c'est la même chose que si l'on écrivoit 365 autant de fois qu'il est marqué par 240, c'est-à-dire, deux cents quarante fois; & qu'ensuite l'on fît l'addition de ces nombres placés les uns sous les autres : ce qui seroit fort long. C'est pourquoi l'on a inventé la Multiplication, qui est une maniere abrégée de faire cette sorte d'addition.

40. REMARQUE II. Comme la preuve de l'Addition se fait par la Soustraction, & la preuve de la Soustraction par l'Addition; de même *la preuve de la Multiplication se fait par la Division* : & la preuve de la Division par la Multiplication. Pour savoir si la multiplication a été bien faite, il faut diviser le produit par le multiplicateur. Le quotient doit être égal au multiplicande; puisque ce que la somme primitive a acquis par la multiplication, elle le perd par la division. Dans la pratique, on se borne communément à revoir ou à refaire la multiplication.

### *Usage de la Multiplication.*

41. COROLLAIRE. *La Multiplication sert, entr'autres choses, à réduire les grandes especes en petites* : par exemple, les lieues en toises; les toises en pieds; les livres en sols; les jours en heures. Il faut pour cela multiplier les grandes especes par un nombre qui exprime combien de fois la petite espece est contenue dans la grande.

Ainsi, si l'on veut réduire 54 pieds en pouces, on multipliera 54 par 12 : parce qu'il y a 12 pouces dans un pied. Si l'on veut réduire 30 jours en heures, l'on multipliera 30 par 24. Si l'on veut réduire 24 livres en sols, on multipliera 24 par 20. Si l'on veut réduire 13 lieues en toises, on multipliera 13 par 2287, ou 2287 par 13.

## *Maniere d'abréger la Multiplication.*

42. REMARQUE. *On peut abréger la pratique de la Multiplication, en certains cas :* par exemple,

I°. Quand le multiplicateur eſt ſimplement l'unité ſuivie d'un ou de pluſieurs zeros; il n'y a qu'à écrire le multiplicande, & mettre à la fin autant de zeros qu'il y en a au multiplicateur. $740 \times 100 = 74000$.

II°. Quand il y a au multiplicateur des chiffres différens de l'unité, ſuivis d'un ou de pluſieurs zeros; il faut multiplier le multiplicande par les chiffres poſitifs du multiplicateur, & mettre les zeros à la fin de la ſomme totale des produits particuliers additionnés. $45 \times 600 = 27000$.

III°. Quand il y a des chiffres poſitifs ſuivis de zeros, tant à la fin du multiplicande qu'à la fin du multiplicateur; il faut faire la multiplication comme s'il n'y avoit point de zeros à la fin ni de l'un ni de l'autre, & ajouter au produit total tous les zeros du multiplicateur & du multiplicande. Mais il faut ſe ſouvenir qu'il ne s'agit ici que des zeros qui ſont à la fin de tous les chiffres poſitifs; car on doit opérer ſur les autres comme ſur des chiffres poſitifs. Ainſi $207000 \times 600 = 124200000$.

EXPLICATION. On entendra les raiſons de toutes ces manieres abrégées de faire la Multiplication; ſi l'on fait attention qu'en mettant un zero à la fin d'un nombre, on rend ce nombre dix fois plus grand; & qu'en mettant deux zeros, on le rend cent fois plus grand, & ainſi de ſuite.

Par exemple, pour multiplier 560 par 300, je multiplie le *6* & le 5 par le multiplicateur 3; ce qui donne 168 : cette ſomme eſt mille fois plus petite que le véritable produit. Or, en écrivant à la fin le zero du multiplicateur, & les deux zeros du multiplicande; je la rends mille fois plus grande, & par conſéquent

égale au vrai produit (18). Il en est de même des autres manieres d'abréger la multiplication.

Nous n'avons parlé que de la multiplication des nombres incomplexes : nous parlerons de celle des nombres complexes après la division ; parce que nous aurons besoin de la division pour trouver le produit de ces sortes de nombres.

## PARAGRAPHE QUATRIEME.

### *LA DIVISION.*

43. DÉFINITION. LA *Division* est une opération par laquelle, étant donnés deux nombres, le Dividende & le Diviseur, on en trouve un troisieme qui doit être au dividende, comme l'unité est au diviseur. Le nombre qu'il faut diviser, s'appelle le *Dividende :* le nombre par lequel on divise, est le *Diviseur :* le nombre qui naît de la division, s'appelle *Quotient*, qui exprime combien de fois le diviseur est contenu dans le dividende. Par exemple, 15 divisé par 3 donne 5. Le quotient 5, est contenu dans le dividende 15, autant de fois que l'unité est contenue dans le diviseur 3.

### *LA DIVISION INCOMPLEXE.*

44. OBSERVATION. Il y a deux sortes de division incomplexe, la simple & la composée. La *Division simple* est celle dont le diviseur ne contient qu'un seul chiffre. La *Division composée* est celle dont le diviseur contient plusieurs chiffres. Nous donnerons bientôt les regles de la multiplication & de la division des nombres complexes : il ne s'agit maintenant que des nombres incomplexes.

I°. *Pour faire la Division*, écrivez le diviseur à côté

du dividende vers la droite ; & tirez ſous l'un & l'autre une ligne, que vous couperez par une perpendiculaire menée entre le dividende & le diviſeur, pour les ſéparer. En faiſant la Diviſion, placez ſucceſſivement les chiffres au quotient ſous le diviſeur, en allant de gauche à droite, à meſure que vous les trouverez. Il y aura autant de chiffres au quotient, qu'il y a de membres au dividende.

II°. *Le chiffre qu'on deſtine ou qu'on met au quotient pour un des membres, ne doit jamais être plus grand que 9.* Car s'il étoit plus grand que 9, même d'une ſeule unité, il vaudroit 10 ; & en ce cas il exprimeroit un nombre qui devroit être placé, non au rang auquel on le deſtine, mais au rang qui le précede (15). Ou bien, ſi le chiffre qu'on deſtine au quotient pouvoit valoir 10, ou une unité d'un chiffre plus avancé vers la gauche ; il faudroit que le nombre dont il eſt quotient, valût une unité d'un chiffre plus avancé vers la gauche : or un nombre ne peut jamais valoir une unité d'un tel chiffre (16) : donc le chiffre qu'on deſtine au quotient, ne peut jamais être plus grand que 9.

III°. Si le premier chiffre du dividende vers la gauche eſt plus grand, ou auſſi grand que le diviſeur ; *ce premier chiffre fait un membre de la Diviſion, & chaque chiffre ſuivant en eſt un nouveau membre.* Si ce premier chiffre eſt plus petit que le diviſeur, le premier membre de la Diviſion ſera formé des deux premiers chiffres du dividende.

La Diviſion ſimple eſt très-facile : ce que nous allons en dire préparera à l'intelligence de la Diviſion compoſée, qui eſt un peu plus difficile.

*Diviſion ſimple.*

45. Regle. *Pour faire la Diviſion ſimple ; ou pour diviſer un nombre par un ſeul chiffre :*

I°. On commence à chercher combien de fois le

diviſeur

diviſeur eſt contenu dans le premier membre du dividende, *pour avoir un quotient ;* & on écrit ſous le dividende le chiffre qui exprime combien de fois il y eſt contenu.

II°. On multiplie le diviſeur par le chiffre qu'on vient d'écrire au quotient, *pour en avoir le produit.*

III°. Quand on a trouvé ce produit, on le ſouſtrait de ce premier membre du dividende, *pour chercher un reſte ;* & on écrit au-deſſous le reſte, s'il y en a, pour le joindre par la penſée avec le ſecond membre du dividende, ſur lequel on opere comme ſur le premier, pour en avoir le quotient. On fait la même choſe pour les membres ſuivans.

Si quelqu'un des membres qui ſuivent le premier ſe trouvoit plus petit que le diviſeur, on écrit zero au quotient ; & le membre moindre que le diviſeur, ſe joint avec le chiffre qui ſuit dans le dividende, pour former le membre ſuivant. Soit le nombre 9692, à diviſer par 4.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Dividende. | 9, 692 | 4 | Diviſeur. |
| | 1, 010 | 2, 423 | Quotient. |
| | | 4 | |
| Preuve. | 9, 692 | 9, 692 | Produit |

EXPLICATION. Je diviſe d'abord le *prémier membre* du dividende 9, qui exprime des milles : & je dis en 9 mille combien de fois 4 mille ; ou plus ſimplement, en 9 combien de fois 4? Il y eſt 2 fois. Je mets au quotient 2 qui exprimera des milles. Je multiplie le diviſeur 4 par ce premier chiffre trouvé 2 : le produit eſt 8. J'extrais 8 de 9 ; & j'écris le reſte 1, ſous le 9.

Je joins par la penſée le reſte 1, qui exprime un

E

mille, au chiffre ſuivant 6, qui exprime des centaines: j'ai donc pour *ſecond membre* de la diviſion 16 centaines à diviſer par 4 centaines. Je dis : en 16 combien de fois 4 ? Il y eſt 4 fois. Je place au quotient 4, qui exprimera des centaines. Je multiplie le diviſeur 4 par le chiffre trouvé 4 : le produit eſt 16, qui, extrait du membre à diviſer 16, donne pour reſte zero.

Je paſſe au *troiſieme membre* de la diviſion, lequel eſt 9 dixaines que je diviſe par 4 dixaines. Je dis : en 9 combien de fois 4? Il y eſt 2 fois. J'écris au quotient 2, qui exprimera des dixaines. Le diviſeur 4 multiplié par ce chiffre 2, donne pour produit 8; lequel produit 8 étant extrait de 9, il reſte 1, que j'écris ſous le 9 pour le joindre avec le dernier chiffre du dividende.

Ce reſte 1 eſt une dixaine, qui jointe au 2, vaut 12 unités : c'eſt le *quatrieme membre* de la diviſion, qu'il me reſte à diviſer par 4. Je dis encore : en 12 combien de fois 4? Il y eſt 3 fois. J'écris au quotient 3, qui exprimera des unités. Je multiplie le diviſeur 4 par ce 3 : le produit eſt 12, qui extrait de 12, ne laiſſe aucun reſte; & la diviſion eſt achevée.

Pour faire la preuve, je multiplie le quotient 2423 par le diviſeur 4 : la diviſion ſera bien faite, ſi le produit eſt égal au dividende.

46. REMARQUE. Quand après la diviſion faite, il reſte quelque choſe au dernier membre; on écrit ce reſte ſous le dividende, & on le ſépare par un petit arc, poſé à la gauche. Ce reſte eſt le numérateur d'une fraction dont le dénominateur eſt le nombre qui ſert de diviſeur.

Dans l'exemple ſuivant, après la diviſion faite, il reſte quatre unités du dividende, à diviſer par le diviſeur 6. Ces quatre unités diviſées par 6, ne ſont pas une unité entiere pour le quotient, mais ſeulement 4 ſixiemes ou deux tiers d'une unité. Ainſi, quand

après la division faite il y a un reste, ce reste doit n'être jamais assez grand pour donner au quotient une unité.

En faisant la preuve; après avoir multiplié les nombres entiers du quotient par le diviseur, il faut ajouter au produit ce nombre d'unités, qui sont restées du dividende. La raison en est, que ces unités ne sont point entrées dans les nombres entiers du quotient, & qu'elles appartiennent encore au dividende. Le produit, joint à ce reste, doit être égal au dividende; comme on le voit dans l'exemple suivant. En multipliant 23079 par 6, on a pour produit 138474, qui avec le reste 4, égale le dividende.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Dividende. | 138478 | 6 | Diviseur. |
| | 1045 . | $23079 + \frac{4}{6}$. | Quotient. |
| Reste . . . . . . | (4 | 6 | |
| Preuve. | 138478 | 138474 | |
| | | + (4 | |

*Division composée.*

47. REGLE. *La Division composée, ainsi que la Division simple, consiste dans les trois opérations marquées dans la regle précédente* (45):

I. On divise le dividende par le diviseur, pour avoir un *quotient*.

II. On multiplie le diviseur par le quotient, pour avoir un *produit*.

III. On ôte du dividende le produit, pour avoir un *reste*.... Ceci s'éclaircira par les exemples que nous allons donner, & par les observations que nous allons faire.

Quoique le diviseur soit toujours le même nombre absolu, il a cependant diverses valeurs relatives. Car

quand il eſt appliqué à des millions, il extrait un quotient qui exprime des millions. Quand il tombe ſur les milles, il extrait un quotient qui exprime des milles; quand il diviſe des unités, il extrait un quotient qui exprime des unités; & ainſi du reſte. Soit le nombre 49326, à diviſer par 24.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Dividende. | 49 . 326 | 24 | Diviſeur. |
| Produit. | 48 | 2055 | Quotient. |
| Reſte. | 1 | | |
| II. Membre. | 13 | | |
| Produit. | 0 | | |
| Reſte. | 13 | | |
| III. Membre. | 132 | | |
| Produit. | 120 | | |
| Reſte. | 12 | | |
| IV. Membre. | 126 | | |
| Produit. | 120 | | |
| Reſte. | (6 | | |
| Preuve. | 49, 326 | égal au Dividende. | |

EXPLICATION. Le premier membre du dividende eſt 49, que je ſépare du reſte par un point. Tous les chiffres ſuivans feront autant d'autres membres. Il doit y avoir autant de chiffres au quotient, qu'il y a de membres au dividende : il y aura donc quatre chiffres au quotient. Pour obſerver les trois regles preſcrites,

I°. Je diviſe le premier membre du dividende pour avoir un quotient. Je pourrois d'abord dire en 49 mille combien de fois 24 mille. Deux fois; & je

mettrois 2 au quotient. Mais ne faiſant attention qu'au premier chiffre du dividende & au premier chiffre du diviſeur, je dis en 4 mille combien de fois 2 mille ? Ou plus ſimplement encore, en 4 combien de fois 2 ? Deux fois ; & j'écris au *quotient* 2 qui exprime des milles. Je multiplie le diviſeur 24 par le quotient 2 : le produit eſt 48 qui exprime des milles. J'ôte le produit 48, du premier membre 49 du dividende ; & j'ai pour *reſte* 1 qui exprime des milles, & à côté duquel j'abaiſſe le ſecond membre 3, ce qui fait 13 ; ſavoir, 13 centaines, dont il faut extraire 24 qui exprime auſſi des centaines.

II°. J'opere ſur le ſecond membre, comme j'ai opéré ſur le premier, en obſervant les trois regles preſcrites. Je dis donc en 13 combien de fois 24 : ou plutôt ne faiſant attention qu'aux premiers chiffres du dividende & du diviſeur, en 1 combien de fois 2 ? Point. J'écris donc zero au quotient ; & la ſouſtraction, ainſi que la multiplication, ſont inutiles pour ce membre.

III°. J'abaiſſe le 2 à côté des chiffres reſtants ; & j'ai pour troiſieme membre 132, qui exprimeront des dixaines. J'opere ſur le troiſieme membre, ſelon les trois regles preſcrites ; & je dis : en 13 combien de fois 2 ? Six fois. Je multiplie le diviſeur 24 par le chiffre 6 que je deſtine au quotient. Mais le produit 144 étant plus grand que le dividende 132, il ne peut pas en être extrait : parce qu'*un nombre plus grand ne peut pas être extrait d'un nombre plus petit.*

J'écris donc au quotient le 5, moindre d'une unité. Le 5 marque combien de fois 24 dixaines ſont contenues dans 132 dixaines. Je fais la multiplication, & j'ai pour produit 120, que j'extrais de 132. Souſtraction faite, il reſte 12, à côté duquel j'abaiſſe le 6 ; & j'ai pour quatrieme membre 126 qui expriment des unités.

IV°. J'opere encore sur le quatrieme membre en suivant les trois regles prescrites. En 12, combien de fois 2? 5 fois; & je mets le 5 au quotient. Je fais la multiplication; le produit est 120. Je fais la soustraction, il reste 6, que je sépare par un crochet; & la Division est achevée.

A mesure qu'on abaisse un chiffre du dividende, il est bon de l'effacer par un trait oblique; afin de ne pas confondre les chiffres sur lesquels on a opéré, avec ceux sur lesquels il reste à opérer.

DÉMONSTRATION. Diviser un nombre par un autre, c'est prendre sur le dividende, la partie que marque le diviseur. Par exemple, diviser 500 par 50, c'est prendre le cinquantieme de 500. Or, en suivant la regle proposée, on prend sur tout le dividende, la partie marquée par le diviseur. Je le démontre: je prends la partie marquée par le diviseur, sur tous les membres du dividende: donc je la prends sur tout le dividende; puisque le dividende n'est pas distingué de tous ses membres ou de toutes ses parties prises ensemble. C. Q. F. D.

48. OBSERVATION. *La preuve de la Division se fait en multipliant le quotient par le diviseur.* Le diviseur partage un Tout, savoir le dividende, en ses parties égales, dont une est exprimée par le quotient. Il y a dans le Tout ou dans le dividende, autant de parties égales au quotient qu'en exprime le diviseur: donc cette partie qu'exprime le quotient, multipliée par le diviseur, donnera un Tout égal au dividende.

On pourroit également multiplier le diviseur par le quotient; le produit est le même. $100 \times 10 = 1000$; de même, $10 \times 100 = 1000$.

49. REMARQUES. On voit par ce que nous venons de dire, & par la maniere dont nous avons opéré:

I°. Qu'avant d'écrire un chiffre au quotient, il faut l'éprouver par la multiplication; c'est-à-dire, qu'il faut

examiner s'il ne donne pas un produit plus grand que le membre du dividende auquel il répond; & le diminuer toujours d'une unité, jusqu'à ce que le produit n'excede pas le dividende partiel : il faut en même tems qu'il en approche le plus qu'il est possible.

II°. Que quand le diviseur a plusieurs chiffres, il ne faut faire attention qu'au premier chiffre qui correspond au premier ou aux deux premiers chiffres du dividende partiel.

III°. Que pour faire la preuve par la multiplication, on n'a qu'à additionner les divers produits partiels qui ont servi pour faire la soustraction. Les produits, dans l'exemple proposé, sont 48, 120, 120, & le reste 6. Après avoir effacé tous les autres membres, ces produits pris dans l'ordre des colonnes où ils sont placés, donnent pour produit total 49, 326, égal au dividende; & la preuve se trouve toute faite. Il en sera de même dans l'exemple suivant, & dans toutes les Divisions possibles.

50. PROBLÊME. *Diviser 147475, par 362.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| Dividende. | 1474.75 | 362 | Diviseur. |
| Produit. | 1448 | $407 + \frac{141}{362}$ | Quotient. |
| Reste. | 26 | | |
| II. Membre. | 267 | | |
| Produit. | 0 | | |
| Reste. | 267 | | |
| III. Membre. | 2675 | | |
| Produit. | 2534 | | |
| Reste. | (141 | | |
| Preuve. | 147475 | égal au dividende. | |

SOLUTION. Je considere d'abord en combien des premiers chiffres du dividende qui sont sur la gauche, le diviseur peut être contenu ; & parce que 362 ne peuvent être contenus dans les trois premiers chiffres 147, mais seulement dans les quatre premiers 1474; je les sépare des deux autres chiffres 75, par un point. Le premier membre de la division est donc 1474 à diviser par 362.

I°. Comme cette division ne peut se faire tout d'un coup ; je divise seulement les centaines de 1474 par les centaines de 362, en disant : en 14, combien de fois 3 ? Quatre fois & plus. Je pose seulement 4 au quotient : je multiplie le diviseur 362 par le quotient 4; & j'ôte du dividende 1474, le produit 1448 ; il reste 26; & la premiere partie de la division est faite.

II°. J'abaisse à côté du reste 26, le premier chiffre suivant 7; & le second membre de la division consiste à diviser 267 par 362. Je divise de même les centaines de 267 par celles de 362, en disant : en 2 combien de fois 3 ? Point. Je pose donc zero au quotient, & la seconde partie est finie.

III°. J'abaisse à côté du reste 267 le chiffre 5, & le troisieme membre de la division consiste à diviser 2676 par 362. Je dis donc, en 26 combien de fois 3 ? 8 fois. Je multiplie 362 par 8, & je trouve le produit 2896, lequel étant plus grand que le dividende 2675, me fait connoître que le quotient 8 est trop grand. Je mets donc 7 au quotient : je multiplie 362 par 7 : j'ôte le produit 2534, de 2675 ; restent 141 ; & parce qu'il n'y a plus de chiffre à abaisser, toute la division est faite : le quotient cherché est 407, & le restant 141, que je mets à côté en fraction, écrivant 362 au-dessous. (46.)

51. REMARQUE. Quand le diviseur renferme un grand nombre de chiffres, & le dividende un grand nombre de membres ; il est avantageux de marquer

à côté de chaque produit du diviſeur par le chiffre qu'on met au quotient, le chiffre qui donne ce produit : parce que ce produit ſert ſouvent pour un nombre ſuivant, & diſpenſe d'une multiplication qui ſe trouve toute faite. Par exemple, après avoir multiplié le diviſeur 76842756, par 5 que vous mettez au quotient ; marquez à côté du produit 384213780, un ſigne qui vous rappelle quel produit donne le chiffre 5, en cette maniere : 384213780 = 5. Après avoir multiplié le même diviſeur par un chiffre 7 que vous mettez au quotient, marquez de la même maniere le produit 537899292 = 7. Bientôt vous vous appercevrez combien ces ſignes vous ſeront utiles pour trouver les autres chiffres du quotient, comme dans la diviſion ſuivante, qui ſervira d'exemple général.

| Dividende. | |
|---|---|
| 445632100 . 00000 | 76842756 Diviſeur. |
| 384213780 = 5. | 579927 Quotient. |
| 614183200 | |
| 537899292 = 7. | |
| 762839080 | |
| 691504804 = 9. | |
| 712542760 | |
| 691504804 = 9. | |
| 210379560 | |
| 153685512 = 2. | |
| 566940480 | |
| 537899292 = 7. | |
| ( 29041188 | |

## *Usage de la Division.*

52. Corollaire. *La Division sert, entr'autres choses, à réduire les petites especes en grandes:* ce qui se fait en divisant la somme des petites especes, par le nombre qui exprime combien de fois la grande espece contient la petite. Par exemple,

I°. Pour réduire 36 pieds en toises, je divise 36 par 6 : le quotient sera 6 pieds. Or je n'ai pris que le sixieme du dividende : donc le dividende est six fois plus grand : & s'il est 6 fois plus grand, il vaut donc une espece 6 fois plus grande que les pieds, & par conséquent 6 toises.

II°. De même, pour réduire 100 sols en livres, je divise 100 par 20 : le quotient est 5 sols. Or je n'ai pris que la vingtieme partie du dividende : donc tout le dividende est égal à une espece vingt fois plus grande que les sols, & par conséquent à 5 livres.

III°. On réduit de même les deniers en sols, les pouces en pieds, les lignes en pouces, en divisant la somme donnée par 12. On réduit encore par la même méthode, les onces en livres, en divisant la somme des onces par 16 ; les heures en jours, en les divisant par 24 ; les minutes en heures, les secondes en minutes, en divisant la somme donnée par 60.

IV°. Pour réduire les sols en livres, retranchez du dividende le dernier chiffre, qui exprimera des sols : divisez par 2 le reste du dividende ; le quotient exprimera des livres. La raison en est évidente. Retrancher le dernier chiffre du dividende, c'est réduire tous les chiffres précédens à la dixieme partie de leur valeur (15) : retrancher encore la moitié de cette dixieme partie, c'est les réduire à la vingtieme partie de leur valeur ; & par conséquent à l'expression des livres. Par exemple, 108 sols se réduiront à 5 livres 8 sols.

### *Maniere d'abréger la Divifion.*

53. REMARQUE. *On peut abréger la divifion en certains cas:*

I°. Quand le dividende a plufieurs zeros à la fin, & que le divifeur eft l'unité fuivie de plufieurs zeros; il faut retrancher au dividende autant de zeros qu'il y en a au divifeur, & le quotient eft le refte du dividende. Par exemple, en divifant 9000 par 100, je cherche un nombre cent fois plus petit que le dividende: or, en ôtant au dividende deux zeros (autant qu'il y en a au divifeur), je rends ce dividende cent fois plus petit, & = 90: donc je le divife par 100. (18.)

II°. Quand le divifeur eft l'unité fuivie de plufieurs zeros, & que le dividende a des chiffres pofitifs à la fin; il faut retrancher autant de chiffres pofitifs au dividende qu'il y a de zeros au divifeur: le quotient fera le refte du dividende, joint à une fraction qui aura pour numérateur les chiffres retranchés du dividende; & pour dénominateur, le divifeur. Par exemple, fi je divife 999 par 100; le quotient fera 9 $+ \frac{99}{100}$; ou dix unités, moins un centieme de l'unité. De même $\frac{29}{10} = 2 + \frac{9}{10}$.

III°. Quand un nombre doit être divifé par 2, on peut prendre la moitié de tous les chiffres en commençant par la gauche. S'il faut divifer par 3 ou par 4, on prend le tiers ou le quart de chaque chiffre; & ainfi des autres divifeurs. Dans ce cas, le refte de chaque nombre fur lequel on opere, en commençant toujours par la gauche (25), fe joint par la penfée avec le chiffre fuivant.

Cette méthode n'a pas befoin de nouvelle démonftration, après ce que nous avons déjà dit: il eft clair qu'en prenant la moitié ou le quart de toutes les parties du dividende, on prend la moitié ou le quart de tout le dividende. En voici des exemples.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 54397 | 2 Diviſeur. | 54397 | 3 Diviſeur. |
| 1011. | 27198 | 2000. | 18132 |
| (1 | 2 | (1 | 3 |
| Preuve. | 54397 | Preuve. | 54397 |
| 54397 | 4 Diviſeur. | 54397 | 5 Diviſeur. |
| 1233. | 13599 | 0434. | 10879 |
| (1 | 4 | (2 | 5 |
| Preuve. | 54397 | Preuve. | 54397 |

## PARAGRAPHE CINQUIEME.

### *LA MULTIPLICATION COMPLEXE.*

54. DÉFINITION. LA *Multiplication eſt complexe,* quand, ou le multiplicande, ou le multiplicateur, ou l'un & l'autre enſemble, renferment des nombres de différente valeur; par exemple, des livres & des ſols, des toiſes & des pieds.

Dans la multiplication complexe, les quantités qu'il faut multiplier l'une par l'autre, ſont ou *hétérogenes* ou *homogenes:* c'eſt-à-dire, ou de *différente nature,* comme quand on multiplie des livres & des ſols par des toiſes & des pieds; ou *de même nature,* comme quand on multiplie des livres & des ſols par des livres & des ſols & des deniers. Deux regles vont mettre au fait de ces deux opérations.

*Quantités hétérogenes*

55. REGLE. *Quand on veut multiplier un nombre complexe d'une eſpece, par un nombre complexe*

*d'une autre espece*; par exemple, lorsqu'on cherche par la multiplication, le prix d'une marchandise; on doit toujours regarder comme *multiplicande*, celui des deux nombres qui contient des quantités semblables à celles qu'exprimera le produit. Après cette observation générale, voici la regle & la méthode de cette opération. Il faut:

I°. Réduire chacun des deux nombres à la plus petite espece qu'il contient. Par exemple, si le premier nombre contient des toises, des pouces & des pieds, réduisez tout en pouces: si le second nombre contient des livres, des sols & des deniers, réduisez tout en deniers.

II°. Multiplier l'un par l'autre les deux nombres réduits à la plus petite espece: comme dans l'exemple suivant, le nombre des deniers par le nombre des pouces.

III°. Diviser le produit de cette multiplication, par le nombre qui exprime combien de fois la plus grande espece du multiplicateur contient la plus petite: le quotient sera le produit de cette multiplication complexe.

IV°. Mais remarquez que le produit sera seulement exprimé en la plus petite espece du multiplicande; c'est-à-dire en deniers, s'il a été réduit en deniers.

56. EXEMPLE. On demande *combien doit coûter un ouvrage en maçonnerie*, de 4 toises 5 pieds 8 pouces; à 3 livres 2 sols 4 deniers la toise? Pour trouver cette valeur, ou pour faire cette multiplication,

I°. Je réduis les termes, tant du multiplicande que du multiplicateur, à leurs plus petites especes; les toises & les pieds en pouces, les livres & les sols en deniers. J'aurai, pour multiplicande, 748 deniers: pour multiplicateur, . . . . . . . . . . 356 pouces.

II°. Je multiplie l'un par l'autre, le multiplicande

& le multiplicateur : le produit sera 266288.

III°. Je divise ce produit par 72, qui marque combien de fois la plus petite espece du multiplicateur, savoir le pouce, est contenue dans la plus grande, savoir dans la toise : & j'ai pour quotient 3698 avec le reste 32 à diviser par 72. Ainsi la valeur de 4 toises 5 pieds 8 pouces, est 3698 deniers & la fraction $\frac{32}{72}$ qu'on peut négliger ; parce qu'elle ne vaut pas un demi-denier.

IV°. Comme le produit ainsi divisé, est exprimé en deniers ; il faut le réduire en sols, puis en livres, par la méthode que nous avons donnée (52) : afin d'avoir le produit en ses moindres termes.

DÉMONSTRATION. La raison de tout ce que la regle prescrit, ou de toutes ces opérations, est claire : il ne peut y avoir de difficulté que pour le troisieme article, qui dit de diviser le produit trouvé, par le nombre qui exprime combien de fois la plus grande espece du multiplicateur contient la plus petite. En voici la raison.

I°. Si chaque pouce valoit 748 deniers ; il est évident que 356 pouces vaudroient 266288 deniers ; puisque ce nombre est le produit de 748 par 356 ; ou d'une rangée de 748 deniers, prise autant de fois qu'il y a de pouces, savoir 356 fois.

II°. Mais par la supposition, 748 deniers sont le prix de la toise, & non pas du pouce : ainsi, puisque la toise vaut 72 pouces, le prix d'un pouce n'est que la soixante-douzieme partie de 266288 deniers. Donc, afin d'avoir le prix de 356 pouces en deniers, il faut diviser 266288 deniers par 72. C. Q. F. D.

### *Maniere d'abréger cette Opération.*

57. EXPLICATION. Lorsque la plus grande espece du multiplicateur est exprimée par un grand nombre,

pour lors la multiplication devient fort longue : à cause que cette plus grande eſpece étant réduite à la plus petite, produit un très-grand nombre.

Si on avoit, par exemple, à chercher la valeur de 5748 toiſes 5 pieds 8 pouces, à 3 livres 2 ſols 4 deniers la toiſe, comme dans l'exemple ſuivant :

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Multiplicande*........ | 3 livres........ | 2 ſols........ | 4 den. |
| *Multiplicateur.* | par 5746 ... | par 5746.... | par 5746. |
| *Produit.* | 17238 livres.... | 11492 ſols ... | 22984 den. |

I°. Il faut chercher à part la valeur de 5746 toiſes, ſans réduire ces toiſes en pieds & en pouces. Pour cet effet, voici une méthode qui abrégera beaucoup l'opération. On multipliera ſucceſſivement 3 livres 2 ſols 4 deniers, par 5746 : ce qui donnera déjà pour 5746 toiſes (37), en livres, en ſols, en deniers, le produit ci-deſſus marqué.

II°. Il reſte encore à chercher la valeur de 5 pieds 8 pouces, par la méthode précédente (56). Cette valeur eſt 706 deniers, & la fraction $\frac{32}{72}$ qu'on peut négliger; parce qu'elle vaut moins d'un demi denier. Il ne s'agit plus que de réduire les deniers en ſols, les ſols en livres, pour avoir en ſes moindres termes le produit cherché.

DÉMONSTRATION. Ce qui regarde l'article ſecond de cette opération, a été déjà démontré (56). Ce qui regarde l'article premier, eſt évident. Car chaque toiſe *valant 3 livres*, il eſt clair que 5746 toiſes vaudront 3 fois 5746 = 17238 livres : chaque toiſe *valant de plus 2 ſols*, il eſt clair que 5746 toiſes vaudront 2 fois 5746 = 11492 ſols : chaque toiſe *valant de plus 4 deniers*, il eſt clair que 5746 toiſes vaudront 4 fois 5746 deniers = 22984 deniers. C. Q. F. D.

## *Quantités homogenes.*

58. REGLE. *Quand on multiplie des quantités complexes homogenes l'une par l'autre*, il eſt indifférent de prendre pour multiplicande l'un ou l'autre des deux nombres qui expriment ces quantités. Voici la méthode qu'on ſuit. Il faut :

I°. Réduire les deux nombres à la plus petite eſpece qui eſt exprimée dans l'un ou dans l'autre nombre.

II°. Multiplier l'un par l'autre, les deux nombres réduits à la plus petite eſpece.

III°. Diviſer le produit de cette multiplication, par le quarré du nombre qui exprime combien de fois la plus petite eſpece eſt contenue dans la plus grande.

Le *quarré d'un nombre* eſt le produit de ce nombre multiplié par lui-même. Par exemple, le quarré de 6 eſt $6 \times 6 = 36$ : le quarré de 12 eſt $12 \times 12 = 144$ : le quarré de 100 eſt $100 \times 100 = 10000$.

59. EXEMPLE. Quand on doit multiplier une étendue par une étendue, comme des toiſes & des pieds, par des toiſes & des pieds & des pouces ; après avoir réduit le multiplicande & le multiplicateur à la plus petite eſpece qui ſoit contenue dans les deux nombres, on multiplie les deux nombres réduits, l'un par l'autre. Enſuite on diviſe le produit par le nombre qui exprime combien la plus grande eſpece contient de fois la plus petite. Or, la plus grande eſpece, eſt non une toiſe en longueur, qui contienne 72 pouces ; mais une *toiſe quarrée*, qui contient 5184 pouces quarrés. Il faudra donc en ce cas diviſer le produit, non par 72, mais par 5184 : le quotient exprimera le nombre cherché de toiſes quarrées, de pieds & de pouces quarrés.

On peut auſſi ſe ſervir dans cette multiplication, de la méthode des parties aliquotes (70) ; ou d'une autre

autre méthode encore plus ſimple & plus facile, que nous donnerons ailleurs. (461.)

60. REMARQUE. Il ſuit de ce que nous avons dit, qu'*autre choſe eſt le réſultat de deux meſures ſimples, multipliées l'une par l'autre; autre choſe eſt le réſultat des parties de ces mêmes meſures, multipliées les unes par les autres.*

EXPLICATION. Pour ſaiſir la raiſon de cette différence, il faut faire attention à la *nature de l'unité* que l'on trouve & que l'on conſidere dans le produit. Cette unité n'eſt autre choſe qu'elle-même, dans le réſultat de deux meſures ſimples; cette unité eſt une de ſes parties aliquotes (161), dans le réſultat des parties de ces mêmes meſures.

I°. Le produit d'une meſure ſimple par une meſure ſimple, eſt cette *meſure ſimple* priſe autant de fois en nombre ou en ſurface, que le marque le produit. Par exemple, le produit de 4 ſols par 3 ſols, eſt le nombre 12 ſols, ou quatre rangées de ſols qui ont chacune trois ſols en longueur. De même le produit de 3 toiſes par 4 toiſes, eſt l'eſpace 12 toiſes, ou trois rangs de toiſes qui ont chacun quatre toiſes en longueur. (*fig.* 63.)

II°. Mais le produit des parties ou des fractions d'une meſure ſimple par les parties ou les fractions de cette même meſure, exprime les *parties aliquotes de cette même meſure*, priſes tel nombre de fois: l'unité que l'on conſidere dans ce produit, eſt donc fort différente de l'unité que l'on conſidere dans le produit précédent. Par exemple, le produit de 48 deniers qui valent 4 ſols, par 36 deniers qui valent 3 ſols, eſt 1728 deniers, qui valent bien plus de 12 ſols. Dans ce cas, le produit exprime, non des unités qui vaillent chacune un denier ou un douzieme de ſol, mais des *unités* qui ne valent chacune qu'un cent-quarante-quatrieme de ſol.

De même le produit de 18 pieds qui valent trois toises en longueur, par 24 pieds qui valent quatre toises en longueur, est 432 pieds, qui valent bien plus de 12 toises. Dans ce cas, le produit exprime, non des unités qui vaillent chacune un pied ou un sixieme de toise, mais des *unités* qui ne valent chacune qu'un trente-sixieme de toise quarrée, dont il est ici question.

III°. Les deux résultats, dont on vient de parler, reviendront au même; si l'on prend la *même unité*, dans le résultat des deux mesures simples, & dans le résultat des parties ou des fractions de ces mêmes mesures. Car on aura d'abord, pour le produit des sols, $4 \times 3 = 12$ sols; & par la théorie des fractions (208 & 194), $\frac{48}{12} \times \frac{36}{12} = \frac{1728}{144} = \frac{12}{1} = 12$ sols. On aura ensuite, pour le produit des toises, $3 \times 4 = 12$; & $\frac{18}{6} \times \frac{24}{6} = \frac{432}{36} = \frac{12}{1} = 12$ toises.

## PARAGRAPHE SIXIEME.

### *LA DIVISION COMPLEXE.*

61. DÉFINITION. LA *Division est complexe*, quand, ou le dividende, ou le diviseur, ou l'un & l'autre ensemble, renferment des nombres de différente espece.

62. REGLE. *Pour diviser un nombre complexe par un autre nombre complexe*, il faut:

I°. Réduire le diviseur à la plus petite espece qu'il contient.

II°. Faire la division en commençant par les plus grandes especes du dividende, & allant de suite aux petites.

III°. Multiplier le quotient entier par le nombre qui marque combien de fois la plus grande espece du

diviſeur contient la plus petite. Le problême ſuivant va ſervir d'exemple ſur cette regle.

63. PROBLÊME *Si 7 marcs 2 onces d'argent ont coûté 346 livres 18 ſols 9 deniers, à combien revient le marc.*

SOLUTION. L'état de la queſtion fait voir que c'eſt en diviſant 346 livres 18 ſols 9 deniers, qu'on trouvera le prix de chaque marc. Ainſi le diviſeur doit être 7 marcs 2 onces, qui, réduits en onces, donnent 58 onces. Je diviſe donc d'abord les 346 livres par 58: le quotient eſt 5. Je diviſe enſuite le reſte des livres réduit en ſols, & ajouté aux 18 ſols du dividende, par 58: le quotient eſt 19 ſols. Je diviſe enfin de la même maniere les deniers: le quotient eſt 7 deniers avec le reſte $\frac{32}{58}$, que l'on peut négliger; parce qu'il ne vaut guere qu'un demi-denier.

| | |
|---|---|
| 346 livres 18 ſols 6 den. | 58 onces. Diviſeur. |
| Prix de l'once = | 5 livres 19 ſols 7 den. |

Prix du marc = 40 livres 152 ſols 56 deniers.

DÉMONSTRATION. La raiſon des trois parties de cette regle, eſt évidente.

I°. Il faut réduire le diviſeur à la plus petite eſpece qu'il contient: afin d'avoir un nombre pur ou entier, qui puiſſe être porté ſans fraction ſur tous les membres du divivende qu'il doit partager en autant de parties qu'en marque le diviſeur; une deſquelles parties ſera exprimée par le quotient.

II°. Il faut diviſer d'abord les grandes & enſuite les petites eſpeces du dividende, par le diviſeur réduit. En portant ſucceſſivement le diviſeur ſur tous les membres du dividende, il eſt évident que je prends ſucceſſivement ſur tous les membres du dividende, la partie que marque le diviſeur; & que je place ſucceſſi-

vement au quotient : donc après cette opération j'aurai divisé tout le dividende par le diviseur ; puisque j'aurai extrait la partie marquée par le diviseur, de tous les membres ou de toutes les parties du dividende.

III°. Il faut multiplier le quotient entier, par le nombre entier qui marque combien de fois la plus grande espece du diviseur, contient la petite espece par laquelle on a divisé. En suivant la méthode prescrite par les deux premiers articles de la regle, il est évident qu'on trouve la partie du dividende correspondante à une des unités du diviseur : dans l'exemple proposé, on trouve la cinquante-huitieme partie de la somme totale, correspondante à une once. Le prix ou la valeur d'une once sera donc la partie de la somme que marque le quotient ; savoir, 5 livres 19 sols 7 deniers.

Mais le marc est 8 fois plus grand que l'once : donc la somme qui exprimera la valeur du marc, doit être 8 fois plus grande que la somme marquée au quotient : & par conséquent pour avoir la valeur du marc, il faut multiplier le quotient par le nombre qui exprime combien il y a d'onces dans le marc, c'est-à-dire par 8 : le produit 40 livres 152 sols 56 deniers, sera la valeur du marc ; & en réduisant, cette valeur ou le prix du marc sera 47 livres 16 sols 8 deniers. C. Q. F. D.

64. REMARQUE. Lorsque le diviseur est un nombre incomplexe, pour lors le premier & le troisieme article de la regle précédente, n'ont point de lieu. Par exemple,

I°. Si 26 muids de vin ont coûté 1467 livres 12 sols 8 deniers, à combien revient le muid ? Il faut diviser par 26, les livres, ensuite les sols, & enfin les deniers du dividende : comme dans le problême précédent. Après avoir réduit les deniers en sols, les sols en livres : on trouvera 56 livres 8 sols 11 deniers, plus 10 deniers à diviser en 26 : c'est le prix d'un muid.

IIº. Par la même méthode on trouvera combien une ſomme déterminée, par exemple, 7687 livres de revenu, donne à dépenſer par jour : il eſt évident qu'il faut chercher la trois-cent ſoixante-cinquieme partie de la ſomme en queſtion ; & par conſéquent qu'il faut diviſer cette ſomme par 365 jours.

IIIº. De même ſi on veut ſavoir combien une ſomme qui doit être diſtribuée par portions égales à un grand nombre de perſonnes, donne pour chacun ; il faut diviſer la ſomme en queſtion, par le nombre des perſonnes qui doivent y avoir part.

## PARAGRAPHE SEPTIEME.

### *FRACTIONS DE L'UNITÉ.*

65. DÉFINITION. IL nous reſte à dire quelque choſe des multiplications & des diviſions, qui ont, pour multiplicateur ou pour diviſeur, des parties ou des fractions de l'unité. On appelle *fractions de l'unité*, un nombre fractionnaire dont l'unité eſt le numérateur (13, IIIº.). Par exemple, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{100}$, ſont des fractions de l'unité, qui peuvent multiplier ou diviſer un autre nombre, tel que 242 ou 3600, & ainſi du reſte ; comme on va le voir dans les problêmes ſuivants.

### PROBLÊME PREMIER.

66. *Faire la Multiplication, lorſque le multiplicateur eſt plus petit que l'unité.*

SOLUTION. Dans toute multiplication, le produit doit être au multiplicande, comme le multiplicateur eſt à l'unité. (34.)

Iº. Donc quand le multiplicateur eſt *égal à l'unité*,

le produit doit être égal au multiplicande : par exemple, $12 \times 1 = 12$ ; $236 \times 1 = 236$.

II°. Donc quand le multiplicateur est *plus petit que l'unité*, le produit doit être plus petit que le multiplicande, autant & à proportion que le multiplicateur est plus petit que l'unité. Donc si le multiplicateur est l'unité divisée par 2, ou par 3, ou par 4, ou par 10 ; le produit sera le multiplicande divisé par 2, ou par 3, ou par 4, ou par 10 ; & ainsi de suite. Donc $12 \times \frac{1}{2} = 6$ ; $12 \times \frac{1}{3} = 4$ ; $12 \times \frac{1}{4} = 3$ ; $12 \times \frac{1}{12} = 1$.

67. COROLLAIRE. Il suit delà que lorsque le multiplicateur est une fraction qui a l'unité pour numérateur, c'est une même chose de multiplier le multiplicande par cette fraction ; ou de diviser le même multiplicande par le dénominateur de la fraction. Ainsi *une telle multiplication est une vraie division, qui a pour diviseur le dénominateur de la fraction.*

*Multiplication par les parties aliquotes.*

68. REMARQUE. Sur ce principe est fondé l'art de la multiplication des nombres, par les *parties aliquotes* (161) ; c'est-à-dire, par les parties ou fractions de l'unité qui est considérée dans le multiplicateur. En voici deux exemples.

69. EXEMPLE I. *Soit donné le nombre 12, à multiplier par 2 livres 10 sols.* Après l'avoir multiplié par 2 livres, ce qui donne le produit 24, il reste à le multiplier par 10 sols.

I°. Or je remarque que 10 sols est une fraction ou une partie aliquote de la livre, laquelle est l'unité que je considere dans le multiplateur ; parce qu'elle est de l'espece qui le compose ; par conséquent 10 sols étant la moitié de la livre, ou $\frac{1}{2}$ ; je trouverai le produit de 12 par 10 sols, en divisant 12 par 2 ; ce qui donnera $12 \times \frac{1}{2} = 6$ livres. (*66.*)

II°. Pareillement le produit de 12 par 5 sols, qui est le quart de la livre, ou $\frac{1}{4}$, sera $12 \times \frac{1}{4} = 3$ livres. Le produit de 12 par 2 sols, qui est un dixieme de la livre, ou $\frac{1}{10}$, sera $12 \times \frac{1}{10} = \frac{12}{10} = 1$ livre 4 sols.

70. EXEMPLE II. *Soit donné le nombre 18 toises, à multiplier par 5 toises & 3 pieds.* Après avoir multiplié 18 par 5, ce qui donne 90 toises; il reste à multiplier 18 toises par 3 pieds.

I°. Or je remarque que 3 pieds sont la moitié de la toise: par conséquent $18 \times \frac{1}{2} = 9$ toises. Ainsi, $90 + 9 = 99$: j'aurai donc pour produit total 99 toises.

II°. Si au lieu de multiplier 18 toises par 3 pieds, il eût fallu multiplier 18 par 2 pieds; j'aurois observé que 2 pieds sont le tiers de la toise ou $\frac{1}{3}$: par conséquent $18 \times \frac{1}{3} = 6$ toises. J'aurois donc eu pour produit total 96 toises,

III°. S'il eût fallu multiplier 18 toises par 4 pieds, j'aurois observé que quatre pieds sont les deux tiers de la toise: j'aurois donc multiplié 18 par un tiers, & j'aurois pris deux fois le produit. Ainsi, $18 \times \frac{1}{3} = 6$ toises, qui prises deux fois donnent 12 toises: j'aurois donc eu pour produit total 102 toises.

Cette méthode est le fondement du *Toisé des surfaces* & du *Toisé des solides*: nous parlerons du premier, dans la Planimétrie (461); & du second, dans la Stéréométrie. (613.)

### PROBLÊME SECOND.

71. *Faire la division, lorsque le diviseur est plus petit que l'unité.*

SOLUTION. Dans toute division, le quotient est au dividende, comme l'unité est au diviseur. (43.)

I°. Donc quand le diviseur est égal à l'unité, le quotient est égal au dividende: 16 divisé par 1, = 16; 1000 divisé par 1, = 1000.

II°, Donc quand le diviſeur eſt plus petit que l'unité ; l'unité étant plus grande que le diviſeur, le quotient doit être proportionnellement autant plus grand que le dividende. Ainſi, 16 diviſé par 1, = 16 : mais 16 diviſé par $\frac{1}{2}$, = 32 ; 16 diviſé par $\frac{1}{3}$, = 48 ; 16 diviſé par $\frac{1}{4}$, = 64 ; & ainſi du reſte.

72. COROLLAIRE. Dans les derniers exemples qu'on vient d'apporter ; pour avoir le quotient, l'on a pris le double, le triple, le quadruple du dividende : c'eſt-à-dire, qu'on a réellement multiplié 16 par 2, par 3, par 4. D'où il ſuit que, lorſque le diviſeur eſt une fraction dont le numérateur eſt l'unité, c'eſt une même choſe de diviſer le dividende par cette fraction, ou de le multiplier par le dénominateur de la fraction. Ainſi *une telle diviſion eſt une vraie multiplication, qui a pour multiplicateur le dénominateur de la fraction.*

73. CONCLUSION. Comme l'Arithmétique eſt une ſcience d'un uſage néceſſaire & preſque journalier, nous avons voulu ne rien laiſſer à deſirer ſur cette matiere. Nous oſons nous flatter d'avoir donné à ce Traité, malgré ſa briéveté, toute l'intelligibilité dont il eſt ſuſceptible. Les perſonnes qui n'ont pas appris ſcientifiquement le Calcul arithmétique, ſeront ſurpriſes, ſi ce petit Traité tombe en leurs mains, de voir combien peu il en coûte de ſavoir en Philoſophe & en Géometre, ce qu'elles ne pratiquoient qu'à l'aide d'une aveugle & machinale routine.

# PRINCIPES
## *DU CALCUL*
## ET DE LA GÉOMÉTRIE,
OU
## *ÉLÉMENS DE MATHÉMATIQUES.*

# SECOND TRAITÉ.

## *LE CALCUL ALGÉBRIQUE.*

74. DÉFINITION. L'ALGEBRE est la *Science de la Grandeur en général*, exprimée par quelques signes dont la signification ne soit pas déterminée par la nature des signes. Les signes qu'on a choisis, sont les lettres de l'alphabet; les premieres, pour exprimer les *grandeurs connues*; les dernieres, pour exprimer les *grandeurs inconnues*.

1°. L'Algebre est une branche des Mathématiques, que nous tenons des Arabes, lesquels la tenoient vraisemblablement des Grecs. Car si cette science paroît avoir été inconnue aux Platons, aux Pythagore, aux Archimede, aux Euclide, aux Apollonius de Perge, comme on le pense avec assez de vraisemblance; il est certain qu'elle étoit connue & qu'elle avoit déjà fait d'assez grands progrès au tems du célebre Diophante,

vers le milieu du quatrieme ſiecle du chriſtianiſme : comme il conſte par l'ouvrage qui nous reſte de cet auteur ; ouvrage connu ſous le titre de *Queſtions arithmétiques* de Diophante.

Si l'Arabie fut propre à accueillir & à conſerver les ſciences phyſiques & mathématiques qu'avoient créé les beaux ſiecles de la Grece ; elle ne parut pas également propre à les étendre & à les perfectionner : car il ne paroît pas que cette nation, plus ſubtile que profonde, plus douée d'intelligence que de génie, plus faite pour recevoir que pour donner des impreſſions, ait rien étendu ou perfectionné en ce genre. Il falloit que toutes les découvertes des Grecs, après avoir été longtems conſervées comme en dépôt dans l'Arabie, paſſaſſent en de plus heureux climats, pour y fermenter avec énergie, & pour y prendre un élans rapide & une face nouvelle. Tranſportée d'Arabie en Europe par Leonard de Piſe, vers le commencement du quinzieme ſiecle, l'Algebre y fut accueillie avec empreſſement par un grand nombre de Calculateurs & de Géometres. Viette, né à Fontenai dans le Poitou l'an 1540, en ſimplifia & en étendit l'uſage ; & dans le dernier ſiecle, le célebre Deſcartes, qui imprimoit le ſceau de ſon génie créateur à tous les objets qu'il ſaiſiſſoit, la porta à peu près au point de perfection où elle s'eſt élevée dans ces derniers tems.

II°. L'Algebre eſt comme une arithmétique par ſignes ; ou bien, l'Algebre eſt un langage particulier par lequel on exprime ſuccinctement & ſenſiblement une ſuite ou un enchaînement de raiſonnements géométriques, que l'eſprit ne pourroit pas ſuivre ou qu'il ne ſuivroit qu'avec un effort accablant, ſans le ſecours de l'art qui les réduit en procédés techniques (250), en tableaux abrégés, en expreſſions très-ſimples & très-faciles à ſuivre dans leur compoſition & dans leur décompoſition. Quoiqu'elle ait directement pour objet

la *quantité discrete* ou les nombres ; il est évident qu'elle peut avoir aussi réellement pour objet la *quantité continue* ou l'étendue : puisque toute espece d'étendue peut être désignée par des nombres. Car une ligne, par exemple, n'est d'une certaine grandeur ; que parce qu'elle en contient une autre prise pour mesure ou comme unité, un certain nombre de fois. Il en est de même des surfaces & des solides, qui ne sont de mille pouces quarrés ou cubiques, par exemple ; que parce qu'ils contiennent mille fois un pouce quarré ou cubique. On pourra par conséquent représenter ces lignes, ces surfaces, ces solides, comme si c'étoient des nombres, par des signes universels. On voit par-là comment *l'Algebre est comme une science mitoyenne entre l'Arithmétique & la Géométrie* ; & sur quoi est fondée l'heureuse application que fit le célebre Descartes de l'algebre (ou de l'analyse algébrique) à la géométrie des courbes différentes du cercle : car l'application de l'algebre à la résolution des problêmes de la géométrie élémentaire, est antérieure à Descartes.

III°. Le grand avantage de l'Algebre, c'est en premier lieu que ses démonstrations sont générales, & peuvent s'appliquer à toutes sortes de grandeurs ; étendues, vîtesses, poids, nombres, tems : c'est en second lieu qu'elle opere également sur les grandeurs connues & sur les grandeurs inconnues. Les lettres de l'alphabet qui représentent ces grandeurs & qui en sont comme le symbole & l'expression, s'appellent *quantités algébriques* ; & le calcul qui opere sur ces grandeurs ainsi exprimées, s'appelle *calcul algébrique*.

Le calcul algébrique n'a d'effrayant que l'indétermination de son objet, & l'appareil de ses signes : ces fantômes, dont l'imagination s'épouvante, vont disparoître & s'évanouir. On verra dans ce traité & dans les deux suivants, que l'algebre est, pour le Géometre,

çe que les ailes ſont pour l'aigle : loin d'être un fardeau & un embarras, c'eſt un ſecours puiſſant, par le moyen duquel il ſe fraye une route facile & aſſurée vers le ſéjour de la Lumiere.

### *SIGNES ET QUANTITÉS ALGÉBRIQUES.*

75. AXIOME. *Les quantités algébriques ſont ſuſceptibles des mêmes opérations que les quantités numériques.*

EXPLICATION. C'eſt-à-dire, que ces quantités peuvent être ajoutées les unes aux autres, ſouſtraites les unes des autres, multipliées ou diviſées les unes par les autres. Les lettres de l'alphabet ne pouvant ſe combiner les unes avec les autres comme les chiffres; on ſe ſert en opérant ſur les lettres, de quelques ſignes qui ſont :

I°. Le ſigne $+$, ou d'addition; qui ſignifie *plus*. Par exemple, $a+b$ ſignifie $a$ plus $b$, ou la quantité $a$ ajoutée à la quantité $b$.

II°. Le ſigne $-$, ou de ſouſtraction; qui ſignifie *moins*. Par exemple, $a-b$ ſignifie $a$ moins $b$, ou la quantité $b$ retranchée de la quantité $a$.

III°. Le ſigne $\times$, ou de multiplication; qui ſignifie *multiplié par*. Par exemple, $a \times b$ ſignifie que $a$ eſt multiplié par $b$.

IV°. Le ſigne de diviſion, qui eſt un trait placé entre deux quantités algébriques, poſées l'une au-deſſus de l'autre. Par exemple, $\frac{a}{b}$ ſignifie que $a$ eſt diviſé par $b$.

V°. Le ſigne $=$, ou d'égalité; qui ſignifie *égal à*. Par exemple, $a=b$, ſignifie que $a$ eſt égal à $b$.

VI°. Le ſigne $>$, qui ſignifie *plus grand que*. Par exemple $a>b$, ſignifie que $a$ eſt plus grand que $b$.

VII°. Le ſigne $<$, qui ſignifie *moindre que*. Par exemple, $a<b$, ſignifie que $a$ eſt moindre que $b$.

VIII°. Le ſigne $\infty$, qui ſignifie *infini*. Par exemple,

$\infty$ *a* ſignifie que la quantité *a* eſt infinie.

IX°. Le ſigne $\sqrt{}$, qui ſignifie *la racine de*. Par exemple, $\sqrt{a}$ ſignifie la racine de *a*.

76. REMARQUE. Les lettres de l'alphabet n'ayant par elles-mêmes *aucune valeur*; il eſt libre de faire ſignifier à ces lettres, telle grandeur que l'on voudra. Mais il faut obſerver que lorſqu'on a une fois donné à une lettre *une valeur*, il faut la lui conſerver dans toute la ſuite de cette opération.

Quant à l'*indétermination des quantités algébriques*, voici de quoi faire évanouir cet épouvantail. Si je voulois combiner les grandeurs 5 & 4, pour avoir la ſomme 9; il eſt évident qu'il m'eſt permis de repréſenter ces trois grandeurs par tels autres ſignes qu'il me plaira; par exemple, par les lettres *a*, *b*, *c*; & qu'en ce cas la ſomme $5+4=9$, ſera repréſentée ſous une autre expreſſion; ſavoir, $a+b=c$.

De même, ſi je voulois combiner les grandeurs 5 & 6, en les multipliant pour avoir le produit 30 : il eſt évident que je puis repréſenter ces trois grandeurs par ces trois lettres *m*, *n*, *p*; & qu'en ce cas, la ſomme $5 \times 6 = 30$, ſera repréſentée ſous cette autre expreſſion $m \times n = p$. Toutes ces ſuppoſitions ou demandes ſont évidemment poſſibles.

## *DIVERSES DÉFINITIONS.*

77. DÉFINITION I. On appelle *terme algébrique*, une lettre, ou pluſieurs lettres jointes enſemble, mais ſans interpoſition de ſignes + ou —. Par exemple, *a*, *b*, *ab*, *abc*, ſont quatre termes algébriques.

On appelle *termes poſitifs*, ceux qui ſont précédés du ſigne +; & *termes négatifs*, ceux qui ſont précédés du ſigne —. Quand un terme n'eſt précédé d'aucun ſigne, alors il eſt cenſé avoir le ſigne +. Dans la quantité $a+ab-abc-bc+acd$, il y a trois termes poſitifs & deux négatifs.

78. DÉFINITION II. On appelle *termes semblables*, ceux qui sont précisément composés des mêmes lettres, écrites un même nombre de fois. Ainsi dans la quantité $ab - ab + 3\,ab + abc$, les trois premiers termes sont semblables : le dernier ne l'est pas.

79. DÉFINITION III. On appelle *quantités incomplexes*, ou simples, ou monomes, celles qui sont seules; c'est-à-dire, qui ne sont ni précédées ni suivies de quelque autre quantité jointe par le signe $+$ ou par le signe $-$. Ainsi, $-a$ est une quantité incomplexe; de même que $+ab$, que $-abcd$, que $+aaa$, que $-aaa$.

80. DÉFINITION IV. On appelle *quantités complexes*, ou polynomes, celles qui sont composées de plusieurs termes joints ensemble par l'interposition des signes $+$ & $-$. Ainsi la quantité $ab - cd - bd$, est une quantité complexe composée de trois termes, savoir $ab$, $cd$, & $bd$. Les quantités complexes sont appellées binomes ou trinomes ou quadrinomes, selon qu'elles ont ou deux ou trois ou quatre termes.

81. REMARQUE. Lorsque dans une quantité complexe, il y a plusieurs termes négatifs de suite; celui ou *ceux qui sont après le premier de ces termes négatifs, ne diminuent pas la valeur de ce premier terme négatif.* Par exemple, si on a la quantité $+12 - 5 - 3$; cela signifie, non qu'il faut retrancher $5 - 3$ ou $2$, de $12$; mais qu'il faut ôter de $12$, les deux nombres $5$ & $3$ qui font $8$. Ainsi, $12 - 5 - 3 = 4$. Par la même raison, $12 - 5 + 3 = 10$ : parce que le terme positif $+3$ augmente le premier terme positif $+12$, ou diminue le terme négatif $-5$ qui le précede.

Il faut dire la même chose des quantités algébriques, quand elles contiennent plusieurs termes négatifs de suite : ces termes négatifs doivent être tous retranchés du terme positif qui les précéde; & il n'importe en quelle maniere les termes soient arrangés. Ainsi, $a + b - c - d$ est la même chose que $a - c + b - d$.

82. DÉFINITION V. Lorſque l'on compare deux quantités égales, en mettant le ſigne $=$ entre deux; cela s'appelle *équation* ou *égalité*. Par exemple, $5+3=8$, ou $a+b=c$, eſt une équation.

Les deux quantités que l'on compare, ſont appellées *membres de l'équation*. La quantité qui eſt à la gauche du ſigne d'égalité, eſt le *premier membre*; & celle qui eſt à la droite, eſt le *ſecond membre*.

83. REMARQUE. On peut enviſager les quantités algébriques, ou dans leurs combinaiſons entr'elles par augmentation & par diminution; c'eſt l'*Arithmétique des quantités algébriques*: ou dans leur élévation à différentes puiſſances; c'eſt l'*exaltation & l'extraction des quantités algébriques*. Tel eſt le double objet dont nous allons donner des notions ſuccintes, mais ſuffiſantes.

# ARTICLE PREMIER.

## *Arithmétique algébrique.*

## PARAGRAPHE PREMIER.

### L'ADDITION ET LA SOUSTRACTION.

84. REGLE I. LES Géometres font l'*Addition des quantités algébriques*, en les écrivant les unes à côté des autres, ſans rien changer aux ſignes dont elles ſont affectées. Pour ajouter $+a$ & $+b$, on écrit ſimplement $a+b$: pour ajouter $ab$, $+abc$, $-acd$; on écrit $ab+abc-acd$: & ainſi du reſte. Cette méthode porte avec elle-même ſa démonſtration.

85. REGLE II. La *Souſtraction algébrique* ſe fait en écrivant les quantités algébriques à côté l'une de l'autre; & en changeant les ſignes de la quantité que l'on

soustrait; les $+$ en $-$, & les $-$ en $+$. Par exemple, pour soustraire la quantité $+b$, de la quantité $+a$; on écrit $a-b$. Pour soustraire la quantité $ab-cd$, de la quantité $bc+cd$; on écrit $bc+cd-ab+cd$. La démonstration ou la raison de cette méthode est que :

I°. Lorsqu'on soustrait une quantité positive $+b$ d'une grandeur quelconque $+a$, la grandeur $+a$ est diminuée de toute la quantité $+b$ que l'on soustrait : on doit donc écrire $a-b$. Donc le signe $+$ de la quantité à soustraire, doit être changé en $-$. Soit $+b=10$ écus, & $+a=20$ écus : si de $+a$ on soustrait $+b$, on aura $+20$ écus $-10$ écus, ou $a-b$.

II°. Celui qui soustrait une quantité négative $-b$ d'une grandeur quelconque $+a$, augmente la quantité $a$ de toute la grandeur $b$; on doit donc écrire $a+b$: donc le signe $-$ de la quantité qu'il faut soustraire, doit être changé en $+$.

### *CHANGEMENT DES SIGNES.*

86. OBSERVATION. Ce changement des signes dans la Soustraction algébrique, demande un éclaircissement qui le rende plus sensible & qui le mette à l'abri de toute équivoque.

Dans l'Algebre, *les quantités positives & les quantités négatives sont également réelles.* Les dernieres ne sont pas la simple négation des premieres. Elles sont tout aussi réelles & tout aussi positives en elles-mêmes, que les premieres; avec cette différence, que les quantités négatives sont des quantités opposées aux quantités positives. Par exemple,

I°. Soit un mobile, que deux forces motrices, également réelles, poussent l'une vers l'orient, & l'autre vers l'occident; en telle sorte que la premiere a l'emporte

porte sur la seconde *b*. Ces deux forces sont également réelles en elles-mêmes : mais comme la derniere *b* est détruite ou vaincue par l'action prédominante de la premiere *a* ; je regarde la premiere *a*, qui produit un mouvement effectif vers l'orient, comme positive ; & la seconde *b*, qui s'oppose persévéramment à l'action de la premiere, comme négative. L'action de la premiere, déduction faite de la résistance de la seconde, sera $+ a$.

Mais si de cettte quantité positive $+ a$, je retranchois la quantité opposée & négative $- b$ ; il est clair que le mouvement vers l'orient seroit augmenté de toute la quantité qui lui résistoit, ou de tout le mouvement vers l'occident $- b$ ; & qu'alors le mouvement du mobile vers l'orient, au lieu d'être $+ a$, deviendroit par cette soustraction, $+ a + b$.

II°. De même, si j'ai une dette de 10 écus, qui est une quantité négative $- b$ dans la somme de mon bien ; mon bien, déduction faite de cette dette, sera $+ a$.

Mais si quelqu'un, payant ma dette, m'ôtoit ma dette ou la quantité négative $- b$, il est évident que mon bien seroit augmenté de toute la valeur de cette dette ou de cette quantité négative $- b$ ; & qu'alors mon bien, au lieu d'être $+ a$, deviendroit par cette soustraction, $+ a + b$.

III°. On conçoit par-là, comme nous l'avons d'abord annoncé, que les quantités positives & les quantités négatives sont également réelles en elles-mêmes ; & par conséquent, que les négatives ne sont pas la simple négation ou la simple absence des positives. Ainsi, dans le premier exemple, la quantité négative par rapport au mouvement vers l'orient, n'est pas de n'avoir point de mouvement vers l'orient ; mais c'est d'avoir un mouvemement opposé ; savoir, un mouvement vers l'occident. De même, la quantité néga-

tive, par rapport au bien, n'est pas de n'avoir point de bien; mais c'est d'avoir des dettes.

87. COROLLAIRE. Il suit de ces principes, que *c'est une même chose en Algebre, de soustraire* $+$, *ou d'ajouter* $-$ : *de soustraire* $-$, *ou d'ajouter* $+$.

## *COEFFICIENS ET RÉDUCTION ALGÉBRIQUE.*

88. DÉFINITION. Pour abréger l'expression algébrique, au lieu de $a + a$, on écrit $2\,a$. Car comme dans les nombres, $4 + 4$ est la même chose que deux fois 4, ou $2 \times 4 = 8$; de même pour les lettres, $a + a$ est la même chose que deux fois $a$, ou $2 \times a = 2\,a$. Par la même raison, au lieu de $a + a + a$, on écrit plus brievement $3\,a$: & ainsi des nombres suivans.

Le chiffre qui précede un terme algébrique, s'appelle *coefficient*. Il sert à exprimer combien de fois le même terme doit être écrit, soit avec le signe $+$, soit avec le signe $-$; ou plutôt combien de fois il doit être ajouté ou retranché. Cette méthode d'abréger les expressions algébriques, s'appelle *réduction* : elle n'a lieu que lorsque les termes sont semblables. Quand un terme n'a point de coéfficient, il est censé avoir pour coefficient l'unité. Ainsi $a = 1\,a$.

89. COROLLAIRE I. Il suit delà, que $a + 2\,a + 4\,a$ se réduisent à $7\,a$: pareillement que $-a - 2\,a - 5\,a$ se réduisent à la quantité $-8\,a$. C'est pourquoi, *lorsque les signes des termes sémblables sont les mêmes, la réduction se fait en ajoutant les coéfficiens.*

90. COROLLAIRE II. Il suit encore delà, que les termes $+a - a$ se détruisent; parce qu'une grandeur retranchée d'elle-même, devient nulle; & par conséquent que $5\,a - 2\,a$ se réduisent à $3\,a$: que $-5\,ab + 2\,ab$ se réduisent à $-3\,ab$. C'est pourquoi, *lorsque les signes des térmes semblablès sont différens, la réduction se fait en retranchant le plus petit coefficient du plus grand.*

Après l'Addition & la Soustraction, & généralement après toute opération algébrique, il faut réduire les termes semblables, s'il s'en trouve ; afin d'abréger l'expression.

## PARAGRAPHE SECOND.

### *LA MULTIPLICATION.*

91. DÉFINITION. MULTIPLIER une grandeur par une autre grandeur, c'est prendre la premiere autant de fois qu'il est marqué par la seconde. Dans toute multiplication, soit numérique, soit algébrique, l'unité doit être au multiplicateur, comme le multiplicande est au produit. (34.)

La multiplication algébrique est, ou *incomplexe*, ou *complexe :* elle est incomplexe, quand le multiplicande & le multiplicateur ne renferment chacun qu'un seul terme ; elle est complexe, quand, ou le multiplicande, ou le multiplicateur, ou l'un & l'autre à la fois renferment plus d'un terme.

### *EXPOSANT ALGÉBRIQUE.*

92. DÉFINITION. On nomme *exposant algébrique*, un chiffre placé à la suite d'une lettre : il signifie que la lettre qu'il suit a été multipliée par elle-même, pour être élevée à son quarré, ou à son cube, ou à sa quatrieme puissance ; & ainsi de suite. Par exemple, $a^2$ marque que la quantité $a$ est élevée à son quarré : $a^3$ marque que la quantité $a$ est élevée à son cube : $a^2b^2c^2$ marque que tout ce terme est élevé à son quarré ; $a^3b^3$ marque que tout ce terme est élevé à son cube, & équivaut à celui-ci $aaa\ bbb$.

L'exposant sert, comme on voit, à simplifier l'ex-

pression algébrique. Au lieu d'écrire *aaabbbccc*, on écrit $a^3b^3c^3$ : au lieu d'écrire *aaaa*, on écrit $a^4$ : & ainsi du reste.

Quand une quantité algébrique n'a point d'exposant, elle est supposée avoir l'unité pour exposant. Ainsi $a = a^1$ : $abc = a^1b^1c^1$ : $ax^3 = axxx$.

Il y a une grande différence entre le coefficient & l'exposant; par exemple, entre $3a$ & $a^3$. Car $3a = a + a + a$, donne une somme : au lieu que $a^3 = aaa$ donne un produit. Le coefficient (88) dénote une addition : l'exposant exprime une multiplication.

Pour multiplier deux termes algébriques l'un par l'autre, il faut assez souvent opérer sur quatre choses; savoir, sur les signes, sur les coefficiens, sur les lettres, & sur les exposants : comme on le verra dans les regles que nous donnerons, après avoir établi le lemme suivant.

### *Lemme Fondamental.*

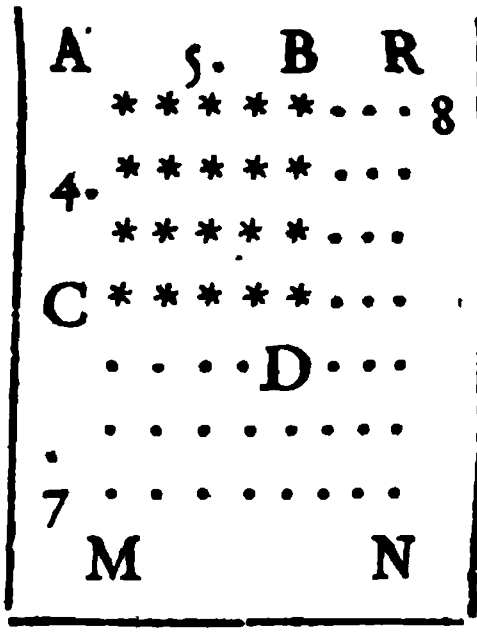
93. *Deux grandeurs, multipliées l'une par l'autre, donnent le même produit, soit qu'on multiplie la premiere par la seconde; soit qu'on multiplie la seconde par la premiere.*

Démonstration. Soit la rangée de points AB = 5, & la rangée de points AC = 4, qu'il faille multiplier l'une par l'autre.

I°. Il est évident que le produit sera le même; soit qu'on multiplie 5 par 4, soit qu'on multiplie 4 par 5. Car le produit sera toujours le nombre de points contenus dans le rectangle ABDC. Ainsi AB × AC donne un produit égal à ce rectangle : AC × AB donne un produit égal à ce rectangle : 5 × 4 ou 4 × 5 donnent un produit égal à ce rectangle.

II°. Maintenant augmentez ou diminuez par la pensée, les rangées de points ABR & ACM : vous aurez toujours pour produit des deux rangées, en les

multipliant indifféremment l'une par l'autre, le nombre de points qui formeront le rectangle AMNRA, qui résultera des deux rangées multipliées l'une par l'autre.* Or ce nombre de points est toujours le même, soit qu'on le prenne en multipliant la rangée AR par la rangée AM; soit qu'on le prenne en multipliant AM par AR.




III°. Soit maintenant un produit trouvé 20, par exemple, qu'il faille multiplier par une grandeur quelconque 3 : je dis que le nouveau produit qui résultera de cette nouvelle multiplication, sera encore le même, soit qu'on multiplie 20 par 3, soit qu'on multiplie 3 par 20. (*fig.* 89.)

Car il est clair que la premiere quantité 20 étant représentée par la surface ABCF; & la seconde quantité 3, par la profondeur CD; le produit sera toujours égal au nombre de cubes ou de divisions que présente le solide ABCFEGD. Or ce nombre de divisions est toujours le même, soit qu'on le prenne en multipliant la surface ABCF par la profondeur CD; soit qu'on le prenne en multipliant la profondeur CD par la surface ABCF. Donc deux grandeurs donnent toujours le même produit, soit qu'on multiplie la premiere par la seconde; soit qu'on multiplie la seconde par la premiere. C. Q. F. D.

## *MULTIPLICATION INCOMPLEXE.*

94. REGLE I. *En général, la multiplication algébrique se fait en joignant le multiplicande au multiplicateur.* Car en algebre, $aa$ est la même chose que $a \times a$: de même $aaa$ est la même chose que $aa \times a$: de même

encore $aabb$ est la même chose que $ab \times ab$. Ainsi, pour multiplier deux termes algébriques l'un par l'autre, il suffit de les écrire sans séparation, l'un à côté de l'autre. L'ordre & la clarté exigent qu'on range les lettres selon l'ordre alphabétique. La regle suivante fera voir en quelle occasion il faut mettre le signe $+$ ou le signe $-$, devant le produit.

95. REGLE II. *Lorsque les signes du multiplicande & du multiplicateur sont les mêmes, le produit doit avoir le signe $+$ : lorsque les signes sont différents, le produit doit avoir le signe $-$.*

DÉMONSTRATION. Le multiplicande & le multiplicateur peuvent avoir, ou tous les deux le signe $+$; ou tous les deux le signe $-$; ou l'un le signe $+$ & l'autre le signe $-$. Dans tous ces cas la regle est vraie.

I°. S'ils ont tous les deux le signe $+$; le produit doit avoir le signe $+$. Par exemple, $+a \times b = +ab$. Car une quantité positive, multipliée par une quantité positive, donne évidemment un produit positif.

II°. S'ils ont différents signes, l'un indifféremment le signe $+$, & l'autre le signe $-$; le produit doit avoir le signe $-$. Par exemple, $+a \times -b = -ab$. La raison en est sensible dans les nombres : $5 - 4 \times 6 = 30 - 24$, & non pas $= 30 + 24$. Car le multiplicande $5 - 4 = 1$ : or, $1 \times 6 = 6$, ou $= 30 - 24$. C'est pourquoi $- \times +$, ou $+ \times -$, $= -$.

III°. Si le multiplicande & le multiplicateur ont tous les deux le signe $-$; le produit doit avoir le signe $+$. Par exemple, $-a \times -b = ab$. La raison en est sensible dans les nombres : car $6 - 2 \times 4 - 2 = 24 - 8 - 12 + 4$; où l'on voit que le produit de $-2$ par $-2$ donne $+4$, & non pas $-4$. En effet le multiplicande $6 - 2 = 4$; de même le multiplicateur $4 - 2 = 2$ : or $4 \times 2 = 8$, ou $= 24 - 8 - 12 + 4$. C'est pourquoi $- \times - = +$.

Cette théorie est relative, comme on voit, à ce que nous avons dit ailleurs des quantités positives & négatives (86) : nous allons lui donner ici un nouveau développement, qui servira à la fois, & pour la multiplication & pour la division algébriques.

96. THÉORÊME. *En algebre, plus par plus, ou moins par moins, donne plus : & plus par moins, ou moins par plus, donne moins.*

DÉMONSTRATION. Pour faire la multiplication, il faut prendre le multiplicande autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicateur :

Donc, I°. Si le multiplicande est $+ a$ & le multiplicateur $+ b$; il faudra prendre la grandeur positive $a$, autant de fois que la grandeur positive $b$ contiendra d'unités. C'est pourquoi si $b$ contient trois unités ; le produit $ab$ sera la grandeur positive $3a$, & par conséquent le produit $ab$ aura le signe positif. $+ ab$.

Donc, II°. Si le multiplicande est positif $+ a$, & le multiplicateur négatif $- b$ ou $- 3$; il faudra prendre la grandeur positive $+ a$, non pas trois fois, mais $- 3$ fois : parce que le multiplicateur ne contient pas 3 unités, mais $- 3$ unités. Ainsi le produit $ab$ sera la même chose que $- 3a$; & son signe sera négatif. Car prendre une grandeur $- 3$ fois, c'est manquer trois fois de la mettre au produit, ou la soustraire trois fois du produit. $- ab$.

Donc, III°. Si le multiplicande est négatif $- a$, & le multiplicateur positif $+ b$; il faudra prendre la grandeur négative ou le défaut $- a$, autant de fois qu'il y a d'unités dans $b$, ou 3 fois : & par conséquent le produit $ab$ sera la même chose que $- 3a$, & son signe sera encore négatif. $- ab$.

Donc, IV°. Si le multiplicande est négatif $- a$, & le multiplicateur aussi négatif $- b$; il faudra prendre la grandeur négative ou le défaut $- a$, non pas

3 fois ; puisque le multiplicateur — $b$ ne contient pas trois unités : mais — 3 fois ; parce que le multiplicateur — $b$ contient — 3 unités. Or prendre — 3 fois, c'est soustraire trois fois ou ôter trois fois du produit ; & soustraire trois fois du produit une quantité négative ou un défaut, c'est y mettre trois fois l'opposé de cette quantité négative ou de ce défaut ; puisqu'une quantité négative ne peut être détruite ou ôtée, que par une quantité opposée (86). Ainsi prendre — 3 fois le défaut — $a$, c'est donner ou mettre au produit + 3 $a$ ; & par conséquent le produit $ab$ est la même chose que + 3 $a$, & son signe est positif. + $ab$. C. Q. F. D.

97. COROLLAIRE. *La même regle & la même démonstration ont lieu à l'égard de la division.*

EXPLICATION. Supposons que le dividende $a$ soit 6, & que le diviseur $b$ soit 2.

I°. Si l'un & l'autre ont le signe + ; le dividende 6 contiendra positivement le diviseur 2, trois fois : ainsi le quotient 3 aura le signe +.

II°. Si l'un & l'autre ont le signe — ; le défaut — 6 contiendra positivement (86) trois fois le défaut — 2, qui sera — 2 fois au quotient : par conséquent le quotient 3 aura encore le signe +.

III°. Si le dividende est — 6 & le diviseur + 2 ; le défaut — 6 ne contiendra pas trois fois la grandeur positive 2 ; mais trois fois le défaut ou le contraire de 2 ; ainsi le quotient 3 aura le signe —.

IV°. Si le dividende est + 6 & le diviseur — 2 ; la grandeur positive 6 ne contiendra pas trois fois le défaut — 2 ; mais trois fois son contraire ou la grandeur positive 2 : donc le quotient 3 aura aussi le signe —. C. Q. F. D.

## MULTIPLICATION COMPLEXE.

98. AXIOME. *En algebre, comme en arithmétique, pour avoir le produit de deux grandeurs, il faut que toutes les parties du multiplicande soient multipliées par toutes les parties du multiplicateur.* Par exemple, pour avoir le produit de $a+b$ par $m+n$; il faut que la grandeur $a$ soit multipliée par $m$ & par $n$; il faut que la grandeur $b$ soit multipliée aussi par $m$ & par $n$.

Comme la division est l'opération inverse de la multiplication; il s'ensuit que *pour avoir un quotient, il faut que toutes les parties du diviseur divisent toutes les parties du dividende.*

99. REGLE I. *Si le multiplicande est une quantité complexe, & le multiplicateur une quantité incomplexe; il faut multiplier chaque terme du multiplicande par le multiplicateur, en ayant égard aux signes.*

EXPLICATION. I°. Soit $a+b+c$, qu'il faille multiplier par $n$. Il est clair que le multiplicateur positif $n$ doit multiplier les trois termes positifs du multiplicande; & alors on aura pour produit les trois termes positifs $an+bn+cn$.

II°. Soit $a-b+dd$, qu'il faille multiplier par $-n$. Il est clair que le multiplicateur négatif $-n$ doit multiplier successivement tous les termes du multiplicande, en donnant des produits, tantôt négatifs, tantôt positifs (96). On aura donc pour produit $-an+bn-ddn$.

100. REGLE II. *Si le multiplicande & le multiplicateur sont des quantités complexes; il faut multiplier tout le multiplicande, par chaque terme du multiplicateur, en ayant égard aux signes.*

EXPLICATION. I°. Soit $aa+b+ac$, qu'il faille

multiplier par $a + b + c$. On écrira le multiplicateur au-dessous du multiplicande; & on multipliera chaque terme du multiplicande, d'abord par le premier terme du multiplicateur, ensuite par le second, & enfin par le troisieme; comme on le voit ici: la somme de tous ces produits est le produit total.

$$\begin{array}{c} aa + b + ac \\ a + b + c \\ \hline aaa + ab + aac. \\ aab + bb + abc. \\ aac + bc + acc. \\ \hline \end{array}$$

II°. Soit $aa - ab + b$, qu'il faille multiplier par $- a + b$. On écrira le multiplicateur sous le multiplicande; & l'on fera la multiplication, en changeant les signes, quand il le faut (96); comme on le voit ici. Après quoi on fera la réduction des termes semblables. (88.)

$$\begin{array}{c} aa - ab + b \\ - a + b \\ \hline - aaa + aab - ab. \\ + aab - abb + bb \\ \hline \end{array}$$

101. Regle III. *Si les termes que l'on multiplie sont affectés de coefficiens; on multiplie les coefficiens les uns par les autres.* Par exemple, $3a \times 2b$ donne $6ab$. La raison en est, que $3a = a + a + a$, comme on l'a dit; & pareillement $2b = b + b$. Or $a + a + a \times b + b$ donne $ab + ab + ab + ab + ab + ab = 6ab$: donc $3a \times 2b = 6ab$.

102. Regle IV. *Si les quantités que l'on multiplie, sont exprimées par les mêmes lettres affectées d'exposans, on abrege l'opération en ajoutant les exposans.* Par exemple, $a^3 \times a^2$ donne $a^5$. La raison en est, que $a^3 = aaa$, & $a^2 = aa$; or $aaa \times aa = aaaaa = a^5$.

De même, $b \times b^2 = b^3$ : parce que la premiere quantité, qui n'a pas d'exposant marqué, a toujours l'unité pour exposant. Ainsi $b \times bb = bbb = b^3$.

# PARAGRAPHE TROISIEME.

## *LA DIVISION.*

103. DÉFINITION. DIVISER une grandeur par une autre, c'eſt exprimer combien de fois la premiere contient la ſeconde, ou quelque partie de la ſeconde. Par la Multiplication, on cherche un produit : par la Diviſion, on cherche un quotient. Comme $a \times a = aa$; par la raiſon contraire, $\frac{aa}{a} = a$ : puiſque la diviſion détruit ce qu'a produit la multiplication.

La diviſion, ainſi que la multiplication, a des regles pour les lettres, pour les ſignes, pour les expoſants, pour les coefficiens. Elle eſt *incomplexe*, quand le dividende & le diviſeur n'ont chacun qu'un ſeul terme : elle eſt *complexe*, quand le dividende, ou le diviſeur, ou l'un & l'autre à la fois, ont plus d'un terme. Ainſi $aa$ diviſé par $b$, eſt une diviſion incomplexe : $a+b$ diviſé par $d$, eſt une diviſion complexe.

## *DIVISION INCOMPLEXE.*

104. REGLE I. *En général, la diviſion algébrique ſe fait en mettant le dividende au-deſſus du diviſeur, & en les ſéparant par un trait.* Par exemple, $ab$ diviſé par $a$, eſt $\frac{ab}{a}$. De même $aaa$, diviſé par $aa$, eſt $\frac{aaa}{aa}$, ou $\frac{a^3}{a^2}$. Le quotient doit avoir tantôt le ſigne $+$, & tantôt le ſigne $-$.

105. REGLE II. *Si le dividende & le diviſeur ont les mêmes ſignes, le quotient aura le ſigne $+$ : s'ils ont des ſignes différents, le quotient aura le ſigne $-$.* Par exemple, $ab$ diviſé par $b$, a pour quotient $+\frac{ab}{b}$. De même

$-ab$ divisé par $-b$, a pour quotient $+\frac{ab}{b}$.

Mais $+ab$ divisé par $-b$, a pour quotient $-\frac{ab}{b}$: demême $-ab$ divisé par $+b$, a pour quotient $+\frac{ab}{b}$. (97.)

106. REGLE III. *Dans la division algébrique, on efface dans le dividende les lettres qui lui sont communes avec le diviseur; & celles qui y restent, donnent le quotient.*

EXPLICATION. Soit ce quotient algébrique $+\frac{ab}{b}$ ou $-\frac{ab}{b}$, dont le dividende est $ab$: la regle prescrit d'effacer dans le dividende & dans le diviseur la lettre commune $b$; & annonce que la lettre $a$ qui reste au dividende, est le quotient de cette division.

Pour rendre sensible la vérité de cette regle, soit $a = 5$; soit $b = 10$. $a \times b$ sera $ab = 50$: voilà une multiplication. Par la raison contraire $ab$ divisé par $b$, sera 50 divisé par 10: or $\frac{50}{10} = 5$; & par la même, $= a$ seul. Donc dans la division $\frac{ab}{b}$, la lettre $b$ commune au dividende & au diviseur doit disparoître & n'être point au quotient qui sera $a$ seul. Ce quotient $a$ sera, ou positif, ou négatif; selon qu'il aura le signe $+$ ou le signe $-$, qu'on ne change point en effaçant les lettres communes au dividende & au diviseur.

Par la même raison, dans les quotients $+\frac{aaa}{aa}$ ou $-\frac{aaa}{aa}$, le quotient réduit est $+a$ ou $-a$.

Il faut remarquer ici, que lorsque le dividende & le diviseur n'ont point de lettres communes, on ne peut point effectuer la division, mais seulement l'indiquer. Par exemple, on ne peut pas effectuer la division de $a$ par $b$: on se borne à l'indiquer simplement

en cette maniere $\frac{a}{b}$; qui marque que la quantité $a$ doit être divisée par la quantité $b$, quand on en viendra au calcul numérique.

Quand le dividende & le diviseur ont à la fois, & des lettres communes, & des lettres différentes; après avoir effacé dans l'un & dans l'autre les lettres qui leur sont communes, on met en fraction les lettres restantes, qui sont le quotient réduit autant qu'il est possible. Par exemple, $\frac{aaam}{aan} = \frac{am}{n}$.

## *DIVISION COMPLEXE.*

107. OBSERVATION. La division complexe en Algebre, ainsi qu'en Arithmétique, consiste à chercher, relativement à chaque membre du dividende, un *quotient*, un *produit*, un *reste* (45) : afin de trouver le quotient de tout le dividende, en trouvant séparément le quotient de toutes ses parties ou de tous ses termes. Quoi qu'il arrive fort rarement que cette division puisse se faire, il faut cependant savoir comment elle se fait effectivement en quelques occasions.

108. REGLE I. *Si le dividende est une quantité complexe, & le diviseur une quantité incomplexe; il faut diviser chaque terme du dividende par le diviseur, & écrire chaque fois le quotient, lequel doit être multiplié aussi chaque fois par le diviseur, pour en retrancher le produit du dividende, afin d'avoir un reste, s'il y en a un.*

EXPLICATION I. Soit $ab - ad$, à diviser par $a$. Après avoir écrit le diviseur à côté du dividende, comme dans la division arithmétique; je les sépare par un trait, & je tire une ligne au dessous : le quotient sera placé sous le diviseur.

I°. Je divise le premier terme $ab$ par $a$; & j'ai pour

*quotient* $b$ (106), que j'écris sous le diviseur. Je multiplie le quotient $b$ par le diviseur $a$; & j'ai un *produit* qui est $ab$. Je soustrais ce produit $ab$ du premier membre $ab$ du dividende; & je n'ai point de *reste*. La division est achevée pour ce premier membre; & je passe au second.

| $ab - ad$ | $a$ |
|---|---|
| $- ab + ad$ | $b - d$ |
| $0 \quad 0$ | Quotient. |

II°. Je divise le second membre négatif $-ad$ par le diviseur positif $a$; & j'ai pour *quotient* $-d$ (105). Je multiplie le quotient $-d$ par le diviseur $+a$; & j'ai le *produit* négatif $-ad$ (97). Je soustrais ce produit, du second membre du dividende (85); & je n'ai point de reste. La division est donc achevée; & le quotient de $\frac{ab-ad}{a}$ est $b-d$.

EXPLICATION II. Soit la quantité algébrique $8\,abbc - 12\,abcc + 4\,bbcf$ à diviser par $4\,bc$.

$$\begin{array}{l|l} \overset{0}{8\,abbc} - \overset{0}{12\,abcc} + \overset{0}{4\,bbcf} & 4\,bc \quad \text{Diviseur.} \\ \hline \text{Produit; \textit{signes changés.}} & \text{Quotient.} \\ -8\,abbc + 12\,abcc - 4\,bbcf & 2\,ab - 3\,ac + bf \end{array}$$

I°. Je divise le premier terme $8\,abbc$ par le diviseur $4\,bc$, & effaçant les lettres communes à l'un & à l'autre, j'ai pour quotient $2\,ab$. Je multiplie le quotient trouvé par le diviseur, & j'ai le produit $+8\,abbc$, que je soustrais du dividende, en changeant son signe de $+$ en $-$; & faisant la réduction, j'efface les deux termes $8\,abbc$, & $-8\,abbc$, qui se détruisent, ce que je désigne en écrivant o au-dessus de ces termes.

II°. Je divise le second terme $-12\,abcc$ par le diviseur $4\,bc$, & faisant les mêmes opérations que ci-dessus, j'ai pour quotient $-3\,ac$; & après la multiplication, & la réduction des termes semblables, il ne reste plus que $+4\,bbcf$.

III°. Divisant ce terme $+4bbcf$ par le diviseur, j'ai pour quotient $+bf$; & après la multiplication, & la réduction, il ne reste rien, & l'opération est finie.

109. REGLE II. *Si le dividende & le diviseur sont tous les deux des quantités complexes; on opere comme dans la division numérique, observant seulement de plus, qu'il faut employer la réduction des termes semblables chaque fois que l'on a opéré sur un membre de la division.* Par exemple, s'il faut diviser $6abb - 2bbc - 3aab + abc$, par $2b - a$; après avoir disposé les quantités comme il suit, il faut:

$$\begin{array}{c|l}
\overset{0}{6abb} - \overset{0}{2bbc} - \overset{0}{3aab} + \overset{0}{abc} & \text{Diviseur,} \\
 & 2b - a \\
\hline
-6abb + 3aab + 2bbc - abc & 3ab - bc
\end{array}$$

I°. Diviser le premier terme du dividende par le premier terme du diviseur; & on aura le quotient $3ab$, qu'il faut écrire sous le diviseur.

II°. Multiplier le quotient trouvé $3ab$ par le diviseur $2b - a$: ce qui donne le produit $6abb - 3aab$, qu'il faut écrire sous le dividende.

III°. Soustraire du dividende le produit, en changeant les signes: ce qui donne $-6abb + 3aab$.

IV°. Faire la réduction des termes qui se trouvent semblables dans le dividende & dans le produit soustrait, & effacer les termes qui se détruisent, ou mettre un point ou un zero dessus.

V°. Cela fait, il reste dans cet exemple les termes $-2bbc + abc$ au dividende, qui font le second nombre de la division, sur lequel il faut opérer comme sur le premier; & comme après la réduction des termes semblables il ne reste plus rien, la division est achevée.

110. REGLE III. *Si le dividende & le diviseur sont affectés de coefficiens, il faut diviser les coefficiens:* par la raison contraire à celle pour laquelle on les mul-

tiplie dans la multiplication. Par exemple, $\frac{6ab}{2a} = 3b$.

111. REGLE IV. *Si le dividende & le diviseur sont exprimés par les mêmes lettres affectées d'exposans, il faut soustraire les exposans :* par une raison contraire à celle pour laquelle on les ajoute dans la multiplication (102). C'est pourquoi $\frac{a^6}{a^2} = a^4$.

112. REMARQUE. *Si le dividende & le diviseur sont des quantités incomplexes, & sont les mêmes lettres affectées d'exposans ;* il peut arriver :

I°. Que l'exposant du dividende *soit plus grand* que l'exposant du diviseur ; & alors l'exposant du quotient sera positif. Par exemple, $\frac{a^5}{a^2} = a^3$ : parce que $\frac{a^5}{a^2} = a^{5-2} = a^3$.

II°. Que l'exposant du dividende & celui du diviseur *soient égaux ;* & dans ce cas l'exposant du quotient sera zero. Par exemple, $\frac{a^3}{a^3} = a^0$ : parce que $\frac{a^3}{a^3} = a^{3-3} = a^0$. (La quantité $a^0$ est le quotient $\frac{a}{a} = 1$.)

III°. Que l'exposant du dividende *soit plus petit* que celui du diviseur ; & alors l'exposant du quotient sera négatif. Par exemple, $\frac{a^2}{a^5} = a^{2-5}$ : car $\frac{a^2}{a^5} = a^{2-5} = a^{-3}$. (La quantité $a^{-3}$ est $= \frac{1}{a^3}$ ou $\frac{1}{aaa}$.)

## *AUTRES COMBINAISONS DES GRANDEURS.*

113. OBSERVATION. Après avoir appris à connoître les différentes combinaisons numériques & algébriques des grandeurs, pour en trouver, ou la somme, ou la différence, ou le produit, ou le quotient ; il est à propos d'observer ici, comme en passant, comment & en combien de manieres, régulieres ou irrégulieres, peuvent se combiner ou s'arranger entr'elles, un certain nombre donné de grandeurs. Cette observation peut devenir utile ou même nécessaire en une

une foule de circonstances, que nous nous dispenserons de marquer & de spécifier.

114. PROBLÊME. *Étant donné un certain nombre de quantités, a, b, c, d, e, &c, assigner toutes les combinaisons différentes dont elles sont susceptibles.*

SOLUTION. I°. Deux grandeurs *a* & *b* ne sont susceptibles que de deux arrangemens différens; savoir, *ab*, *ba*.

II°. Trois grandeurs *a*, *b*, *c*, peuvent recevoir 3 fois 2, ou 6 arrangemens. Car chacune des trois étant mise dans le premier rang, les deux autres peuvent recevoir deux arrangemens : ce qui fait 6 arrangemens différens qu'on voit ici encadrés.

| | |
|---|---|
| *a b c*, | *a c b*. |
| *b a c*, | *b c a*. |
| *c a b*, | *c b a*. |

III°. Quatre grandeurs *a*, *b*, *c*, *d*, peuvent recevoir 4 fois 6 arrangememens ou 24 arrangemens différens. Car chacune étant mise au premier rang, les trois autres peuvent recevoir 6 arrangemens ; ce qui fait 6 fois 4, ou 24 arrangemens différens, tels qu'on les voit exposés & épuisés dans ce cadre.

| | | |
|---|---|---|
| *abcd*, *abdc* : | *acbd*, *acdb* : | *adbc*, *adcb*. |
| *bacd*, *badc* : | *bcad*, *bcda* : | *bdac*, *bdca*. |
| *cabd*, *cadb* : | *cbad*, *cbda* : | *cdab*, *cdba*. |
| *dabc*, *dacb* : | *dbac*, *dbca* : | *dcab*, *dcba*. |

IV°. De même, & par la même raison, cinq grandeurs peuvent recevoir 5 fois 24, ou 120 arrangemens différens : six grandeurs en peuvent recevoir 6 fois 120, ou 720 : sept grandeurs en peuvent recevoir 7 fois 720, ou 5040 : huit grandeurs en peuvent recevoir 8 fois 5040, ou 40320 : & ainsi de suite pour les nombres suivans. Ainsi huit personnes peuvent avoir autour d'une table, 40320 arrangemens différens : huit tons d'un octave de musique, sont susceptibles

de 40320 différentes combinaisons régulieres ou irrégulieres.

# ARTICLE SECOND.

## EXALTATION ET EXTRACTION DES GRANDEURS.

115. OBSERVATION. Cet article a pour objet la *composition* & la *décomposition* des grandeurs, soit numériques, soit algébriques. La composition & la décomposition des grandeurs numériques, nous prépareront à entendre ce qui regarde la composition & la décomposition des grandeurs algébriques. La composition s'appelle *formation des puissances*. La décomposition est appellée *extraction des racines*.

116. DÉFINITION I. Un nombre quelconque, multiplié par lui-même, donne un produit. Ce produit s'appelle *quarré :* le nombre qui multiplié par lui-même a donné le produit, s'appelle *racine quarrée*. Par exemple $5 \times 5 = 25$ : le nombre 25, considéré comme un produit de 5, est un quarré; & le nombre 5 est la racine de ce quarré.

117. DÉFINITION II. Un nombre quelconque multiplié par lui-même, donne un produit ou un *quarré*. Ce produit ou ce quarré, multiplié par le nombre qui l'a formé, donne un nouveau produit qui s'appelle *cube*. Par exemple, $5 \times 5 = 25$ : $25 \times 5 = 125$ : le nombre 125, considéré comme un produit de 5 multiplié d'abord par lui-même, & multipliant ensuite son produit, est un cube; & le nombre 5 est la *racine cubique* de ce nombre. De même $10 \times 10 = 100$; c'est un quarré : $10 \times 10 \times 10 = 1000$; c'est un cube. Dans l'un & dans l'autre cas, 10 est la racine, ou quarrée, ou cubique.

118. DÉFINITION III. *Tout nombre peut être appellé racine*, si on ne le considere point comme produit par quelque autre nombre, ou par lui-même. Cette racine est appellée *la premiere puissance*, laquelle est un nombre quelconque multiplié par l'unité.

Le produit d'une racine multipliée par elle-même, s'appelle le quarré, ou la *seconde puissance* de cette racine. Le produit d'un quarré par sa racine s'appelle le cube, ou la *troisieme puissance* de cette racine. Le produit du cube par la racine, s'appelle la *quatrieme puissance* de la racine. Le produit de la quatrieme puissance par la racine, est la *cinquieme puissance* : & ainsi de suite.

119. DÉFINITION IV. On appelle *quarré parfait*, un nombre qui est précisément & sans reste le produit d'une racine multipliée par elle-même : comme 4, qui est le quarré de 2 ; & 36, qui est le quarré de 6, sans reste. On appelle *quarré imparfait*, un nombre qui par-dessus un quarré parfait, contient encore un reste : comme 6, qui outre le quarré de 2, lequel est 4, renferme encore 2 par-dessus.

120. DÉFINITION V. De même on appelle *cube parfait*, un nombre qui est précisément & sans reste le produit d'un quarré par sa racine : comme 8 qui est cube de 2 ; comme 216 qui est cube de 6 ; aussi sans reste. On appelle *cube imparfait*, un nombre, qui outre un cube parfait, renferme encore un reste : comme 10, qui outre le cube de 2 qui est 8, renferme encore 2 : ou bien 250, qui outre le cube de 6 qui est 216, renferme encore 34 par-dessus.

La formation des puissances en fera entendre la décomposition : comme on le verra dans les trois paragraphes suivans.

121. DÉFINITION VI. Une surface dont les quatre angles sont droits & les quatre côtés égaux, est un *quarré* : telle est une face d'un dez à jouer.

Un ſolide terminé par ſix ſurfaces qui ſont des quarrés, & dont les angles ſont droits, eſt un *cube*: tel eſt un dez à jouer.

Une ſurface terminée par quatre angles droits & qui a deux côtés égaux & deux côtés inégaux, eſt un *rectangle*: telle eſt le plan ou la face d'une regle.

Un ſolide dont les faces ſont un quarré ou un rectangle, eſt un *parallélopipede*: telle eſt une ſolive équarrie; telle eſt une moitié de dez coupée parallelement à ſa baſe.

## PARAGRAPHE PREMIER.

### *FORMATION DU QUARRÉ.*

122. HYPOTHESE. SOIT une ligne AB, par le moyen de laquelle nous allons préſenter & à l'eſprit & à l'œil, toutes les propriétés du quarré, tout ce qui concerne ſa compoſition & ſa décompoſition, qu'on pourra repréſenter indifféremment, ou par des nombres, ou par des lettres. (*fig.* 1.)

I°. Si je multiplie cette ligne AB, par elle-même; j'aurai un quarré ABFG. Suppoſons qu'elle exprime 20 toiſes ou 20 dez à jouer : en multipliant par elle-même la ligne AB, j'aurai pour produit 20 rangées de toiſes ou de dez, exprimées par le quarré ABFG. $20 \times 20 = 400$.

II°. Si j'augmente la ligne AB, de la quantité BC; la ligne AC multipliée par elle-même donnera pour produit le quarré ACNM. J'augmente donc le premier quarré; 1°. de tout le rectangle FBCR: 2°. de tout le rectangle MGFP égal au précédent: 3°. de tout le petit quarré PFRN.

Suppoſons que BC exprime 5 toiſes ou 5 dez: en multipliant la ligne AC par elle-même, j'aurai aug-

menté le premier quarré; 1°. de cinq fois 20 rangées de toifes ou de dez, pour le rectangle BR; 2°. de cinq fois 20 rangées de toifes ou de dez, pour le rectangle MF; 3°. de cinq fois 5 rangées de toifes ou de dez, pour le petit quarré NF.

III°. Si j'augmente encore la ligne AC, de la quantité CD; la ligne AD multipliée par elle-même formera le quarré ADST. J'augmente donc le quarré ACNM; 1°. de tout le rectangle NCDV: 2°. de tout le rectangle TMNO: 3°. de tout le petit quarré NOSV.

Suppofons que CD exprime 2 toifes ou 2 dez: en multipliant la ligne AD par elle-même, j'aurai augmenté le quarré ACNM; 1°. de deux fois 25 rangées de toifes ou de dez, pour le rectangle CV: 2°. de deux fois 25 rangées de toifes ou de dez, pour le rectangle MO égal au précédent: 3°. de deux fois 2 rangées de toifes ou de dez, pour le petit quarré NS.

IV°. Si j'augmentois encore la ligne AD, il eft évident que les nouvelles augmentations fe feroient comme celles que nous venons de développer.

123. COROLLAIRE I. *Le quarré d'une quantité complexe renferme donc des quantités qu'on peut fuivre & obferver dans leur formation.* (fig. 1.)

EXPLICATION. Nous appellerons *a*, toute quantité AB ou AC, qui eft la racine d'un quarré trouvé & connu: nous appellerons *b*, toute quantité BC ou CD, qui augmente la racine d'un quarré précédent & déjà connu.

I°. Le quarré du premier terme AB $=a$, ne renferme que lui-même; favoir, le quarré ABFG: ce quarré eft $=aa$.

II°. Le quarré des deux premiers termes AB$+$BC$=a+b$, renferme de plus le double du premier terme multiplié par le fecond, avec le quarré du

ſecond ; ſavoir, les rectangles BR & GP avec le quarré FN : ce ſurplus eſt $2\,ab + bb$.

III°. Le quarré des trois premiers termes $AB + BC = a$, & $DC = b$, contient de plus le double des deux premiers termes multiplié par le troiſieme, avec le quarré du troiſieme ; ſavoir, les rectangles CV & TN avec le quarré NS : ce ſurplus eſt encore $2\,ab + bb$.

IV°. Le quarré des quatre premiers termes $AB + BC + CD = a$, & $DE = b$, renfermera de plus le double des trois premiers termes multiplié par le quatrieme, plus le quarré du quatrieme : ce ſurplus ſera encore $2\,ab + bb$ ; & ainſi de ſuite à l'infini.

124. COROLLAIRE II. *Les quarrés de toutes les quantités poſſibles, peuvent donc être repréſentés par cette formule générale* $aa + 2\,ab + bb$.

EXPLICATION. Dans cette formule, $aa$ exprime le quarré du premier terme : $2\,ab + bb$ exprime ce qu'ajoute au quarré connu, le terme ſuivant. Il eſt clair qu'après avoir pris la racine $a$ du premier terme, la formule ſe réduit pour le terme ſuivant à celle-ci, $2\,ab + bb$ ; & que cette derniere formule revient encore à celle-ci ; $\overline{2\,a + b} \times b$.

Cette formule convient aux nombres, ainſi qu'aux lettres : car les nombres exprimés par pluſieurs chiffres, peuvent être conſidérés comme des quantités complexes. Par exemple, 6342 eſt égal à $6000 + 300 + 40 + 2$ ; & par conſéquent c'eſt une quantité complexe de quatre termes, qui donneroit, comme on le verra bientôt, deux chiffres à la racine.

125. COROLLAIRE III. *Quand on a bien compris la formation du quarré, il eſt facile d'en entendre la décompoſition :* puiſque la décompoſition, ou l'extraction des racines, eſt l'opération inverſe de la formation du quarré par les mêmes racines. (*fig.* 1.)

Il eſt clair qu'en prenant la racine AB, qui produit

le grand quarré; qu'en prenant ensuite la racine BC, qui ajoute trois rectangles au grand quarré; qu'en prenant enfin la racine CD, qui ajoute encore trois rectangles à la somme précédente, on aura la racine quarrée de toute la grandeur ADST; & ainsi du reste.

Nous allons placer ici une table, utile pour faire trouver tout à coup *le plus grand quarré* des neuf premiers chiffres. Nous y joindrons quelques autres quarrés, relatifs à quelques observations que nous ferons bientôt.

| *Racine.* | *Quarré.* | *Racine.* | *Quarré.* |
|---|---|---|---|
| 1. . . . . . . | 1. | 10. . . . . . . . | 100. |
| 2. . . . . . . | 4. | 11. . . . . . . . | 121. |
| 3. . . . . . . | 9. | 99. . . . . . . | 9,801. |
| 4. . . . . | 16. | 100. . . . . | 10,000. |
| 5. . . . . | 25. | 999. . . . . | 998,001. |
| 6. . . . . | 36. | 1,000. . . . | 1,000,000. |
| 7. . . . . | 49. | 9,999. . . | 99,980,001. |
| 8. . . . . | 64. | 10,000. | 100,000,000. |
| 9. . . . . | 81. | 99,999. | 9,999,800,001. |

126. REMARQUE I. En jettant les yeux sur cette table des quarrés, on verra & on observera:

I°. Qu'une racine quarrée, composée *d'un seul chiffre*, a toujours pour quarré au moins un chiffre, & jamais plus de deux.

II°. Qu'une racine quarrée, composée *de deux chiffres*, a toujours pour quarré au moins trois chiffres, & jamais plus de quatre.

III°. Qu'une racine quarrée, composée *de trois chiffres*, a toujours pour quarré au moins cinq chiffres, & jamais plus de six.

IV°. Qu'une racine quarrée, composée *de quatre chiffres*, a toujours pour quarré au moins sept chiffres, & jamais plus de huit.

V°. Qu'une racine quarrée, composée *de cinq chiffres*, a toujours pour quarré au moins neuf chiffres, & jamais plus de dix : & ainsi de suite à l'infini, de deux en deux.

127. REMARQUE II. On peut observer aussi dans cette table, que *quand deux nombres ne different entr'eux que d'une unité ; le quarré du petit nombre est moindre que le quarré du grand, de deux fois sa racine plus l'unité.* Par exemple, soient ces deux nombres ou ces deux racines 10 & 11 : leurs quarrés seront 100 & 121. Le petit quarré est moindre que le grand, de 2 fois 10 + 1. De même, le quarré de 99 differe du quarré de 100, de deux fois 99 & d'une unité, ou de 198 + 1.

On peut généraliser cette remarque & en faire une démonstration mathématique en cette maniere. En nommant $a$ le moindre nombre, le nombre plus grand d'une unité, sera $a + 1$ : alors le premier quarré est $aa$ ; & le second (100) est $aa + 2a + 1$. Il faut observer, à l'occasion de ce second quarré, que quand le multiplicateur est l'unité, les produits ne different pas des multiplicandes.

128. REMARQUE III. Comme *l'extraction de la racine quarrée est d'un usage infiniment utile & très-fréquent dans toutes les parties des Mathématiques ;* nous avons cru ne devoir rien négliger pour tâcher de donner sur cet objet, & une théorie plus lumineuse, & une méthode plus commode, que celles qu'on donne ordinairement. On a vu la théorie : voici la méthode.

I°. On partage d'abord, le nombre donné, en tranches de deux chiffres chacune, excepté la premiere à gauche qui peut n'en avoir qu'un : cette division en tranches doit commencer par la droite. On tire ensuite au-dessous du nombre donné, une ligne qu'on coupe par une perpendiculaire, comme

dans la division. *Il y aura à la racine, autant de chiffres, qu'il y a de tranches dans le nombre donné* (126). On placera successivement chaque chiffre de cette racine, à mesure qu'on le trouvera, à côté du nombre donné.

II°. Pour trouver cette racine, on emploiera la méthode suivante, qui paroîtra d'abord un peu obscure, mais dont l'obscurité cessera dès la seconde ou troisieme fois qu'on la mettra en pratique. Cette méthode consiste à se servir de la formule que voici: $2a + b \times b$. (124.)

On va voir dans les problêmes suivants, comment cette méthode ou formule se met en pratique: on obscurciroit ceci, en voulant l'éclaircir autrement que par des exemples.

## *EXTRACTION DES RACINES QUARRÉES.*

129. PROBLÊME I. *Trouver la racine quarrée du nombre* 1296.

SOLUTION. Ce nombre 1296 est un quarré parfait ou imparfait: on demande quelle est sa racine, ou quel est le nombre qui, multiplié par lui-même, donne un produit égal à 1296. Ce quarré 1296 renferme quatre chiffres: sa racine en aura deux (126), qu'il faut chercher par la formule $aa$ qui donnera le plus grand quarré du premier membre 12; & par la formule $2a + b \times b$, qui donnera le quarré du second membre. (124.)

I°. Je cherche quel est *le plus grand quarré* qui soit contenu dans le premier membre 12; & je vois que c'est 9. J'écris ce quarré 9 sous le premier membre ou sous la premiere tranche 12; & j'écris sa *racine* 3, à côté du nombre donné. Je soustrais ce quarré 9, du premier membre 12; & j'ai pour reste 3, que j'écris au-dessous. J'ai déjà la racine 3 de la plus grande partie du nombre

| | | |
|---|---|---|
| *Quarré.* | | $a$ $b$ |
| Ier Membre. | 12, 96 | 3 6 *Racine.* |
| | 9 | $6 = 2a$ : Diviseur. |
| IIe Membre. | 39.6. | $6 = + b$ |
| | 39 6. | $6 = \times b$ |
| | | $396 =$ Produit. |

Reste. . . . (0.

Preuve. $36 \times 36 = 1296.$

nombre donné : puisque j'ai la racine du premier chiffre & d'une partie du second ; & que le premier chiffre vaut plus que tous ceux qui le suivent. (16.)

Les trois unités restantes du premier membre 12, ne pouvant pas donner une unité de plus à la racine 3 ; je joins ces trois unités à la tranche suivante, avec laquelle elles vont faire un même tout, dont je vais chercher la racine quarrée par la formule $2a + b \times b$.

Cette formule, qui auroit également lieu pour les membres suivants, si le quarré ou nombre donné contenoit un plus grand nombre de tranches (124), sert à faire trouver relativement au membre quelconque auquel on l'applique, & un *quotient*, & un *produit*, & un *reste* : comme on va le voir ici, & dans les exemples suivants.

IIº. Pour trouver la racine du second membre 396 ; j'appelle $a$, la racine trouvée 3 ; & je la prends 2 fois : ce qui me donne $6 = 2a$. Faisant ensuite abstraction du dernier chiffre du membre sur lequel j'opere, & séparant ce dernier chiffre des chiffres précédens par un point, je demande : en tout le reste 39, combien de fois $2a$ ou 6 ? Il y est 6 fois. Voilà le nombre ou le *quotient* 6, que nous appellerons $b$ : après l'avoir

écrit au petit angle à côté du 5 ; il faut l'écrire aussi au-dessous de $2a$, en l'avançant d'un pas vers la droite. La somme des deux nombres $2a + b$, ainsi arrangés, est 66. Je multiplie 66 ou $2a + b$ par 6, qui est ici $b$ ; comme le marque la formule : & j'ai pour *produit* 396. Après quoi, écrivant ce produit sous le second membre, je fais la soustraction : il n'y a point de *reste* ; & l'opération est achevée. Ainsi la racine demandée est 36 ; c'est ici la racine d'un quarré parfait.

130. REMARQUE I. Après cette opération, s'il reste quelque chose de la derniere tranche du nombre donné, on néglige ce reste ; n'étant pas possible de tirer la racine quarrée exacte & précise, d'un nombre qui n'est pas un quarré parfait. Par exemple, si le nombre donné eût été 1298, on auroit eu un reste 2, à la place du reste 0.

I°. Quand ce reste est *égal* à la racine trouvée, il pourroit augmenter la racine trouvée, d'une demi-unité à peu près (127). Quand ce reste est un peu *plus petit* ou un peu *plus grand* que la racine trouvée, on voit assez aisément quelle est à peu près sa valeur relativement à la racine.

II°. Si on a besoin d'une très-grande précision dans la racine, ce qui est très-rare ; on peut trouver à infiniment peu près, la *valeur de ce reste*, par la méthode d'approximation, dont nous parlerons bientôt. (135.)

131. REMARQUE II. La démonstration & la preuve de cette opération, se font aisément appercevoir & sentir, dans les principes que nous avons précédemment posés & expliqués.

I°. La *démonstration de cette opération* se montre par elle-même. En suivant la méthode proposée $2a + b \times b$, il est évident que j'extrais la racine de toutes les parties qui forment le quarré : donc j'extrais la racine de tout le quarré.

II°. La *preuve de cette opération* se fait en multi-

pliant par elle-même la racine trouvée. Il est évident que le produit de la racine par elle-même, joint au reste, s'il y a eu quelque reste, doit être égal au nombre ou quarré donné.

132. PROBLÊME II. *Trouver la racine quarrée de* 425104.

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Quarré.* | | *a* *b* | |
| Ier Membre. | 42, 51, 04 | 6 5 2 | *Racine.* |
| | 36 | 12 = 2 *a* | |
| | | 5 = + *b* | |
| | | 5 = × *b* | |
| IIe Membre. | 65.1 | 62 5 = Produit. | |
| | 625 | | |
| IIIe Membre. | 260.4 | 130 = 2 *a* | |
| | 260 4 | 2 = + *b* | |
| | | 2 = × *b* | |
| | | 2 604 = Produit. | |
| Reste. | (0 | | |
| Preuve. 652×652 = 425104. | | | |

SOLUTION. I°. Après avoir divisé les chiffres de deux en deux, comme nous avons dit; voyez quel est *le plus grand quarré* renfermé dans la premiere tranche à gauche, qui est ici 42 : c'est 36; comme on le voit dans la table précédente. Ecrivez ce quarré 36 au-dessous de la premiere tranche 42, & sa *racine* 6 au petit angle, à côté du nombre ; & soustrayant de 42 ce quarré 36, écrivez le reste qui est 6 au-dessous; & descendez la tranche suivante, qui est 51, à côté de 6 : ce nombre 651 sera le second membre, dont nous allons chercher la racine.

II°. Nous appellerons toujours *a*, tout ce qui sera au petit angle : ainsi dans le cas présent 6 = *a*. La formule $2a + b \times b$, signifie qu'il faut prendre 2 fois le nombre *a*; l'ajouter à un autre nombre que nous

trouverons, & que nous appellerons $b$; & multiplier la somme des deux, par le nombre $b$.

Ainsi $a$ étant 6, je prends 2 fois 6, ou 12, pour avoir $2a$ que j'écris à part. Laissant ensuite un chiffre à la droite du second membre 651, lequel est ici 1, je demande : dans tout le reste qui est 65, combien de fois $2a$ ou 12 ? Il y est 5 fois. Voilà ce nombre ou ce *quotient* 5, que nous appellerons $b$ : il faut l'écrire au-dessous de $2a$, en l'avançant d'un pas vers la droite. La somme de ces nombres $2a+b$, ainsi arrangés, sera 125. Je multiplie cette somme 125 ou $2a+b$, par 5 qui est $b$, comme la formule me le dit ; & j'ai pour *produit* 625, qui sera $2a+b\times b$. Comme 625 ne surpasse pas 651, je conclus que je n'ai pas pris le quotient 5 ou $b$ trop grand. Je mets donc ce *quotient* 5 à la racine à côté de 6 ; & je porte le *produit* 625 sous 651, pour le soustraire ; & à côté du *reste*, qui est 26, je descends la tranche suivante : c'est le troisieme membre 2604.

III°. On opérera sur ce troisieme membre, comme on a opéré sur le second. Je reprends donc la formule $2a+b\times b$ ; & puisque 65 est $a$ (car toujours ce qui est au petit angle est $a$, quand on commence une opération sur une nouvelle tranche, par le moyen de la formule), je prends 2 fois 65 pour avoir $130 = 2a$, que j'écris à part. Je laisse ensuite le dernier chiffre de ce troisieme membre, qui est ici 4 ; & je demande : dans tout le reste qui est 260, combien de fois $2a$ ou 130 ? Il y est 2 fois. Voilà le *nombre* ou le *quotient* 2, que nous appellerons $b$ dans cette opération. Je l'écris au-dessous de $2a$, en l'avançant d'un pas ; & ayant fait la somme de ces deux nombres pour avoir $2a+b$ qui est 1302, je la multiplie par $b=2$, selon la formule ; & j'ai pour *produit* total 2604, qui est la formule entiere exécutée, $2a+b\times b$, pour cette troisieme tranche : & comme 2604 ne surpasse pas la

somme de la tranche correspondante, le quotient n'a pas été trop grand. Je mets donc le nombre $b$ qui est 2, au petit angle à côté de 65; & ayant soustrait 2604 de la tranche correspondante qui est 2604, il n'y a aucun *reste*. Je conclus que ce qui est au petit angle, savoir 652, est la racine du nombre donné, qui est un quarré parfait.

IV°. On en feroit autant pour une quatrieme, cinquieme & sixieme tranche, s'il y en avoit encore. La racine demandée est donc 652: c'est encore ici la racine d'un quarré parfait. La racine suivante sera la racine d'un quarré imparfait.

133. Problême III. *Trouver la racine quarrée du nombre 6422739.*

Solution. On cherchera cette racine, par la même méthode qui a fait trouver les deux précédentes, en prenant d'abord la racine du *plus grand quarré* contenu dans la premiere tranche 6; & en appliquant ensuite à toutes les tranches suivantes, la formule $2a + b \times b$.

| | | |
|---|---|---|
| *Quarré.* | | $a$ $b$ |
| Ier Membre. | 6, 42, 27, 39 | 2534 *Racine.* |
| | 4 | $4 = 2a$ |
| IIe Membre. | 24.2 | $5 = + b$ IIe Membre. |
| | 225 | $5 = \times b$ |
| | | 225 produit. |
| IIIe Memb. | 172.7 | $50 = 2a$ |
| | 1509 | $3 = + b$ IIIe Membre. |
| | | $3 = \times b$ |
| | | 1509 produit. |
| IVe Memb. | 2183.9 | $506 = 2a$ |
| | 20256 | $4 = + b$ IVe Membre. |
| | | $4 = \times b$ |
| | | 20256 produit. |
| Reste...... | 1583. | |
| Preuve. | | |
| | $25342 \times 534 = 6421156$, | |
| Reste...... | 1583, | |

Somme... $= 6422739$, égale au quarré donné.

134. REMARQUES. I°. Une des propriétés fondamentales de la Division, c'est de faire *trouver la racine inconnue d'un produit, dont on a l'autre racine*, en divisant le produit connu par la racine connue : le quotient est l'autre racine, savoir, ou le multiplicande, ou le multiplicateur. Si j'ai le produit 204, dont une racine donnée soit 4; la *racine cherchée* sera 51 : si la racine donnée étoit 16, la racine cherchée seroit 12, avec 12 unités de reste, que je joindrois au membre suivant.

Ainsi chaque fois que j'abaisse une nouvelle tranche à côté du reste du membre précédent, je ne fais attention qu'au reste & au premier chiffre de la tranche abaissée. J'intercale toujours un point entre les deux chiffres abaissés; & *prenant tout ce qui est avant le point pour dividende*, je le divise par le diviseur $2a$ pour avoir un quotient $+b$, qui ne peut jamais être plus grand que 9 (44. II°.) Si j'ai pris le nombre $b$ trop grand, ensorte qu'il me donne un produit plus grand que le membre sur lequel j'opere; je diminue ce nombre $b$, d'une ou de plusieurs unités; jusqu'à ce qu'il me donne un produit qui ne surpasse pas le membre dont il doit être soustrait, & qui en approche le plus qu'il se peut.

Si le nombre $2a$, qui doit servir de *diviseur*, se trouve plus grand que le nombre auquel il répond, je mets tout de suite zero à la racine; & j'abaisse la tranche suivante du nombre donné, pour avoir le membre suivant, sur lequel j'opere à l'ordinaire.

II°. Quand j'ai trouvé le nombre $b$, je l'écris dans un rang plus avancé d'un pas vers la droite : parce que le nombre $2a$ ne répond qu'au chiffre qui précede le point, & que le nombre $+b$ qui est censé être la racine ou le produisant de tout ce nombre, doit répondre aussi au chiffre qui suit le point.

III°. Le nombre donné n'est pas un quarré parfait; puisqu'outre le quarré parfait du nombre 2534,

il contient encore 1583 unités de plus : il ne contient pas non plus le quarré du nombre 2535 plus grand d'une unité. La vraie racine du nombre donné est donc entre les nombres 2534 & 2535 : elle est donc le nombre 2534, plus une partie d'une unité, laquelle partie d'unité ne peut s'exprimer exactement, ni par un nombre entier, ni par une fraction. Si le nombre donné exprimoit des pieds, la racine seroit 2534 pieds, plus une partie d'un pied, que l'on néglige communément dans la pratique.

IV°. Quoiqu'on ne puisse jamais atteindre & exprimer la valeur juste & précise de cette racine, on peut en apprcher à l'infini : ensorte que le reste, ou ce qui manquera à la racine exacte & précise, soit moindre qu'un dixieme, ou qu'un centieme, ou qu'un millieme d'unité : & ainsi de suite. C'est ce que l'on appelle *extraire la racine quarrée par approximation*, & l'objet du problême suivant.

Mais la solution de ce problême suppose quelques connoissances sur la théorie des Fractions, dont nous parlerons ailleurs (191). Ainsi les personnes qui n'auroient aucune connoissance sur cette théorie des Fractions, doivent omettre pour le présent ce problême, qui exige cependant d'être résolu ici.

135. PROBLÊME IV. *Extraire la racine quarrée par approximation.*

SOLUTION. Soit le nombre donné 67, qui n'est pas un quarré parfait, & dont on demande la racine. Sa racine est 8, plus une partie d'unité correspondante aux 3 unités qu'a le nombre 67 au-dessus du quarré 64.

I°. Si on veut avoir la racine de ce nombre $67 = \frac{67}{1}$, ensorte que ce qui manquera à cette racine, soit moindre qu'un dixieme d'unité ; j'ajoute deux zeros à $\frac{67}{1}$ (ce qui est la même chose que si je l'avois multiplié par 100), pour en faire une fraction $\frac{6700}{100}$ qui lui sera

fera égale (191). Or comme la racine de 100 eſt 10; il eſt ſûr que ſi je tire la racine de 6700, ce qui viendra ſera des *dixiemes*. Tirant donc cette racine ſelon la méthode ordinaire, je trouve $\frac{81}{10} = 8 + \frac{1}{10}$ pour la racine approchée du nombre 67; à laquelle racine il manquera moins d'un dixieme, pour être exacte: parce que le reſte 139 ne vaut pas une unité de plus pour la racine; ſans quoi, au lieu de $\frac{81}{10}$, on auroit $\frac{82}{10}$.

II°. Si on veut que le reſte ſoit moindre qu'un centieme d'unité; j'ajoute à $\frac{67}{1}$, quatre zeros, (ce qui eſt la même choſe que ſi je multipliois par 10000) pour en faire une fraction $\frac{670000}{10000}$; & comme la racine de 10000 eſt 100, il eſt encore ſûr que ſi je tire la racine de 670000, ce qui viendra ſera des *centiemes*. Ainſi j'aurai $\frac{818}{100} = 8 + \frac{18}{100}$ pour la racine approchée de 67, à qui il manquera moins d'un centieme pour être la vraie racine: parce que le reſte 876 vaut moins qu'une unité de la racine 818.

III°. En général, il faut ajouter au nombre dont on veut extraire la racine par approximation, ou deux zeros, ou quatre, ou ſix, & ainſi de ſuite, toujours en nombre pair; & en extraire la racine, ſous laquelle on mettra l'unité avec la moitié du nombre de zeros qu'on a ajoutés au nombre propoſé: ce qui donnera une fraction qui ſera la racine cherchée. Plus le nombre de zeros ajoutés ſera grand, plus auſſi on approchera de la vraie valeur de la racine.

IV°. Par ces principes, en ſuppoſant deux zeros ajoutés au nombre donné dans le troiſieme problême précédent; le reſte 1583, augmenté des deux zeros abaiſſés, deviendroit un *cinquieme membre* ſur lequel on continueroit d'opérer ſelon la formule; & on trouveroit pour racine 25343 *dixiemes* $= 2534 + \frac{3}{10}$. (53.)

## PARAGRAPHE SECOND.

### *FORMATION DU CUBE.*

136. HYPOTHESE. (*fig.* 2.) SOIT un cube TAÇMLSBA d'une grandeur quelconque, que nous nommerons le cube R : ce cube aura six faces égales à la surface ATSB. La ligne AB en est la *racine cubique :* cette ligne AB, élevée à son quarré, donne la surface ABST. Cette ligne AB = AG, multipliant une des faces du cube, donne sa profondeur ou sa solidité.

Cette racine cubique AB étant appellée $a$, on aura $a$ pour la racine ; $aa$ pour le quarré ou une des faces ; $aaa$ pour la solidité de ce cube.

Il s'agit maintenant d'observer quelle augmentation donne à un cube quelconque déjà existant, une nouvelle grandeur BC, ajoutée à sa racine connue AB. Or c'est ce que nous allons faire ici, en examinant quelles seroient les quantités qu'acquerroit le cube R, si sa racine AB $= a$, étoit augmentée d'une quantité quelconque BC $= b$.

Soit donc le cube R, dont les trois dimensions, longueur, hauteur & profondeur, sont égales à AB, que je nomme $a$ : ce cube est $= aaa$. Si j'augmente la racine AB de ce cube, de la quantité quelconque BC, que je nomme $b$ ; il est clair que cette ligne ABC, élevée à son cube, donnera un cube ACDKHGAN, plus grand que le précédent. Le cube précédent sera alors augmenté de sept parallélopipedes (121), qui seront (*fig.* 2) :

I°. Le parallélopipede BD, poussé jusques sous F, lequel aura la largeur & la hauteur du premier cube, & la profondeur BC : $= aa \times b$.

II°. Le parallélopipede GH, poussé jusques sous K, qui aura la hauteur & la largeur du premier cube, &

une profondeur GI égale à BC : $= aa \times b$.

III°. Le parallélopipede X qui aura la largeur & la longueur du premier cube, & une profondeur VM égale à BC : $= aa \times b$. Voilà déjà $3\ aa \times b$, de la formule que nous allons bientôt employer.

IV°. Le parallélopipede DPF, qui a une longueur égale à celle du premier cube, & une largeur & une profondeur égales à BC : $= ab \times b$.

V°. Le parallélopide HVK, qui a les trois dimensions du précédent : $= ab \times b$.

VI°. Le petit cube KF, qui a ses trois dimensions égales à BC : $= bb \times b$.

VII°. Sous ce petit cube KF, un parallélopipede qui a la hauteur du premier cube R, avec une largeur & une profondeur égales à BC : $= ab \times b$. Voilà donc encore $3\ ab + bb \times b$ de la formule.

Pour se rendre plus sensible cette théorie du cube, on pourra exécuter en cire ou en terre grasse, les deux cubes dont il est ici question.

Il est évident que si on augmentoit encore la ligne AC d'une nouvelle quantité quelconque CE; cette augmentation produiroit sept nouveaux parallélopipedes semblables aux précédens, sur le cube augmenté ou sur le cube total AF. On voit naître cette nouvelle augmentation en CDFOE.

137. COROLLAIRE I. *Le cube d'une quantité complexe renferme donc des quantités qu'on peut suivre & observer dans leur formation.*

EXPLICATION. Si le cube est formé par deux quantités $a + b$, il renfermera, comme on vient de le voir, outre le cube $aaa$ du premier terme, les quantités suivantes, $3\ aa + 3\ ab + bb \times b$.

Si le cube est formé par trois quantités; après avoir trouvé le cube des deux premieres, dont la racine cubique sera encore nommée $a$, on nommera encore $b$ la

troisieme quantité ; & on trouvera, comme on vient de l'observer, que le cube renfermera de plus, $3\ aa + 3\ ab + bb \times b$. Et ainsi de suite à l'infini.

138. COROLLAIRE II. *Quand on a bien conçu & saisi la formation du cube, il est facile d'en entendre la décomposition :* puisque la décomposition, ou l'extraction des racines cubiques, est l'opération inverse de la formation du cube par les mêmes racines.

Il est évident qu'en prenant la racine cubique d'un cube connu, & la racine cubique de tout ce qui est ajouté à ce premier cube connu, on aura la racine cubique du tout.

Nous allons placer ici une table, où se trouvent les cubes des neuf premiers chiffres : elle servira à faire connoître tout de suite *le plus grand cube* de la premiere tranche sur laquelle on va opérer dans l'extraction des racines cubiques. Les autres cubes que nous

| Racine. | *Quarré.* | Cube. |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 2 | 4 | 8 |
| 3 | 9 | 27 |
| 4 | 16 | 64 |
| 5 | 25 | 125 |
| 6 | 36 | 216 |
| 7 | 49 | 343 |
| 8 | 64 | 512 |
| 9 | 81 | 729 |
| 10 | 100 | 1,000 |
| 99 | | 970,299 |
| 100 | | 1,000,000 |
| 999 | | 997,002,999 |
| 1000 | | 1,000,000,000 |
| 9999 | | 999,700,029,999 |

y joignons, sont relatifs à quelques observations que nous allons faire.

139. REMARQUE I. En jettant un coup d'œil sur cette table, on observera :

I°. Qu'une racine cubique, composée *d'un seul chiffre*, a toujours pour cube au moins un chiffre, & jamais plus de trois.

II°. Qu'une racine cubique, composée *de deux chiffres*, a toujours pour cube au moins quatre chifres, & jamais plus de six.

III°. Qu'une racine cubique composée *de trois chiffres*, a toujours pour cube au moins sept chiffres, & jamais plus de neuf.

IV°. Qu'une racine cubique, composée *de quatre chiffres*, a toujours pour cube au moins dix chiffres, & jamais plus de douze; & ainsi de suite, de trois en trois.

V°. On voit ici que la plupart des nombres doivent être des quarrés imparfaits : puisque dans tous les nombres au-dessous de 100, il n'y a que 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, qui soient des quarrés parfaits dont on puisse extraire exactement & sans reste la racine quarrée.

On voit de même que la plupart des nombres sont des cubes imparfaits : puisque dans tous les nombres au-dessous de 1000, il n'y a que 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000, qui soient des cubes parfaits, dont on puisse extraire exactement & sans reste la racine cubique.

140. REMARQUE II. Delà la méthode de *diviser en tranches*, en commençant par la droite, le nombre donné dont on cherche la racine cubique. On cherche quel chiffre, élevé à son cube, produit chaque tranche ou la plus grande partie de chaque tranche, en commençant par la gauche où les tranches ont une plus grande valeur.

Après avoir trouvé en nombres ronds la racine cubique de la plus grande partie de chaque tranche ; on joint le reste à la tranche suivante dont on cherche ensuite la racine cubique, en cherchant quel nombre, élevé à son cube, produit un nombre égal à cette tranche, ou très-approchant de cette tranche ; dont on joindra le reste à la tranche suivante, pour la soumettre à la même opération.

141. REMARQUE III. *La racine cubique d'une tranche quelconque, ne peut jamais être plus grande que 9* : parce qu'une racine cubique plus grande que 9, même d'une seule unité, appartient à un nombre composé de plus de trois chiffres : or un nombre composé de plus de trois chiffres appartient nécessairement à une tranche qui précede celle sur laquelle on opere. (16.)

142. REMARQUE IV. *Si deux nombres ne different que d'une unité ; le cube du plus grand surpasse le cube du plus petit, de trois fois le quarré de la racine du plus petit, plus trois fois cette racine, plus l'unité.* Car nommant $a$ le moindre nombre, le plus grand sera $a+1$.

Le cube de $a$ est $aaa$. Le cube de $a+1$, est $aaa+3aa+3a+1$. Car d'abord $\overline{a+1}\times\overline{a+1}$ donne le quarré $aa+2a+1$. (127). Ensuite le quarré $\overline{aa+2a+1}\times\overline{a+1}$, donne le cube $aaa+3aa+3a+1$. (100 & 127).

143. REMARQUE V. Les nombres dont on cherche la racine cubique, sont ou des cubes parfaits, ou des cubes imparfaits (119).

I°. Quand ces nombres sont des *cubes parfaits*, on en trouve la racine exacte & précise, sans aucun reste dans la derniere tranche.

II°. Quand ces nombres sont des *cubes imparfaits*, on en trouve la racine approchée : mais il y a un reste plus ou moins grand dans la derniere tranche, lequel reste est insuffisant pour donner une unité de plus à la racine cubique. Pour que ce reste pût donner une unité de plus à cette racine, il faudroit qu'il valût

trois fois le quarré de cette racine, plus trois fois cette racine, plus une unité (142). On verra par-là à fort peu près, quelle est la valeur de ce reste relativement à la racine : on le néglige communément.

Dans les quarrés & dans les cubes imparfaits, la racine, soit quarrée, soit cubique, est une grandeur incommensurable avec ces nombres (6) : on peut en approcher à l'infini (135 & 151); mais on ne peut jamais l'atteindre avec une parfaite précision.

144. REMARQUE VI. La méthode que nous allons donner pour extraire la racine cubique, a beaucoup de rapport avec celle que nous avons employée pour extraire la racine quarrée. On sentira la facilité & la commodité de l'une & de l'autre méthode ; en les comparant, si l'on veut, avec celles qu'on trouve dans différens auteurs, & qu'on pourroit leur substituer. Pour extraire la racine cubique d'un nombre donné :

I°. On divisera d'abord ce nombre en tranches, de trois en trois chiffres, en commençant par la droite ; la premiere tranche à gauche peut n'avoir que deux chiffres, ou même qu'un seul. On tirera sous le nombre donné & divisé en tranches, une ligne qu'on coupera par une perpendiculaire, comme dans l'extraction de la racine quarrée ; & on placera à côté du nombre donné, chaque chiffre de la racine cubique, à mesure qu'on le trouvera. *Il y aura à la racine cubique, autant de chiffres, que le nombre donné aura de tranches ou de divisions* (139). Après ces préparatifs,

II°. On examinera quel est *le plus grand cube* contenu dans la premiere tranche (138), & on en prendra la *racine cubique* qu'on placera à côté du nombre donné. On extraira de la premiere tranche ce plus grand cube, & on joindra le reste à la tranche suivante : ce qui formera le second membre. Après quoi, on emploiera pour ce second nombre & pour tous les membres suivans, comme on le verra dans les problêmes que

nous allons résoudre, cette formule générale : $3aa + 3ab + bb \times b$. (137).

## EXTRACTION DE LA RACINE CUBIQUE.

145. PROBLÊME I. *Trouver la racine cubique de* 13824.

SOLUTION. Le nombre donné 13824 est un cube parfait ou imparfait. Ce cube renferme cinq chiffres ou deux membres : sa racine aura deux chiffres (139), qu'il faut chercher.

| | | $a\,b$ | |
|---|---|---|---|
| Cube. | 13, 824 | 2 4 | Racine. |
| Ier Membre. | 8 | $12 = 3aa$ : | Diviseur. |
| | | $24 = 3ab$ | |
| IIe Membre. | 58.24 | $16 = bb$ | |
| | 58 24 | $1456 =$ | somme |
| | | $4 = \times b$ | |
| Reste, | (0 | $5824 =$ | produit. |

Preuve. $24 \times 24 \times 24 = 13824$.

I°. Je cherche d'abord *le plus grand cube* renfermé dans la premiere tranche 13 ; & je vois que c'est 8. J'écris ce cube 8 sous la premiere tranche ; & je place sa *racine cubique* 2, à côté du nombre donné. Je soustrais ce cube 8 de la premiere tranche ; & j'ai pour *reste* 5, à côté duquel j'abaisse la tranche suivante 824.

J'ai déjà extrait la racine cubique d'une partie du premier membre : les cinq unités qui restent ne suffisant pas pour donner une unité de plus au premier chiffre 2 de la racine ; je joins ce reste à la tranche suivante, avec laquelle il va faire un même tout, dont je vais chercher la racine cubique, par la formule $3aa + 3ab + bb \times b$.

Cette formule, qui auroit également lieu pour tous les membres ſuivants, ſi le cube donné avoit un plus grand nombre quelconque de tranches (137), ſert à faire trouver, relativement au nombre quelconque auquel on l'applique, un *quotient*, un *produit*, un *reſte* : comme on va le voir ici & dans les exemples ſuivants. Ainſi,

II°. J'appelle $a$ la racine trouvée 2 : je la multiplie par elle même, pour avoir $aa = 4$ : je la prends trois fois, pour avoir $12 = 3\,aa$, diviſeur de 58.

Laiſſant enſuite deux chiffres à la droite du ſecond membre, ſéparés par un point de tous ceux qui les précedent ; je demande : dans tout le reſte 58, combien de fois $3\,aa$ ou 12 ? Il y eſt 4 fois. Ce *quotient* 4 eſt le nombre que nous nommerons $b$. (134.)

Continuant d'exécuter la formule, je multiplie $a = 2$, par $b = 4$ ; & j'ai $8 = ab$ : je prends trois fois ce nombre 8, pour avoir $24 = 3\,ab$ ; & j'écris ce nombre 24 au-deſſous de 12 ou de $3\,aa$, en l'avançant d'un pas vers la droite. Je multiplie encore $b = 4$, par lui-même ; pour avoir $bb = 16$, que j'écris au-deſſous de 24 ou de $3\,ab$ en l'avençant encore d'un pas vers la droite.

Je fais la ſomme de tout cela ; & multipliant cette ſomme 1456 par $b = 4$, j'ai pour *produit* 5824, qui ſera le réſultat de $\overline{3\,aa + 3\,ab + bb} \times b$.

Je porte ce produit 5824 ſous le ſecond membre, & je le *ſouſtrais* de ce ſecond membre ; & après la ſouſtraction faite, il n'y a aucun *reſte*. L'opération eſt achevée ; & la racine demandée eſt 24 : c'eſt la racine d'un cube parfait.

146. REMARQUE I. Quand après l'opération, il reſte quelque choſe de la derniere tranche ; on néglige ce reſte qui annonce que le cube donné n'eſt pas un cube parfait. Si ce reſte du dernier membre valoit une fois & demi la racine trouvée 24, par exemple, plus une fois & demi le quarré de cette racine, plus une demie

unité ; il vaudroit ſimplement une demi-unité de plus à la racine, laquelle ſeroit $24+\frac{1}{2}$. (142.)

147. REMARQUE II. La preuve & la démonſtration de cette méthode, ſont fondées ſur les principes mêmes qui l'expoſent.

I°. La *preuve de cette opération*, ſe fait en multipliant la racine par elle-même pour en avoir le quarré, & en multipliant ce quarré par la même racine pour en avoir le cube. Il eſt évident que ce dernier produit, ajouté au reſte, s'il y a quelque reſte, doit être égal au nombre donné : puiſque ce nombre donné n'eſt pas different des conſtitutifs dont il eſt formé.

II°. La *démonſtration de cette opération* eſt établie ſur la théorie de la formation & de la décompoſition d'un cube quelconque, que nous avons expoſée. En ſuivant la formule propoſée $3aa+3ab+bb\times b$, il eſt évident qu'on extrait la racine cubique de toutes les parties qui forment le cube : donc on extrait la racine cubique de tout le cube.

148. PROBLÊME II. *Extraire la racine cubique du nombre* 107,850,176.

SOLUTION. Cette racine aura trois chiffres : puiſque le nombre donné a trois tranches (139). La méthode à ſuivre ſera toujours repréſentée par la formule $3aa+3ab+bb\times b$.

I°. Je cherche *le plus grand cube* renfermé dans la premiere diviſion à gauche, qui eſt 107 : je vois que c'eſt 64, dont la racine cubique eſt 4 ; & je ſouſtrais 64 de 107. Je deſcends à côté du reſte 43, la diviſion ſuivante 850 ; & je mets au petit angle la racine cubique de 64, qui eſt 4.

II°. Venant à la ſeconde diviſion ou au ſecond membre, j'appelle *a* ce qui eſt à la racine ou au petit angle ; & la formule étant $3aa+3ab+bb\times b$, je commence par multiplier *a* qui eſt ici 4 par lui-même, pour avoir

16,

| | |
|---|---|
| Cube. 107, 850, 176 | $a$ $b$<br>476 Racine. |
| I^er Membre. 64 | 48 $=$ 3 *aa* : Diviſeur.<br>96 $=$ 3 *ab* II^e *Membre*<br>64 $=$ *bb* *faux.* |
| II^e *Membre* 438.50<br>398 23 | 5824 Somme :<br>8 $= \times$ *b*<br>46592 Produit. |
| III^e Memb. 40 271.76<br>40 271 76 | 48 $=$ 3 *aa* II^e Membre.<br>84 $=$ 3 *ab*<br>49 $=$ *bb*<br>5689 Somme.<br>7 $= \times$ *b*<br>39823 $=$ Produit. |
| Reſte. . . . . . . . (0 | |
| Preuve. 476 × 476<br>476 $=$ 107850176. | |
| | 6627 $=$ 3 *aa* : Diviſeur.<br>846 $=$ 3 *ab* : III^e<br>36 $=$ *bb* : Membre.<br>671,196 : Somme.<br>6 $= \times$ *b*<br>4027,176 : Produit. |

16, qui ſera *aa* ; & je le prends trois fois pour avoir 48 = 3 *aa*, qui ſera le *diviſeur de* 438.

Laiſſant enſuite deux chiffres du ſecond membre à la droite, c'eſt-à-dire, 50 ; je demande : dans tout le reſte 438, combien de fois les 3 *aa* ou 48 ? Il y eſt 8 fois. Ce *quotient* 8 eſt le nombre que nous appellerons *b*.

Continuant donc d'exécuter la formule, je multiplie d'abord *a* qui eſt 4, par *b* qui eſt 8 ; & j'ai 32 qui eſt *ab :* je prends enſuite 3 fois 32, ou 96, pour avoir 3 *ab* que j'écris au-deſſous de 3 *aa*, en l'avançant d'un pas, comme on voit ici. Je multiplie encore *b* qui eſt 8 par lui-même, pour avoir *bb* ou 64 ; & je l'écris deſſous de 3 *ab* en l'avançant d'un pas vers la droite. Après quoi, ayant fait une ſomme de tout cela pour avoir 5824, qui ſera 3 *aa* + 3 *ab* + *bb ;* je multiplie le tout par *b* ou 8, pour avoir la formule entiere exé-

cutée qui eſt $3aa + 3ab + bb \times b$; & je trouve pour *produit* 46592, qui ſe trouve plus grand que les chiffres correſpondans du ſecond membre 43850 : j'ai donc pris le quotient $b$ trop grand, en prenant 8.

Je prends donc pour *quotient* $b$, le nombre 7; & ayant écrit $3aa$, qui eſt toujours comme ci-deſſus 48, je multiplie $a$ qui eſt 4, par 7; pour avoir 28 ou $ab$. Prenant enſuite 3 fois 28, ou 84, pour avoir $3ab$; j'écris 84 ſous $3aa$ en l'avançant d'un pas. Je multiplie encore $b$, qui eſt 7, par lui-même; pour avoir $bb$ ou 49, que j'écris ſous $3ab$ en l'avançant d'un pas vers la droite. Je fais la ſomme de tout cela; & je la multiplie par 7, qui eſt $b$; pour avoir 39823, qui ſera $3aa + 3ab + bb \times b$. Je porte ce *produit* 39823, ſous le membre correſpondant, pour le ſouſtraire; & ayant deſcendu la tranche ſuivante à côté du *reſte* qui eſt 4027, & mis à la racine le $b$ trouvé à cette opération, qui eſt 7; je viens à la troiſieme diviſion ou au troiſieme membre.

III°. Je reprends la formule; & appellant $a$ tout ce qui eſt à la racine, c'eſt-à-dire ici 47, je prends $aa$ qui eſt $47 \times 47$, ou 2209 que je prends 3 fois, pour avoir $3aa$, ou 6627 que j'écris à part. Laiſſant enſuite cinq chiffres à la droite (50)', je demande : en 40 combien de fois 6? Il y eſt 6 fois. Ce *quotient* 6 ſera le nombre $b$.

Je multiplie donc 47 qui eſt $a$, par 6 qui eſt $b$; & j'ai 282 : & le prenant 3 fois, j'ai 846 qui eſt $3ab$, que j'écris ſous $3aa$ en l'avançant d'un pas. Je multiplie enſuite $b$ par $b$, ou 6 par 6; pour avoir 36 ou $bb$, que j'écris ſous $3ab$ en l'avançant d'un pas. La ſomme de ces nombres eſt $671196 = 3aa + 3ab + bb$. Je la multiplie par $b$ qui eſt 6, pour avoir $3aa + 3ab + bb \times b$, qui eſt la formule ordinaire exécutée; & j'ai pour *produit* 4027176, qui ſouſtrait du dernier membre, ne laiſſe aucun *reſte*. Je mets donc à la racine, 6; & le nombre 476 eſt la racine cubique du nombre donné, lequel eſt un cube parfait.

149. PROBLÊME III. *Extraire la racine cubique du nombre* 5305472.

SOLUTION. Le nombre donné eſt un cube dont la racine aura trois chiffres (139). Après avoir pris *le plus grand cube* de la premiere tranche 5; on emploiera, comme dans les deux problêmes précédents, la formule $3aa + 3ab + bb \times b$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | $a\ b$ | |
| Cube. | 5,305,472 | 174 | Racine. |
| Ier Membre. | 1 | $3 = 3aa$ | Diviſeur. |
| | | $21 = 3ab$ | IIe |
| IIe Membre. | 43.05 | $49 = bb$ | Membre. |
| | 3913 | 559 | Somme. |
| | | $7 = \times b$ | |
| IIIe Membre. | 3924.72 | 3913 | Produit. |
| | 355024 | $867 = 3aa$ | Diviſeur. |
| Reſte. . . . . . . | (37448 | $204 = 3ab$ | IIIe |
| | | $16 = bb$ | Membre. |
| Preuve. | | 88756 | Somme. |
| $174 \times 174 \times 174 = 5268024$ | | $4 = \times b$ | |
| qui joint avec le reſte | 37448 | 355024 | Produit. |
| égale le nombre donné . . . . | 5305472 | | |

150. REMARQUES. I°. Chaque fois que j'abaiſſe une nouvelle tranche, j'intercale un point entre le premier des chiffres abaiſſés & les deux ſuivants. Ce qui eſt avant le point eſt un *dividende*, dont le *diviſeur* ſera le nombre $3aa$: le *quotient* ſera le nombre $b$, qu'il faut trouver (134) & ne point prendre trop grand.

II°. Le nombre $b$, qui fait auſſi la fonction de *multiplicateur*, doit être le produiſant non-ſeulement des chiffres qui précedent le point, mais encore des deux chiffres qui ſuivent le point. C'eſt pourquoi dans l'o-

pération $3\,ab + bb$, j'avance les chiffres d'abord d'un pas, ensuite d'un autre pas vers la droite : afin que tous les chiffres du produit soient placés dans des rangs correspondans aux chiffres du membre dont ils doivent être soustraits.

III°. Le nombre donné n'est pas un cube parfait : puisqu'outre le cube de 174, il contient par dessus 37448 unités, qui ne sont pas suffisantes pour donner une unité de plus à la racine. (142.)

IV°. Dans la pratique on néglige ce reste d'unités qui ne peuvent donner une unité à la racine ; où l'on se contente d'un à peu près. Mais si on vouloit avoir plus de précision, on peut approcher à l'infini de la vraie racine cubique : ensorte que ce qui manquera à la racine trouvée, soit moindre qu'un dixieme, qu'un centieme, qu'un millieme d'unité, & ainsi de suite.

151. PROBLÊME IV. *Extraire la racine cubique, par approximation.*

SOLUTION. Pour extraire la racine cubique par approximation, on opere comme pour la racine quarrée (135) : avec cette différence que l'on ajoute trois chiffres, pour rendre le reste dix fois moindre ; six chiffres pour le rendre cent fois moindre ; neuf chiffres pour le rendre mille fois moindre.

I°. Ainsi dans l'exemple du problême précédent, j'ajoute trois zeros au reste $37448 = \frac{37448}{1}$ : ce qui est la même chose que si je le multipliois par 1000 ; & j'en fais une fraction $\frac{37448000}{1000}$, qui aura aussi pour dénominateur 1000 dont la racine cubique est 10. Je continue ensuite d'opérer sur le nombre augmenté, selon la formule ordinaire $3\,aa + 3\,ab + bb \times b$ : la racine 1343 exprimera des *dixiemes d'unité*.

Le reste 183913 ne vaut pas un *dixieme* d'unité à la racine : sans quoi la racine seroit 1744, au lieu de 1743 ; ce qui donneroit 174 unités + 4 dixiemes d'unité à la racine.

II°. Et si

| | | | |
|---|---|---|---|
| IVe Membre. | 374480.00 | *Dixiemes.* | |
| | 272640 87 | $1743 = 174 + \frac{3}{10}.$ (53.) | |
| Reste, du nombre. | 183913 | $90828 = 3\,aa$ : | diviseur. |
| | | $522 = 3\,ab$ | |
| | 5305472000 | $9 = bb$ | |
| | | 9088029 | Somme. |
| Ve Membre. | 1835130.00 | $3 = \times\, b$ | |
| | | 27264087 | Produit. |

II°. Et si on veut que ce qui manque à la racine soit moindre qu'un centieme d'unité, on ajoutera trois zeros au reste 183913; & alors 183913000 sera un *ciquieme membre*, dont on continuera à extraire la racine selon **la formule** précédente : la racine qu'on trouvera exprimera des *centiemes d'unité;* & ce qui restera de ce cinquieme membre, ne sera pas suffisant pour donner une unité de plus à la racine qui n'exprime que des centiemes d'unité.

III°. Il est clair qu'en ajoutant encore trois zeros au nouveau reste, dont on feroit un *sixieme membre*, on trouveroit une racine qui exprimeroit des *milliemes d'unité*, & à laquelle il ne manqueroit pas un millieme d'unité, pour être la racine exacte du nombre donné : & ainsi de suite à l'infini.

IV°. On trouvera de même par approximation, la racine cubique de 9, en telle sorte que ce qui manquera à cette racine soit moindre qu'un dix millieme de l'unité; en mettant douze zeros à la suite du nombre donné 9, & en extrayant simplement la racine cubique de ce nombre 9,000,000,000,000, selon la méthode des trois problêmes précédens. Cette racine cubique sera 20800 *dix milliemes* de l'unité, qui valent $2 + \frac{800}{10000}$ : de sorte que, si un cube ren-

ferme exactement neuf pieds cubes de matiere, la racine cubique approchée de ce cube sera 2 pieds + 800 parties d'un pied divisé en dix mille parties; & que le cube qui résultera de cette racine ne sera plus petit que le cube donné, que de la dix-millieme partie d'un pied cube de matiere. On voit par-là comment on peut approcher à l'infini de la vraie racine d'un cube imparfait

## PARAGRAPHE TROISIEME.

### *EXALTATION ET EXTRACTION ALGÉBRIQUES.*

152. OBSERVATION. Après ce que nous avons dit de la formation des puissances & de l'extraction des racines *dans les nombres*, on concevra aisément ce que nous avons à dire sur l'exaltation & sur l'extraction des grandeurs exprimées par des quantités algébriques: par exemple,

I°. Que le *quarré d'une quantité unique*, telle que $a$, est le produit de cette quantité multipliée par elle-même, ou $aa$; & que la *racine quarrée* de $aa$, est le quotient de $aa$ divisé par $a$, c'est-à-dire $a$.

Par la même raison, le quarré d'un terme unique composé de plusieurs quantités, tel que $abx$, est $aabbxx$; & la racine quarrée de ce quarré $aabbxx$, est $abx$.

II°. Que le *cube d'une quantité unique*, telle que $x$, est le produit de cette quantité multipliée par elle-même & multipliant son produit, c'est-à-dire, $xxx$; & que la *racine cubique* de ce cube, est le quotient du quarré divisé par la racine, c'est-à-dire $x$.

Par la même raison, le cube d'un terme unique $abc$, est $aaabbbccc$ ou $a^3b^3c^3$; & la racine cubique de ce cube, est $abc$.

III°. Que lorsqu'il n'est pas possible d'extraire la racine quarrée ou cubique d'une quantité algébrique; il

il faut se borner à indiquer cette racine, en mettant sous le signe radical (75) la quantité algébrique. Par exemple, la racine quarrée de $a$, est $\sqrt[2]{a}$ : la racine cubique de $a$, est $\sqrt[3]{a}$. Le chiffre 2 placé au-dessus du signe radical, marque que la grandeur quelconque placée sous ce signe, est élevée à sa seconde puissance, ou à son quarré, & qu'il en faut prendre la racine quarrée. Le chiffre 3 placé au-dessus du signe radical, désigne que la grandeur quelconque placée sous le signe, doit être regardée comme un cube dont il faut prendre la racine cubique. Quand le signe radical n'a pas de chiffre au-dessus de lui, il est censé avoir le chiffre 2, & il signifie la racine quarrée de toute la grandeur qui le suit.

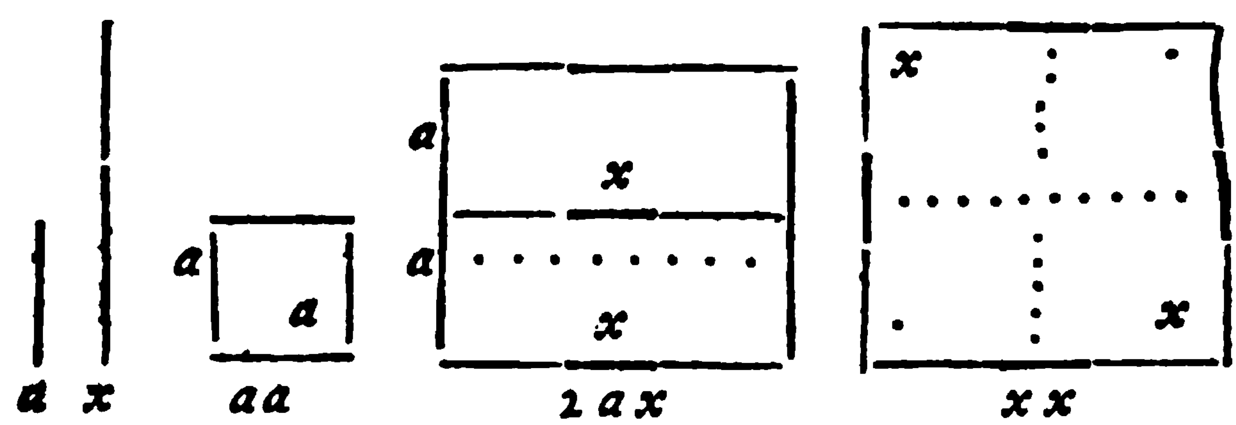
Ainsi la racine quarrée de $ab$, est $\sqrt[2]{ab}$ : la racine cubique de $ab$, est $\sqrt[3]{ab}$. De même la racine quarrée de $16\,ab$, est $\sqrt{16\,ab}$ : la racine cubique de $64\,ab$, est $\sqrt[3]{64\,ab}$. Si on peut tirer la racine d'une partie de la quantité donnée, on le fait; & on met le reste sous le signe radical. Par exemple, la racine quarrée de $16\,ab$, est $4\sqrt{ab}$. De même la racine cubique de $64\,ab$, est $4\sqrt[3]{ab}$.

IV°. Que le *quarré d'un binome*, tel que $a + x$, est le produit de ce binome multiplié par lui-même, ou $aa + ax + ax + xx$ (100); qui par la réduction devient $aa + 2\,ax + xx$; & que la *racine quarrée* de ce quarré, est le quotient de ce quarré $aa + 2\,ax + xx$, divisé par sa racine $a + x$. (153.)

V°. Que le *cube d'un binome*, tel que $a + x$, est le produit de ce binome multiplié par lui-même & multipliant son produit, ou $aaa + 2\,aax + axx + aax + xxx$ (100); qui par la réduction devient $aaa + 3\,aax + axx + xxx$; & que la *racine cubique*

de ce cube, eſt le quotient de ce cube $aaa + 3\ aax + 3\ axx + xxx$, diviſé par $a + x$. (154.)

VI°. Qu'on peut aiſément faire ſentir comment un binome quelconque $a + x$ s'éleve au quarré, par le produit de ſes racines ; & comment le quarré $aa + 2\ ax + xx$ de ce binome, ſe décompoſe enſuite en ſes racines $a + x$. Soit la ligne $a$ & la ligne $x$, qu'il faille multiplier par la ligne $a$ & par la ligne $x$. On aura d'abord $a \times a = aa$; enſuite $a \times x = ax$; enſuite $x \times a = ax$; enfin $x \times x = xx$. Le binome $a + x$, élevé à ſon *quarré complet*, renfermera donc trois termes, qui ſeront le quarré $aa$, les deux rectangles $ax$, le quarré $xx$; ou indifféremment le quarré $xx$, les deux rectangles $ax$, le quarré $aa$ : comme on le voit dans la figure ici tracée, qui repréſente l'exaltation d'un binome quelconque $a + x$, ou d'un des binomes dont nous parlerons dans la page ſuivante. Si le binome, au lieu d'être $a + x$, étoit $bcd + yz$; le premier terme ſeroit également repréſenté par la ligne plus ou moins longue $a$; & le ſecond, par la ligne $x$.




On voit aiſément qu'en rapprochant & en aſſortiſſant ces trois figures ou ces trois produits $xx + 2x + aa$, on en formera un quarré ſemblable au quarré AMNCA, que nous avons examiné ailleurs. (*fig.* 1.)

VII°. Que ſi au lieu du binome $a + x$, on avoit élevé au quarré le binome $a - x$; le quarré auroit eu également trois termes; ſavoir, $aa - 2\ ax + xx$, ou

le quarré $aa$, moins les deux rectangles $ax$, plus le quarré $xx$.

Et que si le binome élevé au quarré, eût été $a+\frac{x}{2}$; les produits auroient été $aa+\frac{ax}{2}+\frac{ax}{2}+\frac{xx}{4}$; & en réduisant, $aa+ax+\frac{xx}{4}$.

Et que si le binome élevé au quarré, eût été $a+1$; les produits ou les trois termes auroient été $aa+a+a+1$; & en réduisant, $aa+2a+1$.

Et que si le binome élevé au quarré, eût été $a-\frac{1}{2}$; les produits ou les trois termes auroient été $aa-\frac{a}{2}-\frac{a}{2}+\frac{1}{4}$; & en réduisant, $aa-a+\frac{1}{4}$.

VIII°. Que le quarré complet d'un binome renferme toujours nécessairement *trois termes*, qui sont le quarré du premier terme, les deux produits du premier terme par le second, & le quarré du dernier terme. Que ces termes soient des quantités entieres ou fractionnaires, positives ou négatives; la chose est indifférente au nombre des termes du binome élevé au quarré.

On nomme *quarré complet*, celui qui a tous ses termes; c'est-à-dire, si c'est un binome, celui qui renferme le quarré du premier terme, plus le double produit du premier terme par le second, plus le quarré du second. Le binome $a+b$ sera un quarré complet en cette maniere: $aa+2ab+bb$. Otez ou le premier terme $aa$, ou le second terme $2ab$, ou le dernier terme $bb$: ce sera un *quarré incomplet*, qu'on pourra completter, en lui ajoutant le terme qui lui manque.

IX°. Que *dans le quarré d'un binome quelconque, il ne peut y avoir aucun quarré négatif.* Car un binome est nécessairement composé ou de deux quantités positives, ou de deux quantités négatives, ou de deux quantités dont l'une est positive & l'autre négative: or, si on éleve au quarré la quantité $+a+b$, ou

$-a-b$; les deux quarrés seront positifs; & si on éleve également au quarré la quantité $+a-b$, ou $-a+b$, les deux quarrés seront également positifs. (100.)

X°. Que si on éleve au cube un binome quelconque, par exemple, $a+x$; on aura d'abord $aaa+aax+aax+axx+aax+axx+axx+xxx$; & en réduisant, $aaa+3aax+3axx+xxx$.

De-là résulte cette vérité générale, que nous avons déjà développée ailleurs (136); savoir, que le cube d'un binome quelconque renferme, outre le cube du premier terme, *trois fois le produit du quarré du premier terme par le second, trois fois le produit du quarré du second terme par le premier, & le cube du second.*

REMARQUE. Il est assez rare qu'on puisse extraire exactement la racine quarrée ou cubique des quantités algébriques : parce que, pour que cette extraction ait lieu, il faut que les quantités sur lesquelles on opere, soient des quarrés ou des cubes complets, ou des quarrés & des cubes auxquels il ne manque aucun de leurs termes. Cependant, comme cette extraction est quelquefois possible, nous allons en donner la méthode dans les deux problêmes suivants.

## PROBLÊME PREMIER.

153. *Extraire la racine quarrée d'un polynome algébrique.*

SOLUTION I. Soit donné le polynome $aa+2ax+xx$. Surquoi je raisonne ainsi. Puisque la quantité donnée est un polynome, il est clair que sa racine a plus d'un terme : supposons qu'elle en ait deux. Dans cette quantité $aa+2ax+xx$, il doit y avoir le quarré du premier terme, le quarré du second terme, & le produit du second terme par le double du premier. (152. VIII°.)

I°. Dans le polynome donné, je remarque d'abord un quarré $aa$ : j'en prends la racine $a$, pour le premier

des termes que je cherche ; & je l'écris à côté du polynome donné. Après quoi, ayant élevé à son quarré ce premier terme $a$ de la racine cherchée, je soustrais son quarré $aa$, du polynome donné ; & j'ai pour reste de ce polynome, $+ 2ax + xx$.

| Polynome donné. | Racine. |
|---|---|
| $aa + 2ax + xx$ | $a + x$ |
| $- aa$ | |
| Reste. $+ 2ax + xx$ | |
| $2a + x.$ | |
| Quotient. $+ x.$ Multiplicateur. | |
| Produit. $+ 2ax + xx$ | |
| $- 2ax - xx$ | |
| Reste. $0 \quad 0$ | |

Je dis ensuite : dans ce reste $2ax + xx$, il doit y avoir un produit du double de $a$, par l'autre terme de la racine que je cherche. Je ne puis donc avoir cet autre terme, qu'en divisant ce reste $2ax + xx$, par le double du terme trouvé $a$, ou par $2a$. Car la division sert à faire trouver la racine inconnue d'un produit dont on a l'autre racine, en divisant le produit connu par la racine connue : le quotient est l'autre racine ; savoir, ou le multiplicande, ou le multiplicateur. (134.)

Je commence donc la division de $2ax + xx$, par $2a$ : le quotient du premier terme est $x$. Je pose ce quotient $+ x$ à la racine ; & je dis : si $x$ est le second terme cherché ; son produit par $2a$, plus son quarré, doit être égal au reste $2ax + xx$. Je pose donc $+ x$, à côté de $2a$ ; & je multiplie $2a + x$ par le second terme trouvé $x$ ; (car alors le produit est égal à la somme du produit de $x$ par $2a$, & du quarré de $x$) : j'ai $2ax + xx$, que je soustrais du reste $2ax + ax$. Et comme il n'y a aucun reste ; je dis que la racine quarrée de $aa + 2ax + xx$, est $a + x$ : parce que,

par cette opération, on a décomposé cette quantité; & qu'on en a déduit, sans excès & sans défaut, les parties dont elle étoit composée.

On voit aisément par-là comment il faudroit opérer, si le polynome donné eût été $aa - 2ax + xx$: la racine cherchée seroit $a - x$; & pour la trouver, il suffiroit de changer dans l'exemple qu'on vient d'apporter, les $+$ en $-$.

SOLUTION II. Si le polynome donné eût été $xx - ax + \frac{1}{4}aa$; j'aurois trouvé de la même maniere, & d'après les mêmes principes, la racine quarrée de ce polynome. Car après avoir pris la racine $x$ du premier terme, j'ai pour reste $-ax + \frac{1}{4}aa$; & je cherche le quotient de ce reste, en le divisant par $2x$, & en disant: $+$ par $-$ donne moins; le quotient que je cherche sera donc négatif. Le dividende $ax$ n'a point de coefficient: il est donc censé avoir pour coefficient l'unité; & divisant 1 par 2, j'ai pour quotient $\frac{1}{2}$. Ensuite divisant $ax$ par la racine $x$, j'ai pour quotient $a$; & par ce qu'on vient de faire & de dire, ce quotient est $-\frac{1}{2}a$. (152. VII°.)

| Polynome donné. | Racine. |
|---|---|
| $+ xx - ax + \frac{1}{4}aa$ | $x - \frac{1}{2}a$ |
| $- xx$ | |
| Reste. $- 1ax + \frac{1}{4}aa$ | |
| $+ 2x - \frac{1}{2}a$ | |
| Quotient. $- \frac{1}{2}a$. Multiplicateur. | |
| Produit. $- ax + \frac{1}{4}aa$. | |
| Reste. o o | |

Je mets ce quotient à la racine: je le place aussi à côté de $+2x$; & je multiplie $2x - \frac{1}{2}a$, par le second terme de la racine; le produit doit être égal au reste. Je dis donc: d'abord $+$ par $-$ donne un produit négatif. Ensuite 2 par $\frac{1}{2} = 1$; enfin $a$ par $x = ax$. Ainsi j'ai d'abord pour produit de $+2x$ par $-\frac{1}{2}a$, le premier terme $-1ax$, ou $-ax$.

Je dis de même, pour avoir le second terme du produit; d'abord, moins par moins donne $+$; en-

suite, $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$: enfin $a \times a = aa$. Ainsi j'ai pour produit de $-\frac{1}{2}a$ par $-\frac{1}{2}a$, le second terme $+\frac{1}{4}aa$. Après quoi, ôtant du premier reste le produit trouvé, je n'ai aucun nouveau reste; & la racine du polynome donné, est trouvée & exacte.

REMARQUE. Le polynome $xx - ax + \frac{1}{4}aa$, dont nous venons d'extraire la racine quarrée, auroit pu être donné en cette maniere $xx - \frac{2ax}{2} + \frac{aa}{4}$ : ces deux polynomes sont en tout parfaitement égaux, ou plutôt ne sont qu'un même polynome exprimé de deux manieres. Quand on en cherche la racine quarrée, racine toujours indispensablement nécessaire pour la résolution des équations du second degré; on l'écrit comme nous avons fait dans la solution du problême: parce que cette maniere simplifie & facilite l'extraction de la racine quarrée.

### PROBLÊME II.

154. *Extraire la racine cubique d'un polynome algébrique.*

SOLUTION. On trouvera la méthode & les regle pour extraire la racine cubique d'un polynome, e raisonnant sur la nature des polynomes élevés au cube, comme nous venons de faire pour la racine quarrée. Soit le polynome donné $8aaa + 12aab + 6abb + bbb$, dont il faille extraire la racine cubique. Je dis: la racine de cette quantité est un polynome; puisque cette quantité a plus d'un terme. Supposons que ce soit un binome: son cube, selon l'observation précédente (152. X°.), sera composé du cube de chaque terme, & du triple produit du quarré de chaque terme par l'autre. Cela posé,

Je vois d'abord que le premier terme $8aaa$, est un cube. Je prends la racine cubique du coefficient 8;

cette racine est 2 ; je prends aussi la racine cubique de *aaa* ; cette racine est *a* : j'écris cette racine 2*a*, à côté du polynome donné ; & l'ayant élevée à son cube, je soustrais ce cube, de la quantité donnée ; restent 12 *aab* + 6 *abb* + *bbb*.

| Polynome donné. | Racine. |
|---|---|
| $8aaa + 12aab + 6abb + bbb$ | $2a + b$ |
| $8aaa.$ | |
| Reste. $+ 12aab + 6abb + bbb.$ | |
| Quotient. $+ b.$ | |
| Produit. $+ 12aab + 6abb + bbb$ : | |
| $- 12aab - 6abb - bbb.$ | |
| Reste. 0 0 0 | |

Je dis ensuite : dans ce reste, doit se trouver 3 fois le produit du quarré du premier terme 2*a* que je viens de trouver, par le second terme que je cherche. J'éleve donc 2*a* au quarré, & j'ai 4*aa* : je triple, ou je prends trois fois ce quarré ; & j'ai 12*aa*, par lesquels je commence à diviser le reste. En divisant 12*aab*, par 12*aa*, j'ai pour quotient + *b*.

Je pose + *b* à la racine ; & je dis : si + *b* est le second terme ; la somme de son produit par 12*aa*, plus le produit de son quarré par 6*a*, plus son cube, doit être égal au reste marqué. Or cette somme est 12*aab* + 6*aab* + *bbb* ; somme précisément égale à ce reste, duquel elle doit être soustraite ; donc la racine cubique cherchée est 2*a* + *b*.

On trouvera, d'après les mêmes principes & par la même méthode, la racine cubique d'un polynome algébrique quelconque, qui sera un cube complet ; soit que ses termes soient tous positifs ; soit qu'ils se trouvent en partie négatifs : il faudra simplement changer à propos les signes + & —, dans la soustraction, dans la multiplication, dans la division ; selon l'exigence de la quantité dont on cherche la racine cubique.

On voit, par la ſolution de ces deux problêmes, que *la méthode* qu'il faut ſuivre pour extraire les racines quarrées ou cubiques des quantités algébriques, eſt la même pour le fond des choſes, que celle que nous avons donnée ailleurs pour l'extraction des racines quarrées ou cubiques des quantités numériques. (129 & 145.)

Nous n'aurons pas beſoin, ſoit dans notre Cours de Phyſique, ſoit dans ce Cours de Mathématiques, de connoiſſances plus étendues & plus développées en fait d'algebre: rarement même aurons-nous occaſion de faire uſage de toutes celles que peut donner ce Traité, où nous nous flattons qu'on trouvera la plus grande clarté jointe à la plus grande conciſion.

On verra plus ſpécialement dans les deux Traités ſuivans, l'uſage qu'on doit faire, & l'utilité qu'on peut tirer, de l'Algebre.

# PRINCIPES
## DU CALCUL
## ET DE LA GÉOMÉTRIE,
### OU
### ÉLÉMENS DE MATHÉMATIQUES:

## TROISIEME TRAITÉ.

### *Le Calcul Analogique, ou les Proportions.*

L'Analogie (*) est la *Science des Rapports* qui se trouvent entre les grandeurs. Les rapports des grandeurs peuvent être soumis au calcul, aussi bien que les grandeurs elles-mêmes : parce que ces rapports étant susceptibles de plus & de moins, d'augmentation & de diminution, peuvent admettre les mêmes combinaisons que les grandeurs elles-mêmes.

Le rapport d'une grandeur à une autre grandeur,

(*) Étymologie. Analogie, ἀναλογία : rapport, conformité, ressemblance. De λογος, *sermo*, *ratio* ; & de ἀνὰ, *inter*. Quasi *duo inter se relativa* ; seu *unum dicens ordinem ad aliud*.

s'appelle *Raison :* l'égalité de deux raisons s'appelle *Proportion :* une suite de raisons égales s'appelle *Progression.*

Le calcul des raisons simples, le calcul des fractions, le calcul des raisons composées, le calcul des progressions ; telle sera la matiere de ce Traité, dont on sentira l'importance, quand on le verra répandre la lumiere sur presque toutes les sciences Mathématiques & Physico-Mathématiques. La suite apprendra que l'ordre que nous suivons, n'est pas purement arbitraire.

# ARTICLE PREMIER.

## *CALCUL DES RAISONS SIMPLES.*

155. DÉFINITION. UNE *Raison en style mathématique*, est le rapport ou la comparaison de deux quantités, pour en connoître, soit la différence, soit le quotient.

I°. Toutes les quantités homogenes ont entr'elles un rapport ou une raison : parce qu'elles ont toujours, ou une différence, ou un quotient. Par exemple, 6 & 8 ont une différence, qui est 2. De même, 12 & 4 ont un quotient, qui est 3. Cette *différence* ou ce *quotient* s'appelle *valeur* ou *exposant* de la raison.

II°. Toute raison est composée de deux termes : car il ne peut y avoir de comparaison qu'entre deux termes. Le premier s'appelle *antécédent ;* le second s'appelle *conséquent.*

III°. Toute raison est ou arithmétique ou géométrique. La *raison arithmétique* est celle où l'on cherche la différence qui se trouve entre l'antécédent & le conséquent. La *raison géométrique* est celle où l'on

cherche combien de fois, ou comment l'antécédent contient le conséquent, ou une partie du conséquent.

IV°. On appelle *raison simple*, le rapport qui se trouve entre deux quantités simplement. On appelle *raison composée*, le produit de deux raisons simples multipliées l'une par l'autre, antécédent par antécédent, & conséquent par conséquent. Il ne s'agit maintenant que des raisons simples : nous traiterons d'abord des raisons géométriques, & ensuite des raisons arithmétiques.

## PARAGRAPHE PREMIER.

### *RAISONS GÉOMÉTRIQUES.*

156. DÉFINITION. LA *raison géométrique* est la maniere dont une grandeur contient une autre grandeur, ou une partie de cette autre grandeur : la premiere est l'antécédent; la seconde est le conséquent. *La raison géométrique est donc le quotient de l'antécédent divisé par le conséquent.* Par exemple, il y a un rapport ou une raison géométrique, entre 12 & 4 : ce rapport ou cette raison est 3 ; parce que 3 exprime combien de fois la premiere grandeur 12 contient la seconde grandeur 4. Ce quotient 3 est l'*exposant* de la raison : il exprime sa valeur.

I°. Il faut observer ici, qu'une grandeur peut en contenir une autre, ou en entier, ou en partie. Par exemple, 8 contient 2, quatre fois : mais 2 contient seulement une partie de 8, savoir le quart. Le rapport, ou la raison de 8 à 2, est 4 : le rapport, ou la raison de 2 à 8, est $\frac{1}{4}$. L'*exposant* de la premiere raison, est 4 : l'*exposant* de la seconde raison est $\frac{1}{4}$.

II°. Les raisons prennent différents noms, suivant le rapport de l'antécédent au conséquent. La raison de

2 à 1, s'appelle *raison double;* celle de 3 à 1, *raison triple;* celle de 4 à 1, ou de 12 à 3, *raison quadruple;* celle de 5 à 1, ou de 25 à 5, *raison quintuple;* celle de 3 à 2, *raison sesqui-altere;* celle de 1 à 1, ou de 12 à 12, *raison d'égalité.* Mais la raison de 1 à 2, s'appelle *raison sous-double;* celle de 1 à 3, *raison sous-triple.*

III°. La raison géométrique s'exprime en cette maniere, 8 . 2; ou bien en cette maniere $\frac{8}{2}$: ce qui signifie, 8 est à 2. De même, $a \,.\, b$, ou $\frac{a}{b}$, signifie $a$ est à $b$.

157. COROLLAIRE I. L'exposant d'une raison géométrique étant le quotient de l'antécédent divisé par le conséquent; il est clair que *le conséquent multiplié par l'exposant de la raison, doit être égal à l'antécédent:* puisque dans toute division, le produit du diviseur par le quotient, est égal au dividende (48). Ainsi dans la raison, 8 est à 2, dont l'exposant est 4; $2 \times 4 = 8$. De même dans la raison, 2 est à 8, dont l'exposant est $\frac{1}{4}$; $8 \times \frac{1}{4} = 2$. (67.)

158. COROLLAIRE II. Puisque dans une raison géométrique, l'antécédent est toujours égal au conséquent multiplié par l'exposant de la raison; si dans une raison géométrique quelconque on nomme $a$ l'antécédent, $b$ le conséquent, $m$ l'exposant, il est évident qu'on aura toujours $a = bm$; & qu'on pourra toujours substituer à la grandeur $a$, son égale $bm$.

I°. Quand l'antécédent $a$ est *plus grand* que son conséquent $b$, l'exposant $m$ représente un entier sans reste, ou avec un reste; par exemple 2, ou 4, ou 10, ou 100, &c.

II°. Quand l'antécédent $a$ est *plus petit* que son conséquent $b$, l'exposant $m$ représente une fraction qui a pour numérateur l'unité; par exemple $\frac{1}{2}$, ou $\frac{1}{4}$, ou $\frac{1}{10}$, ou $\frac{1}{100}$, & ainsi du reste.

III°. Quand l'antécédent $a$ est *égal* à son conséquent

*b*, l'expoſant *m* repréſente l'unité. Par exemple, dans la raiſon 10 eſt à 10, le quotient, ou l'expoſant *m*, eſt égal à 1. (11. VII°.)

159. COROLLAIRE III. *Quand deux raiſons géométriques ſont égales, leurs expoſans ſont égaux.* Par exemple, dans ces deux raiſons égales, 9 eſt à 3, 21 eſt à 7, l'expoſant *m* de la premiere eſt 3; l'expoſant *m* de la ſeconde eſt auſſi 3. De même dans ces deux raiſons égales, 3 eſt à 9, 7 eſt à 21, l'expoſant *m* de la premiere eſt $\frac{1}{3}$; l'expoſant *m* de la ſeconde eſt auſſi $\frac{1}{3}$.

160. COROLLAIRE IV. *Uune raiſon géométrique eſt d'autant plus grande, que l'antécédent contient plus de fois ſon conſéquent, ou une plus grande partie de ſon conſéquent.*

EXPLICATION. Par exemple, cette raiſon 8 eſt à 2, eſt plus grande que celle-ci, 8 eſt à 4: de même cette raiſon 4 eſt à 8, eſt plus grande que celle ci, 2 eſt à 8. D'où il ſuit,

I°. Que le conſéquent reſtant le même, la raiſon augmente à proportion que l'on augmente l'antécédent.

II°. Que l'antécédent reſtant le même, la raiſon diminue à proportion qu'on augmente le conſéquent.

161. DÉFINITION I. On diſtingue deux ſortes de parties dans un tout; les parties aliquotes & les parties aliquantes.

I°. Les *parties aliquotes* ſont celles qui répétées un certain nombre de fois meſurent leur tout exactement; c'eſt-à-dire, ſans reſte & ſans excès. Par exemple, 3 eſt partie aliquote de 12: parce qu'étant répété quatre fois, il meſure exactement 12; ou, ce qui eſt la même choſe, parce qu'il eſt contenu quatre fois exactement dans 12.

II°. Les *parties aliquantes* ſont celles qui ne ſont pas contenues exactement dans leur tout, & qui répétées un certain nombre de fois, l'excedent, ou ne

l'atteignent pas entiérement. Par exemple, 5 est partie aliquante de 12 : parce qu'il y est contenu deux fois avec un reste qui est 2.

III°. Un nombre qui peut se diviser exactement & sans reste par un nombre plus petit, est un *multiple* de ce dernier nombre ; & le nombre diviseur est partie aliquotte du nombre divisé. Ainsi 8 est un multiple de 4 & de 2 ; de même 12 est un multiple de 6, de 4, de 3, de 2, qui en sont les parties aliquotes. En général, *tout nombre entier est un multiple de l'unité* : parce que ce nombre, par exemple, 11 ou 99 ou 100, peut être divisé exactement & sans reste par l'unité, qui en est toujours partie aliquote. Mais *un nombre* 8 *ou* 100 *n'est pas un multiple de* 3 *ou de* 7, par exemple ; parce que ces nombres ne peuvent pas être divisés exactement & sans reste par 3 ou par 7 : ce nombre 3 est partie aliquante de 8 & de 100. Un nombre entier 4 a une infinité de multiples, 8, 12, 16, 20, 24, & ainsi de suite à l'infini.

IV°. En général, tout nombre entier qui n'est multiple d'aucun nombre entier plus grand que l'unité, s'appelle *nombre premier*. Voici les nombres premiers au dessous de cent : 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

162. DÉFINITION II. Lorsque l'on compare les parties, soit aliquotes soit aliquantes, d'un tout avec celles d'un autre tout ; il y a des parties que l'on appelle *semblables*.

Les *parties semblables* sont celle qui sont contenues chacune de la même maniere dans leur tout. Ainsi 5 & 7 sont des parties semblables de 15 & de 21 : parce que 5 est contenu trois fois dans son tout 15, comme 7 est contenu trois fois dans son tout 21. De même 2 & 4 sont des parties semblables de 5 & de 10, de 7 & de 14.

Nous allons poser & expliquer quelques principes, nécessaires pour l'intelligence de ce traité.

### *PRINCIPES SUR LES RAISONS.*

163. PRINCIPE I. *Le rapport de deux grandeurs est égal au rapport qui est entre leurs moitiés, ou leurs tiers, ou leurs quarts, ou leurs cinquiemes, & ainsi de suite.*

DÉMONSTRATION. Ce principe est évident : puisque si la premiere des grandeurs contient trois fois l'autre ; on conçoit que la moitié de la premiere contiendra trois fois la moitié de la seconde ; que le quart de la premiere contiendra trois fois le quart de la seconde ; que le millieme de la premiere contiendra trois fois le millieme de la seconde ; & ainsi de suite à l'infini. C. Q. F. D.

164. PRINCIPE II. *Les produits sont entre eux comme les racines, lorsqu'elles ont été multipliées par la même quantité.*

EXPLICATION. Ce principe signifie que quand on multiplie deux grandeurs, comme 8 & 4, par une troisieme telle que 5 ; les produits 40 & 20 ont entre eux une raison égale à celles des deux premieres grandeurs avant la multiplication : ou plus simplement, que *les produits sont entre eux, comme les multiplicandes.*

DÉMONSTRATION. Les deux racines 8 & 4, converties en produits par leur commun multiplicateur 5, sont devenues chacune cinq fois ce qu'elles étoient avant la multiplication : donc les deux produits auront entre eux les mêmes rapports qu'ont entre elles les cinq parties qui les composent. Donc si chacune des parties du premier produit, égale à sa racine, contient deux fois une partie du second produit égale aussi à sa racine ;

racine ; il est évident que tout le premier produit contiendra deux fois tout le second produit. On peut dire la même chose des tiers, des quarts, des centiemes, des millioniemes, & de toute autre partie déterminée du premier produit relativement au second.

Si les deux racines avoient été multipliées par 30 ou par 100, les deux racines converties en produits seroient devenues ou trente ou cent fois ce qu'elles étoient avant la multiplication ; & par conséquent les produits auroient été chacun ou trente fois ou cent fois plus grands. C. Q. F. D.

165. PRINCIPE III. *Lorsqu'on divise deux grandeurs par une troisieme ; les quotiens ont entre eux une raison égale à celle des grandeurs avant la division* ; ou plus brievement, *les quotiens sont entre eux comme les dividendes*.

DÉMONSTRATION. C'est une suite du premier principe précédent : puisque les quotiens de deux grandeurs divisées par une troisieme, sont des parties semblables de ces deux grandeurs. Par exemple, si le diviseur est 3, les quotiens sont des tiers : si le diviseur est 9, les quotiens sont des neuviemes : si le diviseur est 100, les quotiens seront des centiemes. La raison ou le rapport qui est entre les deux grandeurs entieres, reste donc égal à l'égard des quotiens, qui sont des parties semblables des deux grandeurs ou des deux dividendes. C. Q. F. D.

166. PRINCIPE IV. *Deux raisons sont égales entre elles, quand elles sont égales à une troisieme raison* : puisque deux raisons sont représentées par leurs exposants (159) ; & que ces exposants étant égaux chacun à l'exposant d'une troisieme raison, sont nécessairement égaux entre eux.

I°. Par exemple, soient les deux raisons, *a* est à *b*,

*c* est à *d*, dont les exposants *m* & *n* soient égaux chacun à l'exposant 3 de la raison 30 est à 10 : il est évident que les deux premieres raisons, égales chacune à la troisieme, sont égales entre elles.

II°. Comme deux raisons égales forment une proportion, ainsi que nous l'observerons bientôt ; si on a deux raisons égales à une troisieme raison, ces deux raisons formeront une proportion. Par exemple,

Si A est à B, comme M est à N . . . . . .
Si R est à S, comme M est à N ; . . . . .
Donc A est à B, comme R est à S. . . . . .
Par exemple encore, . . . . . . . . .
Si A est à B, comme MN est à *mn* ; . . . . .
Si RR est à *rr*, comme MN est à *mn* ; . . . .
Donc RR est à *rr*, comme A est à B. . . . .

167. PRINCIPE V. *Quand deux raisons sont égales entre elles, si une troisieme raison est égale à l'une des deux, elle est aussi égale à l'autre.*

EXPLICATION. Soient ces deux raisons égales 3 . 6, & 300 . 600. Si la raison *ab* . *cd* est égale à la premiere raison, elle est aussi égale à la seconde : puisqu'alors l'antécédent *ab* sera contenu deux fois dans son conséquent *cd* ; comme l'antécédent 3 est contenu deux fois dans son conséquent 6 ; comme l'antécédent 300 est contenu deux fois dans son conséquent 600.

168. PRINCIPE VI. *Quand deux ou trois raisons sont égales entre elles, on peut substituer l'une à l'autre dans le calcul :* puisqu'étant égales, elles ont chacune une même valeur.

169. PRINCIPE VII. *Deux raisons sont égales entre elles, quand l'antécédent de la premiere est à son conséquent, comme l'antécédent de la seconde est à son conséquent.*

EXPLICATION. Deux raisons sont donc toujours égales entre elles,

I°. Quand chaque antécédent contient son conséquent, ou est contenu dans son conséquent; *un égal nombre de fois exactement & sans reste.* Par exemple, 6 est à 3, comme 8 est à 4 : ou bien 5 est à 20, comme 7 est à 28 : ces raisons sont égales; parce que les antécédens sont contenus dans leurs conséquens, ou contiennent leurs conséquens, un même nombre de fois exactement & sans reste.

II°. Quand chaque antécédent contient son conséquent, ou est contenu dans son conséquent; *un égal nombre de fois avec des restes qui sont entre eux, comme sont entre eux les antécédens respectifs.* Par exemple, 5 est à 12, comme 10 est à 24. Chaque conséquent contient le même nombre de fois son antécédent; & il y a dans chaque raison des restes 2 & 4, qui sont entre eux comme l'antécédent de la premiere raison est à l'antécédent de la seconde.

De même 16 est à 5 comme 48 est à 15. Chaque antécédent contient un même nombre de fois son conséquent; & il y a dans chaque raison des restes 1 & 3, qui sont entre eux comme sont entre eux les antécédents respectifs des deux raisons. Le reste 1 est contenu dans le reste 3, autant de fois que l'antécédent dont 1 est le reste, est contenu dans l'antécédent dont 3 est le reste.

On pourroit également dire que *les restes doivent être entre eux, comme sont entre eux les conséquens respectifs.*

## PARAGRAPHE SECOND.

### *PROPORTIONS GÉOMÉTRIQUES.*

170. DÉFINITION. DEUX raisons égales forment une proportion. Ainsi *une proportion* n'est autre chose que l'égalité des deux raisons, ou la comparaison de deux raisons égales.

I°. La *proportion géométrique* eſt donc une comparaiſon de deux raiſons géométriques égales. Par exemple, la raiſon géométrique de 15 à 5, étant égale à celle de 21 à 7; ces deux raiſons forment une proportion géométrique que l'on marque ſouvent en cette maniere, $\frac{15}{5} = \frac{21}{7}$; & plus ordinairement en celle-ci: ∴ 15 . 5 ∷ 21 . 7.

Lorſqu'il s'agit d'énoncer une proportion, comme celle que l'on à apportée pour exemple, on dit: 15 eſt à 5, comme 21 eſt à 7: ou bien 15 & 5, 21 & 7 ſont proportionnels. Soit encore cet exemple en lettres; A . B ∷ C . D: l'on dit de même A eſt à B, comme C eſt à D; ou bien A & B, C & D ſont proportionnels.

II°. Dans une proportion il y a quatre termes; ſavoir, l'antécédent & le conſéquent de la premiere raiſon; l'antécédent & le conſéquent de la ſeconde raiſon. Le premier & le dernier terme s'appellent les *extrêmes*; le ſecond & le troiſieme s'appellent les *moyens*. Soit cette proportion, A . B ∷ C . D: les extrêmes ſont A & D: les moyens ſont B & C.

III°. Quelquefois le même terme eſt conſéquent de la premiere raiſon, & antécédent de la ſeconde; & alors ce terme s'appelle *moyen proportionnel*, & la proportion s'appelle *proportion continue*. Par exemple, 5 . 10 ∷ 10 . 20. A . B ∷ B . C.

IV°. La propriété fondamentale de la proportion géométrique, eſt l'*égalité* du produit des extrêmes au produit des moyens. Il n'y a point de propoſition dans toutes les mathématiques, d'un uſage plus étendu: nous allons en faire le théorême ſuivant, l'un des plus beaux théorêmes de toutes les mathématiques.

### THÉORÊME FONDAMENTAL.

171. *Dans toute proportion géométrique, le produit des extrêmes eſt égal au produit des moyens.*

DÉMONSTRATION. I°. Soit en nombres une proportion quelconque, par exemple celle-ci : 8 . 4 :: 6 . 3. Il s'agit de démontrer que le produit de 8 par 3, qui sont les *deux extrêmes*, est & doit être toujours nécessairement égal au produit de 4 par 6, qui sont les *deux moyens*. Pour cela,

Si on multiplie 8 & 4 par 3 ; le produit de 4 sera la *moitié du produit* de 8 : puisque 4 est la moitié de 8 (164). Mais si au lieu de multiplier 4 par 3, on le multiplie par un nombre double de 3 ; le produit qui en viendra sera *double du produit* de 4 par 3, & par conséquent égal au produit de 8 par 3. Or le second moyen 6 est nécessairement le double de 3 ; parce que le premier antécédent 8 étant le double de son conséquent 4, il faut aussi que le second antécédent 6 soit le double de son conséquent 3 : autrement il n'y auroit pas de proportion. Donc le produit de 4 par 6 est égal au produit de 8 par 3 ; donc le produit des moyens est égal au produit des extrêmes.

Il est évident que la même démonstration peut s'appliquer à toute autre proportion, en changeant seulement les termes de moitié & de double, selon que l'exige le rapport de l'antécédent au conséquent. Par exemple, dans cette proportion 2 . 6 :: 3 . 9 ; si on multiplie 2 & 6 par un même nombre 9 ; le produit de 6 sera 3 *fois plus grand* que le produit de 2. Mais si au lieu de multiplier 6 par 9, on le multiplie par un nombre qui soit nécessairement 3 fois plus petit ; le produit qui en résultera, sera *trois fois plus petit* que le précédent, & par conséquent égal au produit de 2 par 9.

II°. On peut généraliser ainsi cette démonstration. S'il y a proportion entre quatre grandeurs quelconques, l'exposant de la premiere raison est égal à l'exposant de la seconde : donc si $a . b :: c . d$ ; on aura $a = bm$, & $c = dm$. (158.)

On peut donc dans cette proportion, en place de

la grandeur *a*, mettre son égale *bm*; & en place de la grandeur *c*, mettre son égale *dm* : & alors, au lieu de la proportion $a . b :: c . d$, on aura celle-ci, qui est précisément la même proportion exprimée en d'autres termes, $bm . b :: dm . d$.

Or dans cette derniere proportion, il est évident que le produit *bdm* des extrêmes, est égal au produit *bdm* des moyens. C. Q. F. D.

## THÉORÊME II.

172. *Lorsque le produit des extrêmes est égal au produit des moyens, les quatre grandeurs sont proportionnelles.*

DÉMONSTRATION I. Soient les nombres 8, 4, 6, 3; dont le produit des extrêmes $8 \times 3$, soit égal au produit des moyens $4 \times 6$ : nous allons démontrer que $8 . 4 :: 6 . 3$.

Le premier multiplicande 8 étant *double* du second multiplicande 4; il faut évidemment, pour que les produits soient égaux, que le multiplicateur de 4 soit *double* du multiplicateur de 8. Donc si les produits sont égaux, il faut que le premier multiplicande 8, soit au second multiplicande 4; comme le second multiplicateur 6, est au premier multiplicateur 3. Donc si le produit des extrêmes est égal au produit des moyens, il y a proportion entre les quatre grandeurs.

On démontrera la même chose toutes les fois que les deux produits seront égaux. Car pour lors si le premier multiplicande est triple du second, le second multiplicateur sera triple du premier : si le premier multiplicande est cent fois plus grand que le second, le second multiplicateur sera cent fois plus grand que le premier : si le premier multiplicande est dix fois ou mille fois plus petit que le second; le second multiplicateur sera dix fois ou mille fois plus petit que le

premier; & ainsi du reste. On entend par *second multiplicateur*, le troisieme terme de la proportion qui multiplie le second; & par premier multiplicateur, le dernier terme qui multiplie le premier. C. Q. F. D.

DÉMONSTRATION II. On peut généraliser ainsi cette démonstration. Si quatre grandeurs quelconques $a$, $b$, $c$, $d$, sont disposées de telle sorte que le produit des extrêmes $ad$, soit égal au produit des moyens $bc$; ces quatre grandeurs sont nécessairement en proportion. Car si elles ne l'étoient pas, il faudroit que l'exposant de la raison $\frac{a}{b}$ des deux premieres grandeurs, fut ou *plus grand* ou *plus petit* que l'exposant de la raison des deux dernieres grandeurs : ce qui est impossible. Pour le faire voir, nommons $m$ l'exposant de la premiere raison, & $n$ l'exposant de la seconde : nous aurons $a = bm$; & $c = dn$ (158). Ainsi les quatre grandeurs $abcd$, seront $bm$, $b$, $dn$, $d$; & alors le produit $bdm$ des extrêmes, ne sera plus égal au produit $bdn$ des moyens : ce qui est contre l'hypothese. Donc si le produit des extrêmes est égal au produit des moyens; il faut que le rapport $m$ des deux premieres grandeurs, soit égal au rapport $n$ des deux dernieres. C. Q. F. D.

173. COROLLAIRE I. *Quand deux produits sont égaux, on peut toujours en tirer une proportion.*

EXPLICATION. Soient deux produits égaux quelconques $ad = bc$. Je dis qu'on aura $a . b :: c . d$, ou bien $a . c :: b . d$ : ce qui est évident; puisque le produit des extrêmes, est égal au produit des moyens; & qu'il y a toujours proportion, quand ces produits sont égaux.

*Divers changemens dans une Proportion.*

174. COROLLAIRE II. Puisqu'il y a toujours nécess-

fairement proportion entre quatre grandeurs quelconques, toutes les fois que le produit des extrêmes se trouve égal au produit des moyens ; il s'ensuit qu'il y aura encore proportion dans les grandeurs suivantes 8 . 4 :: 6 . 3 :

I°. *Si l'on fait changer de place aux deux extrêmes, sans déranger les deux moyens.* Si 8 . 4 :: 6 . 3 ; donc 3 . 4 :: 6 . 8.

II°. *Si l'on fait changer de place aux deux moyens, sans déplacer les deux extrêmes.* Si 8 . 4 :: 6 . 3 ; donc 8 . 6 :: 4 . 3. Ce double changement s'appelle *alternando.*

III°. *Si l'on fait changer de place & aux deux extrêmes & aux deux moyens, en mettant dans l'une & dans l'autre raison l'antécédent à la place du conséquent, & le conséquent à la place de l'antécédent.* Si 8 . 4 :: 6 . 3 ; donc 4 . 8 :: 3 . 6. Ce changement s'appelle *invertendo.*

IV°. *Si dans l'une & dans l'autre raison, l'on ajoute les conséquents aux antécédents, ou les antécédents aux conséquents.* Si 8 . 4 :: 6 . 3 ; donc 8 + 4 . 4 :: 6 + 3 . 3 : donc 8 . 4 + 8 :: 6 . 3 + 6. Ce changement s'appelle *addendo* ou *componendo.*

V°. *Si dans l'une & dans l'autre raison l'on retranche les conséquents des antécédents, ou les antécédents des conséquents.* Si 8 . 4 :: 6 . 3 : donc 8 — 4 . 4 :: 6 — 3 . 3 ; donc 8 . 4 — 8 :: 6 . 3 — 6. Ce changement s'appelle *subſtrahendo* ou *dividendo.*

Il eſt inutile d'avertir & de faire remarquer que les changemens qu'on fait dans une proportion quelconque en nombres 8 . 4 :: 6 . 3, ſans la détruire, peuvent également ſe faire dans une proportion en lettres *a* . *b* :: *c* . *d*: puiſque les raiſons ſont les mêmes de part & d'autre. Il ne s'agit donc plus ici que de faire ſentir les raiſons de ces changemens dans la démonſtration ſuivante.

DÉMONSTRATION. Etant démontré qu'il y a proportion entre quatre grandeurs, toutes les fois que les deux extrêmes multipliés l'un par l'autre, donnent le même produit que les deux moyens multipliés aussi l'un par l'autre :

I°. Il est évident qu'on peut faire dans une proportion les trois premiers changemens dont nous venons de parler, sans détruire la proportion : puisque dans ces changemens, les deux extrêmes restent toujours tellement arrangés, qu'ils doivent être multipliés l'un par l'autre, aussi bien que les deux moyens; & qu'il est indifférent, quand on multiplie deux grandeurs, de multiplier la premiere par la seconde, ou la seconde par la premiere. (93.)

II°. La raison des deux derniers changemens n'est pas moins évidente & sensible : puisque dans ces changemens les multiplicandes ou les multiplicateurs de chaque raison étant augmentés ou diminués proportionnellement; il est clair que les produits qui en résultent, en multipliant les extrêmes l'un par l'autre, & les moyens l'un par l'autre, doivent être égaux & dans le même rapport qu'auparavant. Or si les produits des extrêmes & des moyens sont égaux, & dans le même rapport qu'auparavant, il est évident que la proportion n'est point détruite. C. Q. F. D.

### *Usage des deux Théorêmes précédents.*

175. REMARQUE. Ces deux théorêmes sont d'un usage infini dans le calcul, dans la géométrie, dans toutes les sciences physico-mathématiques, dans l'usage de la vie civile : comme on le verra par la suite.

I°. Le *premier théorême* fait trouver le quatrieme terme d'une proportion dont on connoît trois termes. Si je sais que quatre grandeurs sont proportionnelles; quand j'en connois trois, je trouve toujours la qua-

trième inconnue, laquelle est ou un des extrêmes ou un des moyens. Je multiplie donc les deux termes connus l'un par l'autre, un extrême par un extrême, ou un moyen par l'autre moyen. Je divise ensuite le produit par l'autre terme connu, & le quotient exprime le terme inconnu qu'on cherchoit. A la place du terme inconnu on met un signe quelconque, c'est ordinairement la lettre $x$.

Par exemple, si j'ai la proportion $97 . 19 :: 64 . x$; je multiplie 19 par 64 : je divise le produit 1216 par 97; & je trouve que le terme inconnu est $12 + \frac{52}{97}$. J'ai donc la proportion toute connue. $97 . 19 :: 64 . 12 + \frac{52}{97}$.

II°. Le *second théorême* fait connoître si quatre grandeurs sont proportionnelles. Quand je doute si quatre grandeurs sont proportionnelles; je multiplie les deux extrêmes l'un par l'autre, & l'un par l'autre les deux moyens. Si le produit est égal, je sais qu'elles sont proportionnelles : si le produit n'est pas égal, je connois qu'ells ne sont pas proportionnelles.

III°. Les *proportions* servent à faire connoître le rapport des grandeurs. Il est évident, par exemple, qu'un pouce est à une lieue, comme deux pouces sont à deux lieues, comme dix pouces sont à dix lieues, comme mille pouces sont à mille lieues.

Il est évident que si j'ai une ligne de douze pouces, & une ligne de douze lieues à mesurer; quand je retrancherai la moitié de chacune, je retrancherai six pouces à l'une, & six lieues à l'autre : que si je les double toutes les deux, j'ajouterai à l'une douze pouces, & à l'autre douze lieues. Si j'ai donc cette proportion A . B :: C . D; & que A vaille dix pouces, B dix lieues, C vingt-cinq pouces, je conclurai que D vaut vingt-cinq lieues. Les proportions font connoître également le rapport des tems, des vitesses, des poids.

Au lieu de pouces que nous avons pris pour exemple

dans ce que nous venons de dire, on peut prendre quelque mesure déterminée que ce soit. On se sert communément d'une ligne ou d'une *échelle* qu'on divise en parties bien égales par le moyen du compas (411). Il est évident que deux degrés de cette échelle, sont à deux toises ; comme vingt degrés de cette échelle sont à vingt toises, comme mille degrés de cette échelle sont à mille toises ; & ainsi de suite. Ce que nous disons des toises, on peut le dire de toute autre mesure déterminée ; par exemple, des pieds, des pas géométriques, des rayons & des diametres de la terre.

## *RAISONS DIRECTES ET INVERSES.*

176. DÉFINITION. Quatre grandeurs peuvent être ou en raison directe, ou en raison inverse.

I°. *Quatre grandeurs sont en raison directe ;* quand le premier terme est au second, comme le troisieme est au quatrieme. Par exemple, 12 . 3 :: 8 . 2.

II°. *Quatre grandeurs sont en raison inverse*, ou réciproque, ou indirecte, (car c'est la même chose) ; quand le premier terme est au second, comme le quatrieme est au troisieme ; par exemple 12 . 3 :: 2 . 8, en raison inverse.

III°. On voit par-là *comment la raison inverse se convertit en raison directe*. Il ne s'agit que de faire changer de place à deux termes de la proportion. Par exemple, si A . B :: C . D en raison inverse ; c'est-à-dire que A . B :: D . C en raison drecte.

IV°. On sait par la théorie des combinaisons, que quatre grandeurs quelconques *abcd*, sont susceptibles de 24 arrangemens différens (113) ; & en supposant que ces quatre grandeurs, ainsi arrangées, soient en proportion géométrique, on trouvera que dans les 24 combinaisons ou arrangemens qu'on peut leur donner, il y en a 8, où elles sont en raison directe ; 8 autres,

où elles sont en raison inverse ; 8 autres enfin, où elles ne sont ni en raison directe, ni en raison inverse.

## REGLE DE TROIS.

177. DÉFINITION. Etant donnés trois termes d'une proportion, on trouve toujours le quatrieme, qui est ou un des extrêmes, ou un des moyens (175). Cette maniere ou *cette méthode de trouver un quatrieme terme proportionnel*, s'appelle la *regle de trois* : parce que par le moyen de trois termes connus, elle donne toujours le quatrieme. Elle s'appelle aussi la *regle d'or* ; à cause de sa grande utilité dans les sciences & dans l'usage de la vie civile. Elle est quelquefois *directe*, quelquefois *inverse*.

### *Regle de Trois directe.*

178. DÉFINITION. La *regle de trois est directe* ; lorsque dans l'état de la question, le quatrieme terme inconnu $x$ que l'on cherche, doit être d'autant plus grand ou plus petit par rapport au troisieme ; que le second est plus grand ou plus petit par rapport au premier. Par exemple, $10 . 5 :: 30 . x$ : cette regle de trois est directe ; parce que dans l'état de la question, les deux derniers termes sont entre eux dans le même ordre que les deux premiers.

Par exemple encore, supposé qu'on fasse cette question : si quinze ouvriers ont fait vingt toises d'ouvrage, combien quarante-cinq ouvriers en feront-ils dans le même tems ? On voit que ces quatre termes sont en raison directe ; voici comment on les arrange : . . . . 15 *ouvriers* . 20 *toises* :: 45 *ouvriers* . x *toises* : ou 15 *ouvriers* . 45 *ouvriers* :: 20 *toises* . x *toises*.

Cette derniere disposition est plus naturelle ; parce qu'on y compare les termes homogenes l'un avec

l'autre. Pour avoir le quatrieme terme; je multiplie les deux moyens l'un par l'autre : le produit est 900. Je divise 900 par le premier extrême 15; le quotient 60 sera le quatrieme terme cherché.

Quand on peut voir tout de suite le rapport du premier terme au second terme; il n'est pas nécessaire de faire la multiplication & la division pour trouver le terme inconnu de la proportion. Dans le dernier exemple proposé, je vois que le premier antécédent 15 ouvriers, est le tiers de son conséquent 45 ouvriers : je conclus que le second antécédent 20 toises sera aussi le tiers de son conséquent $x$; & par conséquent que $x$ sera trois fois 20 toises $=$ 60 toises.

### *Regle de Trois inverse.*

179. DÉFINITION. La *regle de trois est inverse;* lorsque par l'état de la question on voit que le quatrieme terme inconnu doit être ou d'autant plus grand par rapport au troisieme, que le second est plus petit par rapport au premier; ou d'autant plus petit par rapport au troisieme, que le second est plus grand par rapport au premier. Telle seroit cette question : trois ouvriers ont fait un certain ouvrage en dix heures : six ouvriers en combien de tems l'auroient-ils fait?

Pour s'assurer si l'état de la question exprime une raison directe ou une raison indirecte, il faut mettre les termes homogenes avec les homogenes, savoir, les ouvriers avec les ouvriers, les heures avec les heures en cette maniere : 3 *ouvriers* . 6 *ouvriers* :: 10 *heures* . x *heures* *. . . .

Or, l'on voit que les deux derniers termes ne sont point dans le même ordre que les deux premiers; ou que le quatrieme terme n'est pas plus grand que le troisieme, de même que le second est plus grand que le premier. Car six ouvriers doivent faire le même ouvrage en moins de tems, que ne l'ont fait trois ou-

vriers. Pour conserver la proportion juste, il faut donc placer au troisieme rang le terme inconnu *x* en cette maniere : . . . . . . . . .

*3 ouvriers . 6 ouvriers* : : *x heures* . 10 *heures*. . . . .

Cette regle s'appelle *inverse*, ou *réciproque*, ou *indicte* : parce que dans la proportion telle qu'elle a été d'abord donnée, les deux derniers termes homogenes sont entre eux dans un ordre renversé des deux premiers.

### *Usage de la Regle de Trois.*

180. REMARQUE. La *regle de trois* est le flambeau du calcul & de la géométrie. Un seul exemple suffira pour en montrer l'usage & l'utilité dans la géométrie. Quand il est démontré que deux figures, par exemple, deux triangles ont leurs côtés correspondans proportionnels; trois côtés mesurés & connus font connoître le quatrieme qu'il seroit impossible de connoître & de mesurer sans la regle de trois. (*fig.* 45.)

I°. Si je sais que les deux triangles *abc*, ABC, sont semblables & ont leurs côtés correspondans proportionnels; je fais cette proportion ou cette regle de trois : la base *ab* que je mesure, est à la base AB que je mesure; comme le côté *ac* que je mesure, est au côté AC, qu'il me seroit impossible de mesurer. Supposons que la base *a b* contienne 86 lignes, la base AB 86 toises, le côté *ac* 359 lignes : . . . . . . . .

J'aurai . . . . . 86 *lignes* . 86 toises : : 359 lignes . *x* toises : ou *alternando*, 86 lignes . 359 lignes : : 86 toises . *x* toises.

Après avoir multiplié les deux moyens l'un par l'autre, je divise le produit par le premier extrême connu : le quotient me donne la mesure précise du côté inconnu AC qu'il falloit trouver.

II°. On trouvera de même & par la même méthode l'autre côté inconnu du grand triangle, savoir BC, qu'il seroit impossible de mesurer sans la regle de

trois. Je fais pour cela cette proportion ou cette regle de trois : la base *ab* que je mesure , est à la base AB que je mesure ; comme le côté *bc* que je mesure, est au côté BC qu'il me seroit impossible de mesurer. Supposons encore que la base *ab* contienne 86 parties de l'échelle des parties égales (141), la base AB 86 toises, le côté *bc* 497 parties de la même échelle :

J'aurai . . . . . $ab . AB :: bc . BC$. . . . . . . . .

Et en chiffres, . $86 . 86 :: 497 . x$. . . . . . . . .

ou *alternando*, . $86 . 497 :: 86 . x = 497$ toises.

III°. Si les chiffres étoient différens dans les deux raisons de la derniere proportion, après la multiplication & la division, le quotient exprimera la mesure du côté inconnu.

## PARAGRAPHE TROISIEME.

### *RAISONS ARITHMÉTIQUES.*

181. DÉFINITION. LA *raison arithmétique* est la différence dont l'antécédent surpasse le conséquent, ou est surpassé par le conséquent.

I°. C'est par la soustraction que l'on connoît de combien une grandeur surpasse une autre. C'est pourquoi on connoît la *valeur d'une raison arithmétique*, en ôtant le conséquent de l'antécédent , ou l'antécédent du conséquent. Par exemple, on connoît la valeur de la raison arithmétique 6 à 2, en ôtant 2 de 6 : la différence , ou la valeur de cette raison, est 4.

II°. Deux raisons arithmétiques, égales entre elles, forment une *proportion arithmétique* : voici comment on l'exprime, soit en chiffres, $6 . 2 : 12 . 8$; soit en lettres, $a . b : c . d$.

III°. Le premier & le dernier terme de la proportion arithmétique, sont les *extrêmes* : le second & le troisieme sont les *moyens*.

## THÉORÊME I.

182. *Dans une proportion arithmétique, la somme des extrêmes est égale à la somme des moyens.*

DÉMONSTRATION. I°. Soit la proportion arithmétique 5 . 8 : 9 . 12. Je dis que la somme des extrêmes 5+12, est égale à celle des moyens 8+9. Pour saisir & démontrer cette égalité, considerez que si le premier extrême 5, est surpassé de 3 par le premier moyen 8; aussi le second extrême 12 surpasse nécessairement le second moyen 9, de la même quantité 3 : sans quoi il n'y auroit pas de proportion arithmétique. Donc le *défaut* du premier extrême est compensé par l'*excès* du second : donc la somme des extrêmes 5 + 12, doit être égale à la somme des moyens 8 + 9.

II°. Il est évident que le même raisonnement peut être appliqué à toute autre exemple de proportion arithmétique, dont les conséquens surpasseroient également les antécédens. Il est évident encore que ce seroit la même chose, si les antécédens surpassoient également les conséquens : car pour lors l'excès du premier extrême compenseroit le défaut de l'autre extrême.

III°. Il n'est pas moins évident que le même raisonnement peut être également appliqué à une proportion arithmétique exprimée en lettres. Si $a . b : c . d$; donc $a + d = b + c$ : sans quoi il n'y auroit pas de proportion arithméthique entre les quatre grandeurs. C. Q. F. D.

## THÉORÊME II.

183. La proposition inverse du théorême précédent, est encore vraie : *si la somme des extrêmes est égale*

*égale à la somme des moyens, les quatre grandeurs sont en proportion arithmétique.*

DÉMONSTRATION. Par exemple, si $a+d=b+c$; il faut que $a.b:c.d$. Car la somme $a+d$ étant égale à cette autre somme $b+c$:

I°. Il est évident que si $b$ surpasse $a$ de la quantité $x$; il faut aussi que $d$, surpasse $c$ de la même quantité $x$: sans quoi la somme $a+d$ ne seroit pas égale à la somme $b+c$. Ainsi on aura la proportion $a.b:c.d$; puisque le conséquent $b$ surpasse son antécédent, de la même quantité dont le conséquent $d$ surpasse son antécédent.

II°. Il est évident de même que si $b$ est surpassé par $a$ de la quantité $x$; il faut aussi que $d$ soit surpassé par $c$ de la même quantité $x$: sans quoi la somme $a+d$ ne seroit pas égale à la somme $b+c$. Ainsi on aura encore la proportion $a.b:c.d$; puisque le conséquent $b$ est surpassé par son antécédent, de la même quantité dont le conséquent $d$ est surpassé par son antécédent. C. Q. F. D.

184. COROLLAIRE. *Dans une proportion arithmétique, on peut faire changer de place aux deux extrêmes, ou aux deux moyens, sans détruire la proportion:* puisque dans ces changemens, les quatre termes restent toujours tellement arrangés, qu'un extrême fait somme avec l'autre extrême; & qu'un moyen fait somme avec l'autre moyen. Si $a.b:c.d$; donc $d.b:c.a$; donc $a.c:b.d$; donc encore $b.a:d.c$; donc encore $a+b.b:c+d.d$. Donc encore $a-b.b:c-d.d$; & ainsi du reste.

185. DÉFINITION. Dans une proportion arithmétique, on appelle *moyen proportionnel arithmétique*, un terme qui est conséquent de la premiere raison, & antécédent de la seconde. Ainsi dans cette proportion arithmétique $6.9:9.12$; le nombre 9 est moyen proportionnel arithmétique.

Cette proportion s'appelle *proportion continue*; & on la marque communément en cette maniere ÷ 6 . 9 . 12. De même dans cette autre *proportion continue arithmétique* ÷ 9 . 6 . 3; le nombre 6 est moyen proportionnel; & pris deux fois, il égale la somme des deux autres termes 9 + 3.

# ARTICLE SECOND.

## *CALCUL DES FRACTIONS.*

186. OBSERVATION. LA *science des fractions* est d'une nécessité indispensable dans le calcul, dans la géométrie, dans la physique, dans l'usage de la vie civile : parce qu'il arrive très-fréquemment que les grandeurs dont on est obligé de chercher les rapports, ne sont pas exprimées par des nombres ronds ou entiers; & qu'on a souvent besoin de connoître la valeur de leurs restes. Cette partie du calcul a beaucoup de rapport avec la division arithmétique & algébrique, & avec la théorie des raisons & des proportions géométriques dont nous venons de traiter.

187. DÉFINITION. Une *fraction* est une quantité qui exprime le rapport ou la raison d'une partie à son tout : le numérateur, marqué au-dessus, exprime la partie ou le nombre des parties; le dénominateur, marqué au-dessous, exprime le tout divisé en ses parties. Ainsi, une fraction, une raison géométrique, une division, sont trois points de vue différens, qui appartiennent à une même chose.

I°. Une fraction est réellement une raison géométrique & une division. Ce qui s'appelle antécédent & conséquent dans une raison géométrique; dividende & diviseur dans une division numérique ou algébrique,

s'appelle *numérateur* & *dénominateur* dans une fraction (13). C'est pourquoi une fraction, telle que $\frac{2}{4}$, peut se représenter comme une raison géométrique 2 . 4; & réciproquement, une raison géométrique 2 . 4, peut s'exprimer par une division ou par une fraction $\frac{2}{4}$.

II°. Pour se former une *idée exacte d'une fraction*, il faut faire attention qu'un nombre entier quelconque 24, exprime combien une quantité contient de parties égales, dont chacune est appellée une unité : quelle que soit la *nature de cette unité*, qui peut être ou une ligne ou une toise ou un pied ou une livre ou une once ou une heure, & ainsi du reste. Par exemple, 24 pieds expriment une grandeur qui contient 24 parties, dont chacune est une unité, laquelle est ici un pied. Mais il n'y a aucune unité, c'est-à-dire, aucune partie de la quantité assignée en nombres, qu'on ne puisse concevoir composée elle-même d'un certain nombre de parties égales plus petites : chacune ou quelques-unes de ces parties, forment une portion ou une fraction de cette unité. Par exemple, étant donnée à mesurer une étendue de dix à onze pieds; je puis trouver 10 pieds, plus 3 parties d'un pied égal à douze pouces : ces trois parties formeront une fraction en cette maniere, 10 pieds $+ \frac{3}{12}$ d'un pied. S'il s'agissoit de toises, on auroit 10 toises $+ \frac{3}{6}$ d'une toise : parce que l'unité de la toise divisée en pieds, est 6 pieds.

III°. Une *fraction proprement dite* est toujours une quantité moindre que l'unité : parce que dans une fraction proprement dite, le numérateur doit toujours être plus petit que le dénominateur, ou que l'unité divisée en ses parties. Cependant il arrive assez souvent qu'on rencontre des *expressions en forme de fraction*, où le numérateur est égal au dénominateur, ou même plus grand que le dénominateur.

## VALEUR D'UNE FRACTION.

188. OBSERVATION. I°. *Quand le numérateur est égal au dénominateur, la fraction est égale à l'unité.* Par exemple, $\frac{12}{12} = 1$ : parce qu'un tout, égal à toutes ses parties prises ensemble, est toujours contenu une fois dans lui-même, ou dans toutes ses parties prises ensemble.

II°. *Quand le numérateur est plus grand que le dénominateur, la fraction vaut plus que l'unité.* Par exemple, la fraction vaut deux, si le numérateur est double du dénominateur : la fraction vaut quatre, si le numérateur est quadruple du dénominateur ; & ainsi de suite. Par conséquent, $\frac{4}{4} = 1$ : $\frac{8}{4} = 2$ : $\frac{12}{4} = 3$ : $\frac{24}{4} = 6$ : $\frac{100}{4} = 25$.

III°. *Quand le numérateur est plus petit que le dénominateur, la fraction vaut moins que l'unité.* Par exemple, $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ : $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ : $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ : $\frac{4}{24} = \frac{1}{6}$ : $\frac{4}{100} = \frac{1}{25}$.

189. REMARQUE. Comme la valeur ou l'exposant d'une raison géométrique, est le quotient de l'antécédent divisé par le conséquent ; de même *la valeur ou l'exposant d'une fraction, est le quotient du numérateur divisé par le dénominateur.* D'où il suit,

I°. Que lorsque deux fractions ont le même dénominateur ; la plus grande est celle dont le numérateur est plus grand : parce qu'alors la fraction approche plus de l'unité, ou surpasse plus l'unité.

II°. Que lorsque deux fractions ont le même numérateur, la plus grande est celle dont le dénominateur est plus petit.

Soient ces deux fractions $\frac{9}{10}$ & $\frac{8}{10}$, qui ont le *même dénominateur :* la premiere fraction est plus grande que la seconde. Car la premiere $\frac{9}{10}$ est plus petite que le tout, ou que l'unité, seulement d'un dixieme ; puisque $\frac{10}{10} = 1$ : au lieu que la seconde $\frac{8}{10}$ est plus petite

que le tout ou que l'unité, de deux dixiemes.

Soient encore les deux fractions $\frac{4}{6}$ & $\frac{4}{8}$ qui ont le *même numérateur*. La premiere $\frac{4}{6}$ est plus grande que la seconde $\frac{4}{8}$; parce que la premiere vaut deux tiers de l'unité; au lieu que la seconde ne vaut que la moitié de l'unité.

*Valeurs comparées, de deux fractions.*

190. COROLLAIRE. Il suit des principes que nous venons de poser & de développer:

I°. Que *quand deux fractions ont le même dénominateur, les valeurs des fractions sont entr'elles comme les numérateurs*. Les fractions $\frac{5}{10}$ & $\frac{4}{10}$ sont entr'elles comme 5 & 4.

II°. Que *Quand deux fractions ont le même numérateur, les valeurs des fractions sont entr'elles en raison réciproque ou inverse des dénominateurs*. La fraction $\frac{5}{10}$ est à la fraction $\frac{5}{12}$, comme 12 est à 10. La fraction $\frac{1}{4}$ est à la fraction $\frac{1}{8}$, comme 8 est à 4. La fraction $\frac{1}{r}$ est à la fraction $\frac{1}{R}$, comme R est à $r$. La fraction $\frac{1}{rr}$ est à la fraction $\frac{1}{RR}$, comme RR est à $rr$ (*).

III°. Que *quand deux fractions ont différens numérateurs & différens dénominateurs, les valeurs des deux fractions sont entr'elles comme leurs quotiens* La fraction $\frac{3}{6}$, est à la fraction $\frac{6}{18}$; comme le quotient de la premiere $\frac{1}{2}$, est au quotient de la seconde $\frac{1}{3}$.

(*) Par exemple, que $r$ vaille 4; & que R vaille 12. La fraction $\frac{1}{r}$ sera $\frac{1}{4}$: la fraction $\frac{1}{R}$ sera $\frac{1}{12}$: ces deux fractions sont entr'elles, comme 12 est à 4. La fraction $\frac{1}{rr}$ sera $\frac{1}{16}$: la fraction $\frac{1}{RR}$ sera $\frac{1}{144}$: la premiere fraction est à la seconde, comme 144 est à 16.

## THÉORÊME.

191. *Une fraction, multipliée ou divisée par un même nombre quelconque, ne change point de valeur.*

DÉMONSTRATION. I°. Soit une somme quelconque, par exemple 100 écus, sur laquelle j'aie une moitié ou $\frac{1}{2}$. En *multipliant* par un nombre quelconque la fraction qui exprime la moitié qui m'appartient, on ne changera pas la valeur de la fraction. Multipliez les deux termes de la fraction $\frac{1}{2}$ par 5 : le produit sera $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$. Multipliez la même fraction $\frac{1}{2}$ par 50 : le produit sera $\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$. Multipliez encore la même fraction $\frac{1}{2}$ par 1000 : le produit sera $\frac{1000}{2000} = \frac{1}{2}$.

II°. Soit la même somme ou une autre somme quelconque sur laquelle j'aie $\frac{2000}{8000}$, qui exprime *un quart* de la somme. En *divisant* par un nombre quelconque la fraction qui exprime la partie de la somme qui m'appartient; on ne changera pas la valeur de la fraction. Par exemple, divisez la fraction $\frac{2000}{8000}$, c'est-à-dire le numérateur, & ensuite le numérateur, par 2 : le quotient sera $\frac{1000}{4000} = \frac{1}{4}$. Divisez la même fraction $\frac{2000}{8000}$ par 200 : le quotient sera $\frac{10}{40} = \frac{1}{4}$. Divisez encore la même fraction $\frac{2000}{8000}$ par 1000 : le quotient sera $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$. C. Q. F. D.

192. COROLLAIRE. Il résulte de-là, *qu'il y a une infinité de fractions de même valeur, quoique exprimées en termes différens.*

Les fractions sont susceptibles des mêmes opérations que l'on fait sur les nombres entiers : mais pour être soumises au calcul, elles ont quelquefois besoin d'être préparées par deux opérations préliminaires, qui sont la *transformation* & la *réduction*.

### *TRANSFORMATION DES FRACTIONS.*

193. DÉFINITION. La *transformation des fractions*

consiste à faire le changement d'une fraction en une autre fraction, ou d'un entier en une fraction, ou d'une fraction en un entier.

194. PROBLÊME I. *Transformer une fraction, en une autre fraction de même valeur.*

SOLUTION. On peut transformer une fraction en une autre fraction de même valeur :

I°. *En multipliant par une même quantité le numérateur & le dénominateur de la fraction.* Par exemple, en multipliant par 2 l'un & l'autre terme de la fraction $\frac{1}{2}$ ; on aura $\frac{2}{4}$ ; $\frac{4}{8}$ ; $\frac{8}{16}$ ; $\frac{16}{32}$ ; $\frac{32}{64}$ ; & ainsi de suite : lesquelles fractions, sous différentes expressions, conservent la même valeur. (192.)

II°. *En divisant par une même quantité le numérateur & le dénominateur de la fraction, lorsque cette division peut se faire sans reste.* Par exemple, en divisant par 2 l'un & l'autre terme de la fraction $\frac{32}{64}$, on aura $\frac{16}{32}$ ; $\frac{8}{16}$ ; $\frac{4}{8}$ ; $\frac{2}{4}$ ; $\frac{1}{2}$ : ces fractions sont toutes de même valeur.

195. REMARQUE. Cette derniere opération réduit la fraction à une expression plus simple ; & pour cette raison, s'appelle *réduction des fractions à leurs plus simples termes.* Sur quoi voici quelques observations à faire.

I°. Pour *réduire une fraction à l'expression la plus simple*, divisez l'antécédent & le conséquent par un nombre qui divise l'un & l'autre sans reste, par exemple par 2, autant de fois que les deux termes pourront être divisés par 2 : ensuite par 3 ou par 5, autant de fois que la fraction déjà réduite à de moindres termes, pourra être divisée sans reste par 3 ou par 5 : & ainsi de suite.

En général, pour réduire une fraction, à ses moindres termes, il faut diviser le numérateur & le dénominateur de la fraction par leur plus grand *commun*

*diviseur*; c'est-à-dire, par le plus grand nombre qui puisse diviser sans reste l'un & l'autre terme de la fraction.

II°. Pour *trouver le plus grand commun diviseur de deux quantités*, il faut diviser la plus grande par la plus petite; & si la division est juste & sans reste, la plus petite quantité est le plus grand commun diviseur cherché. Mais s'il se trouve un reste, on doit (négligeant le quotient) diviser la plus petite quantité par ce reste; & si la division est juste & sans reste, ce sera le plus grand commun diviseur. Mais s'il se trouve un second reste, il faut diviser le premier reste par le second, & continuer toujours de même à diviser (en négligeant les quotiens) le reste précédent par le reste suivant; & celui qui divisera justement le reste précédent, sera le plus grand commun diviseur cherché. Car les deux quantités données seront toujours des produits exacts de ce dernier reste: parce que celui-ci répété un certain nombre de fois, égalera chacune des deux quantités, qui seront des *multiples* de ce reste.

Par exemple, si je veux trouver le plus grand commun diviseur de 96 & 44, je divise le plus grand nombre par le plus petit: j'ai pour quotient 2, que je néglige; & pour reste 8, par lequel je divise 44. Dans cette seconde division, j'ai pour quotient 5, que je néglige; & pour reste 4, par lequel je divise le reste précédent 8: ce dernier diviseur 4 divise son dividende 8 sans reste. Ce nombre 4 est *le plus grand commun diviseur* des nombres 96 & 44. De même 5 est le plus grand commun diviseur des nombres 25 & 20.

III°. S'il arrive que le dernier reste soit 1, c'est une marque que ces deux nombres n'ont pas d'autre diviseur commun que l'unité; & ces nombres sont appellés *nombres premiers*: c'est le nom qu'on donne aux nombres qui ne sont divisibles exactement &

ſans reſte, que par eux-mêmes, & par l'unité. Tels ſont les nombres 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, &c. (161.)

Or toutes les fois que dans une fraction le numérateur & le dénominateur ſeront des nombres premiers, elle ne pourra pas être réduite à de plus ſimples termes : parce que dans ce cas, le numérateur & le dénominateur n'auront point d'autre diviſeur commun que l'unité.

196. PROBLÊME II. *Transformer un entier, en une fraction de même valeur.*

SOLUTION. On transforme un entier en une fraction de même valeur, en multipliant l'entier par le dénominateur que l'on veut lui donner. Par exemple, ſi l'on veut réduire 4 en fraction, on aura $4=\frac{4}{1}=\frac{8}{2}=\frac{16}{4}=\frac{32}{8}$ : & ainſi de ſuite. Il eſt évident que chacune de ces fractions eſt égale en valeur au nombre entier 4.

De même, ſi on veut mettre en fraction la quantité entiere $r$, on aura $r=\frac{r}{1}=\frac{rr}{r}=\frac{r3}{r2}=\frac{rx}{x}$ : parce que l'entier $r$ étant multiplié & diviſé par une même quantité ; la diviſion détruit ce qu'avoit fait la multiplication, & réciproquement. Ainſi la valeur de $r$, ſous toutes ces expreſſions, reſte la même.

197. PROBLÊME III. *Transformer une fraction, en un entier de même valeur.*

SOLUTION. On transforme une fraction en un entier d'égale valeur, en diviſant le numérateur par le dénominateur, lorſque la diviſion peut ſe faire ſans reſte. Par exemple, $\frac{12}{3}=4$ : de même, $\frac{100}{10}=10$ : de même encore, $\frac{a}{a}=a^0$, ou 1.

Si la diviſion ne peut pas ſe faire exactement & ſans reſte, comme dans cette fraction $\frac{14}{3}$ ; la valeur de

cette fraction sera l'entier 4, plus le reste 2 du numérateur à qui il faudra laisser le même dénominateur 3 : ainsi $\frac{14}{3} = 4 + \frac{2}{3}$.

## *RÉDUCTION DES FRACTIONS.*

198. DÉFINITION. La *réduction des fractions* consiste à leur donner ou un dénominateur commun, ou un dénominateur quelconque.

199. PROBLÊME I. *Réduire des fractions à un dénominateur commun.*

SOLUTION. I°. S'il n'y a que deux fractions à réduire au même dénominateur; *cette réduction se fait en multipliant les deux termes de chaque fraction, par le dénominateur de l'autre fraction.* Par exemple, ces deux fractions $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$ seront réduites au même dénominateur 12; si on multiplie dans la premiere 1 & 3 par 4; & dans la seconde 1 & 4 par 3. Car $\frac{1 \times 4}{3 \times 4} = \frac{4}{12}$ : ensuite $\frac{1 \times 3}{4 \times 3} = \frac{3}{12}$.

Il est évident que ces fractions, réduites au même dénominateur, n'ont point changé de valeur. Dans la premiere, le numérateur & le dénominateur ont été multipliés par une même quantité 4 : dans la seconde, le numérateur & le dénominateur ont été multipliés par une même quantité 3 : donc la valeur des deux fractions n'a poit été changée. (191.)

Pour *réduire en une fraction seule, un entier joint à une fraction*, par exemple, $6 + \frac{3}{4}$; il faut multiplier le nombre entier par le dénominateur de la fraction, ajouter le numérateur de la fraction à ce produit; & de la somme faire le numérateur de la fraction cherchée qui conservera le dénominateur de la premiere fraction. Ainsi $6 + \frac{3}{4}$ se réduit à la fraction $\frac{27}{4}$ : de même $3 + \frac{1}{2}$ se réduit à $\frac{7}{2}$ : de même encore

$13 + \frac{2}{20}$ revient à $\frac{262}{20}$ : de même enfin $1 + \frac{4}{10}$ donne la fraction unique $\frac{14}{10}$. Cette réduction est très-souvent nécessaire dans le calcul des fractions : quand on a à multiplier ou à diviser un entier & une fraction, par un entier & une fraction ; il faut commencer par réduire le multiplicande en une fraction unique d'une part, & le multiplicateur en une autre fraction unique de l'autre.

II°. S'il y a plus de deux fractions à réduire au même dénominateur ; *cette réduction se fait en multipliant le numérateur & le dénominateur de chacune, par le produit des dénominateurs des autres fractions.* Soient les trois fractions $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, à réduire au même dénominateur. Je multiplie d'abord les deux termes de la premiere fraction ou $\frac{5}{6}$, par le produit 15 des dénominateurs 3 & 5 ; & j'ai cette fraction transformée en son égale $\frac{75}{90}$. Je multiplie ensuite les deux termes de la seconde fraction $\frac{2}{3}$ par le produit 30 des dénominateurs 6 & 5 ; & j'ai cette fraction transformée en son égale $\frac{60}{90}$. Je multiplie enfin les deux termes de la troisieme fraction $\frac{4}{5}$ par le produit 18 des deux dénominateurs 6 & 3 ; & j'ai cette fraction transformée en son égale $\frac{72}{90}$. On trouvera donc en suivant la regle prescrite, les trois fractions réduites $\frac{75}{90}$, $\frac{60}{90}$, $\frac{72}{90}$.

On suit la même méthode pour les fractions littérales. Par exemple, les deux fractions $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$, réduites au même dénominateur, sont $\frac{ad}{bd}$ & $\frac{bc}{bd}$. De même les trois fractions $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ & $\frac{m}{n}$, réduites au même dénominateur, sont $\frac{adn}{bdn}$ & $\frac{cbn}{dbn}$ & $\frac{mbd}{nbd}$.

200. PROBLÊME II. *Réduire une fraction à un dénominateur quelconque ; ou évaluer une fraction.*

SOLUTION. Pour réduire une fraction à un dénomi-

nateur quelconque, par exemple la fraction $\frac{4}{12}$ au dénominateur 6, il faut:

I°. Multiplier l'un & l'autre terme de la fraction par le dénominateur donné 6 : ce qui donne $\frac{24}{72}$.

II°. Diviser l'un & l'autre terme de la nouvelle fraction $\frac{24}{72}$; par le dénominateur 12 de la fraction : ce qui donnera la fraction réduite $\frac{2}{6}$, dont le dénominateur est devenu 6.

Cette réduction s'appelle *évaluation*, & sert à évaluer les fractions en parties connues; par exemple, les parties ou fractions de toises, en pieds ou en parties sixiemes, qui sont des parties connues; car le pied est $\frac{1}{6}$ de la toise : ce qui se fait en réduisant la fraction de toise au dénominateur 6.

De même si on a les fractions $\frac{5}{17}$ d'une heure, ou $\frac{17}{44}$ d'une somme de livres; on évalue ces deux fractions, en réduisant la premiere au dénominateur 60 minutes, & la seconde au dénominateur 20 sols, qui sont des parties connues de l'heure & de la livre.

Il est évident qu'en faisant cette double opération, on ne change pas la valeur des fractions : parce que dans ces transformations, on ne fait que multiplier ou diviser par une même quantité; ce qui ne change pas la valeur des fractions. (191.)

## *ADDITION DES FRACTIONS.*

201. REGLE I. *Pour ajouter ensemble des fractions qui ont un même dénominateur; il faut prendre la somme des numérateurs, & donner à cette somme le dénominateur commun des fractions.* Par exemple, il est évident que $\frac{5}{8}+\frac{2}{8}+\frac{7}{8}+\frac{4}{8}=\frac{18}{8}$ : que $\frac{6}{10}+\frac{12}{10}-\frac{7}{10}=\frac{11}{10}$.

202. REGLE II. *Pour ajouter ensemble des fractions qui ont des dénominateurs différens, il faut les réduire à un même dénominateur; & prendre la somme de tous les numérateurs des fractions réduites, pour en faire*

*le numérateur d'une nouvelle fraction qui ait pour dénominateur, le dénominateur des fractions réduites.* Alors cette regle revient à la précédente. Par exemple, pour ajouter ensemble les fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, je les réduis à celles-ci $\frac{16}{24}$, $\frac{12}{24}$, $\frac{18}{24}$ (199) : la somme des numérateurs est 46 : j'ai donc la fraction $\frac{46}{24}$; & en la réduisant à l'expression la plus simple, $1 + \frac{11}{12}$.

## *SOUSTRACTION DES FRACTIONS.*

203. REGLE I. *Pour soustraire une fraction, d'une autre fraction de même dénominateur; il faut prendre la différence des numérateurs, & en faire le numérateur d'une nouvelle fraction qui ait le dénominateur commun.* Par exemple, si on veut soustraire $\frac{7}{10}$ de $\frac{15}{10}$; il est clair qu'on aura $\frac{8}{10}$.

204. REGLE II. *Pour soustraire une fraction, d'une autre fraction de différent dénominateur; il faut les réduire l'une & l'autre au même dénominateur, prendre la différence entre les numérateurs des fractions réduites; & en faire le numérateur d'une nouvelle fraction qui ait le dénominateur commun.* Par exemple, s'il faut soustraire $\frac{1}{4}$ de $\frac{2}{3}$ : réduisez ces deux fractions à celles-ci, $\frac{3}{12}$, $\frac{8}{12}$ : il est clair que la différence est $\frac{5}{12}$.

205. REMARQUE. Si la fraction de la quantité à soustraire est plus grande, ou *s'il faut ôter une fraction d'un nombre entier;* alors il faut réduire en fraction une unité de ce nombre entier. Par exemple, pour ôter $3 + \frac{2}{3}$, de $6 + \frac{1}{4}$; je réduis la quantité $6 + \frac{1}{4}$, à la quantité $5 + \frac{5}{4}$ : & réduisant ensuite $\frac{2}{3}$ & $\frac{5}{4}$ au même dénominateur, j'ai $\frac{8}{12}$ & $\frac{15}{12}$. J'ôte $\frac{8}{12}$ de $\frac{15}{12}$, restent $\frac{7}{12}$. J'ôte enfin 3 de 5, restent 2 : ensorte que la différence cherchée est $2 + \frac{7}{12}$.

## *MULTIPLICATION DES FRACTIONS.*

206. DÉFINITION. Dans la *multiplication des frac-*

*tions*, il s'agit ou de multiplier une fraction par un entier, ou une fraction par une fraction, ou un entier par une fraction, ou un entier & une fraction par un entier & une fraction.

207. REGLE I. *Pour multiplier une fraction par un entier, il faut multiplier seulement le numérateur de la fraction par l'entier.* Par exemple, pour multiplier $\frac{3}{5}$ par 4, multipliez le numérateur 3 par 4; & laissant le même dénominateur, vous aurez la fraction $\frac{12}{5}$, qui est le produit de $\frac{3}{5}$ par 4.

La raison en est, qu'en multipliant $\frac{3}{5}$ par 4, on cherche une fraction quatre fois plus grande : or en multipliant le seul numérateur par 4, on rend la fraction quatre fois plus grande; puisque les fractions $\frac{3}{5}$ & $\frac{12}{5}$ qui ont le même dénominateur, sont entre elles comme les numérateurs. (190.)

On peut aussi réduire l'entier en fraction, en lui donnant l'unité pour dénominateur, & alors cette regle reviendra à la suivante.

208. REGLE II. *Pour multiplier une fraction par une autre fraction, il faut multiplier les deux numérateurs l'un par l'autre, & les deux dénominateurs aussi l'un par l'autre.* Par exemple, pour multiplier les deux fractions $\frac{3}{5}$ & $\frac{4}{8}$ l'une par l'autre, multipliez 3 par 4, & 5 par 8 : vous aurez pour produits $\frac{12}{40}$, qui seront les fractions multipliées l'une par l'autre.

Pour saisir la raison de cette regle, faites attention que pour multiplier la premiere fraction $\frac{3}{5}$ par le nombre entier 4, il faut multiplier seulement le numérateur 3 par 4; & on aura la fraction $\frac{12}{5}$, qui est le véritable produit : comme nous venons de le démontrer. Mais le produit de $\frac{3}{5}$ par $\frac{4}{8}$ doit être huit fois plus petit que $\frac{12}{5}$; puisque le multiplicateur $\frac{4}{8}$ ou 4 divisé par 8, est huit fois plus petit que le multiplicateur entier 4 : il faut donc rendre la fraction $\frac{12}{5}$, huit

fois plus petite. Or pour rendre la fraction $\frac{12}{5}$ huit fois plus petite, il n'y a qu'à multiplier son dénominateur par 8 : on aura la fraction $\frac{12}{40}$, huit fois plus petite que la fraction $\frac{12}{5}$; parce que deux fractions qui ont le même numérateur, sont entre elles en raison inverse des dénominateurs. (190.)

209. REGLE III. *Pour multiplier un entier par une fraction, il faut réduire l'entier en fraction; & alors ce cas revient au cas précédent.* Par exemple, pour multiplier 7 par $\frac{6}{10}$; transformez l'entier 7 en $\frac{7}{1}$, & multipliez l'un par l'autre les deux entécédens & les deux conséquens des deux fractions : vous aurez pour produit $\frac{42}{10}$, qui seront les deux fractions multipliées l'une par l'autre.

Pour *multiplier un entier & une fraction*, par un entier & une fraction; il faut réduire le multiplicande à une fraction unique; le multiplicateur à une autre fraction unique (199) : alors on multipliera ces deux fractions l'une par l'autre, selon la regle précédente. (208.)

## *DIVISION DES FRACTIONS.*

210. DÉFINITION. Dans la *division des fractions*; il s'agit ou de diviser une fraction par un entier, ou une fraction par une fraction, ou un entier par une fraction, ou un entier & une fraction par un entier & une fraction. La division des fractions est l'opération inverse de la multiplication.

211. REGLE I. *Pour diviser une fraction par un entier,*

I°. Si le numérateur de la fraction peut être divisé exactement & sans reste par l'entier, *il faut diviser ce numérateur par l'entier; & laisser à la fraction son dénominateur.* Par exemple, pour diviser $\frac{6}{17}$ par 3, il faut diviser 6 par 3 : on aura $\frac{2}{17}$, qui est la fraction

divisée par 3, ou rendue trois fois plus petite. Car $\frac{6}{12} \cdot \frac{2}{12} :: 6 \cdot 3$. (190.)

II°. Mais si le numérateur de la fraction ne peut pas être divisé exactement par l'entier, *il faut multiplier le dénominateur de la fraction par l'entier; en laissant à la fraction son même numérateur.* Par exemple, pour diviser $\frac{2}{3}$ par 4, il faut multiplier 3 par 4: on aura $\frac{2}{12}$, quotient de la fraction $\frac{2}{3}$ qu'il falloit diviser par 4.

La raison de cette seconde méthode est qu'en divisant une fraction par 4, on cherche à rendre la fraction quatre fois plus petite; & qu'on la rend quatre fois plus petite, en lui laissant le même numérateur, & en rendant quatre fois plus grand son dénominateur: parce que la valeur des fractions $\frac{2}{3}$ & $\frac{2}{12}$ qui ont le même numérateur, est en raison inverse des dénominateurs. (190.)

III°. On peut aussi *réduire l'entier en fraction, en lui donnant l'unité pour dénominateur;* & alors cette regle reviendra à la suivante. Par exemple, $\frac{2}{3}$ divisé par $\frac{4}{1}$ $= \frac{2}{12}$.

212. REGLE II. *Pour diviser une fraction par une autre fraction, il faut les multiplier en croix;* c'est-à-dire, qu'il faut multiplier le numérateur de la premiere, par le dénominateur de la seconde; & le dénominateur de la premiere par le numérateur de la seconde. Par exemple, pour diviser $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{5}$; multipliez 2 par 5, & 3 par 4: les produits $\frac{10}{12}$ seront le quotient cherché.

Voici la raison de cette méthode. Si on avoit à diviser $\frac{2}{3}$ par un entier 4, on auroit pour quotient $\frac{2}{12}$: comme il a été démontré dans l'exemple précédent. Mais on ne divise pas par 4; puisqu'on divise par un nombre cinq fois plus petit $\frac{4}{5}$: il faut donc que le quotient soit cinq fois plus grand que $\frac{2}{12}$.

Or

Or on rend ce quotient cinq fois plus grand, en multipliant le numérateur 2 de la premiere fraction, par le dénominateur 5 de la seconde : puisque les dénominateurs étant les mêmes, deux fractions $\frac{2}{12}$ & $\frac{10}{12}$ sont entre elles, comme les numérateurs. (190.)

213. REGLE III. *Pour diviser un entier par une fraction, il faut réduire l'entier en une fraction qui ait pour dénominateur l'unité :* & alors cette division revient à la division précédente. 10 ou $\frac{10}{1}$ divisé par $\frac{7}{12} = \frac{7}{120}$. De même $a$ ou $\frac{a}{1}$ divisé par $\frac{a}{2} = \frac{2a}{a}$.

Pour *diviser un entier & une fraction*, par un entier & une fraction ; il faut réduire le dividende à une fraction unique ; le diviseur à une autre fraction unique (199) : alors on divisera les deux fractions ainsi simplifiées, selon la seconde regle précédente. (212.)

## *EXALTATION ET EXTRACTION DES FRACTIONS.*

214. REGLE. I°. *Pour avoir le quarré d'une fraction, il faut élever le numérateur & le dénominateur chacun à son quarré.* Par exemple, le quarré de $\frac{1}{2}$ est $\frac{1}{4}$ : le quarré de $\frac{3}{5}$ est $\frac{9}{25}$. De même le quarré de $\frac{a}{x}$ est $\frac{aa}{xx}$.

II°. *Pour avoir le cube d'une fraction, il faut élever le numérateur & le dénominateur, chacun à son cube.* Le cube de $\frac{1}{2}$ est $\frac{1}{8}$ : le cube de $\frac{4}{10}$ est $\frac{64}{1000}$. La raison de ces opérations est évidente, après ce que nous avons dit de la multiplication des fractions.

III°. L'exaltation des fractions à une puissance quelconque, se fait en élevant le numérateur & le dénominateur à la puissance proposée.

IV°. Par la raison contraire, *l'extraction des fractions se fait en prenant la racine, tant du numérateur*

*que du dénominateur.* Par exemple, $\frac{2}{3}$ eſt la racine quarrée de $\frac{4}{9}$; & la racine cubique de $\frac{8}{27}$.

V°. Lorſqu'il n'eſt pas poſſible d'extraire la racine juſte, on ſe contente de l'indiquer par le ſigne radical. Par exemple, la racine quarrée de $\frac{2}{5}$ eſt $\sqrt{\frac{2}{5}}$.

215. COROLLAIRE I. *Les fractions décroiſſent dans l'exaltation, & croiſſent dans l'extraction :* c'eſt-à dire, que dans les fractions, la racine eſt plus grande que la puiſſance; au lieu que dans les nombres entiers, la racine eſt plus petite que la puiſſance.

EXPLICATION. Dans un nombre entier 2, par exemple, la racine 2 eſt *plus petite* que ſa ſeconde puiſſance ou ſon quarré 4; que ſa troiſieme puiſſance ou ſon cube 8. Mais dans un nombre fractionnaire $\frac{1}{2}$, par exemple; la fraction $\frac{1}{2}$ eſt *plus grande* que ſon quarré $\frac{1}{4}$, que ſon cube $\frac{1}{8}$ : comme il eſt évident. De même la fraction $\frac{2}{3}$ eſt plus grande que ſon quarré $\frac{4}{9}$ & que ſon cube $\frac{8}{27}$. De même encore la fraction $\frac{a}{b}$ eſt plus grande que ſon quarré $\frac{aa}{bb}$, & que ſon cube $\frac{aaa}{bbb}$.

216. COROLLAIRE II. *Un nombre entier ne peut avoir pour racine une fraction.* Car une fraction racine eſt toujours plus grande que ſa puiſſance, comme on vient de le démontrer : or dans les nombres entiers, la puiſſance au contraire eſt toujours plus grande que la racine.

Mais il faut obſerver que dans le cas de ces deux corollaires, la fraction doit être une *vraie fraction*, une fraction proprement dite, qui exprime une ou pluſieurs parties de l'unité : par conſéquent il faut que le numérateur ſoit plus petit que le dénominateur. Par exemple, $\frac{5}{4}$ ſont une unité $+ \frac{1}{4}$ : ainſi $\frac{1}{4}$ eſt la vraie fraction. (187.)

On voit ici pourquoi on ne peut jamais trouver exactement la racine quarrée ou cubique d'un nombre

entier 2 ou 10 ou 67, qui n'est pas un quarré ou un cube parfait, produit par un nombre entier.

# ARTICLE TROISIEME.

## *Calcul des Raisons composées.*

217. Définition. Une *Raison composée* est le produit de deux ou de plusieurs raisons simples. Par exemple, $\frac{ac}{bd}$ est la raison composée des raisons simples $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$. De même, la raison $\frac{ace}{bdf}$ est la raison composée des trois raisons simples $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$. Par exemple encore en nombres, ces deux raisons simples $\frac{2}{4}$, $\frac{7}{8}$, multipliées l'une par l'autre, antécédent par antécédent, & conséquent par conséquent, donneront cette raison composée $\frac{14}{32}$.

De même dans ces trois raisons simples, $\frac{4}{5}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{2}{3}$; si on multiplie le premier antécédent par le second, & le produit des deux premiers antécédens par le troisieme; & qu'on multiplie de même les conséquens; on aura cette raison composée $\frac{56}{120}$.

### *Raisons doublées.*

218. Définition. Les raisons simples, qui forment la raison composée, peuvent être égales ou inégales. Quand les deux raisons composantes sont inégales, la raison qui en résulte, est appellée simplement *raison composée*: quand les deux raisons composantes sont égales; la raison qui en résulte est appellé *raison doublée*.

Ainsi la *raison doublée* est le produit de deux rai-

ſons égales, dont les antécédens ont été multipliés l'un par l'autre, auſſi bien que les deux conſéquens. Par exemple, ſi $\frac{4}{8} = \frac{3}{6}$; $\frac{12}{48}$ eſt une raiſon doublée.

S'il n'y a qu'une ſeule raiſon compoſante, par exemple $\frac{a}{b}$, la *raiſon doublée* de cette raiſon ſimple eſt formée du quarré de l'antécédent & du quarré du conſéquent. Ainſi $\frac{aa}{bb}$ eſt la raiſon doublée de $\frac{a}{b}$ : de même $\frac{16}{25}$ eſt la raiſon doublée de $\frac{4}{5}$.

On voit ici qu'une raiſon doublée eſt tout autre choſe qu'une raiſon double (156); comme on va voir qu'une raiſon triplée eſt fort différente d'une raiſon triple.

*Raiſons triplées.*

219. DÉFINITION. La *raiſon triplée* eſt le produit de trois raiſons égales. Si $\frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8}$; multipliez les deux premiers antécédens l'un par l'autre, & le produit des deux premiers antécédens par le troiſieme antécédent; multipliez de même les trois conſéquens; vous aurez la raiſon triplée $\frac{24}{192}$. De même ſi $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$; la raiſon $\frac{ace}{bdf}$ eſt triplée.

S'il n'y a qu'une raiſon compoſante, la *raiſon triplée* de cette raiſon ſimple eſt formée du cube de l'antécédent, & du cube du conſéquent. Par exemple $\frac{aaa}{bbb}$ eſt la raiſon triplée de $\frac{a}{b}$. De même en nombres, $\frac{64}{125}$ eſt la raiſon triplée de la raiſon $\frac{4}{5}$.

Il ſuit de ces définitions, que toute raiſon doublée ou triplée, eſt une raiſon compoſée; mais que toute raiſon compoſée n'eſt pas doublée ou triplée. Les raiſons doublées ſont d'un grand uſage dans la meſure des ſurfaces; & les raiſons triplées, dans la meſure des ſolides.

Il s'agit, dans les quatre théorêmes ſuivans, d'ap-

prendre à évaluer les sommes, les produits, les quotients, les rapports, des raisons simples & composées.

### THÉORÊME I.

220. *Si l'on multiplie ou si l'on divise deux quantités, par une même troisieme quantité; les produits ou les quotients auront entre eux la même raison, qu'avoient les multiplicandes ou les dividendes.*

DÉMONSTRATION. Cette proposition a été déjà démontrée ailleurs (163 & 165). En voici une nouvelle démonstration en lettres.

I°. Si l'on *multiplie* les racines $a, b$, par une même troisieme quantité $m$; les produits $am, bm$, seront dans le même rapport que les racines $a, b$: c'est-à-dire, qu'on aura la proportion $am . bm :: a . b$. Car le produit des extrêmes est égal au produit des moyens; $abm = abm$.

II°. Il en sera de même, si l'on *divise* deux quantités $a, b$, par une même troisieme quantité $m$. Car il est évident que $\frac{a}{m} . \frac{b}{m} :: a . b$; à cause de $\frac{ab}{m} = \frac{ab}{m}$ (207): que $\frac{12}{3} : \frac{36}{3} :: 12 . 36$: & ainsi du reste (106). C.Q.F.D.

221. COROLLAIRE. De ce théorême ainsi généralisé découlent plusieurs vérités qui ont déjà été établies en divers endroits de cet ouvrage, & que nous allons présenter ici sous un même point de vue. Il en résulte:

I°. Que *les touts sont entre eux, comme leurs parties semblables*: c'est-à-dire, comme leurs moitiés, comme leurs tiers, comme leurs centiemes; & que les *parties semblables*, savoir, les moitiés, les quarts, les centiemes, *sont entre elles comme leurs touts*.

II°. Que *les produits qui ont une racine commune, sont entre eux comme les racines inégales*. Par exemple, les produits $am, bm$, qui ont une racine commune $m$,

sont entre eux comme les racines inégales $a$ & $b$ : puisque si l'on efface les termes communs $m$ & $m$, il reste $a$ & $b$. (106.)

III°. Qu'*on peut dans une proportion multiplier ou diviser les deux antécédens ou bien les deux conséquens par une même quantité, sans détruire la proportion.* Par exemple, on peut *multiplier* un des termes de chaque raison par la quantité quelconque $m$. Si $a . b :: c . d$, donc $am . b :: cm . d$: car puisque $ad = bc$, donc $adm = bcm$.

On peut de même *diviser* un des termes de chaque raison par la quantité quelconque $m$. Si $a . b :: c . d$; donc $\frac{a}{m} . b :: \frac{c}{m} . d$: puisqu'en effaçant dans les deux antécédens la quantité qui leur est commune, il reste simplement $a$ & $c$. (106.)

## THÉORÈME II.

221. *Dans une suite de raisons égales, la somme des antécédens est à la somme des conséquens, comme un seul antécédent est à son conséquent.*

DÉMONSTRATION. Soient les raisons égales $\frac{6}{3} = \frac{8}{4} = \frac{10}{5} = \frac{14}{7}$ : la somme des antécédens $6 + 8 + 10 + 14 = 38$, est à la somme des conséquens $3 + 4 + 5 + 7 = 19$; comme un antécédent quelconque 6 est à son conséquent 3.

Car on peut concevoir l'antécédent total 38, partagé dans les mêmes parties qui étoient séparées avant l'addition : de même on peut concevoir le conséquent total 19, partagé dans les mêmes parties qui étoient séparées avant l'addition. Or chaque partie de l'antécédent total, contient deux fois chaque partie correspondante de son conséquent ; donc l'antécédent total qui est la somme des antécédens particuliers, contient deux fois le conséquent total qui est la somme

des conséquens particuliers : donc la somme des antécédens est à la somme des conséquens, comme un seul antécédent est à son conséquent.

On peut démontrer par le même raisonnement, que si chacun des antécédens particuliers est contenu cent fois dans son conséquent, la somme des antécédens sera contenue cent fois dans la somme des conséquens. Et ainsi du reste. C. Q. F. D.

223. COROLLAIRE. *Dans une suite de raisons égales, quand on connoît le rapport d'un antécédent à son conséquent; on connoît le rapport de la somme de tous les antécédens, à la somme de tous les conséquens* : puisque ces deux sommes sont deux touts composés d'un même nombre de parties semblables, qui sont entre elles comme leurs touts; & que l'on connoît le rapport de deux de ces parties semblables.

## THÉORÊME III.

224. *Si l'on multiplie chaque terme d'une proportion, par les termes correspondans d'une autre proportion; les produits seront en proportion.*

DÉMONSTRATION. Soient les deux proportions quelconques $a \,.\, b :: c \,.\, d$; & $r \,.\, s :: t \,.\, v$. Il s'agit de démontrer que si on multiplie $a$ par $r$, $b$ par $s$, $c$ par $t$, $d$ par $v$; les produits seront encore en proportion. Pour le démontrer,

I°. Je nomme $m$ l'exposant de la premiere proportion $a \,.\, b :: c \,.\, d$; & j'ai $a = bm$, & $c = dm$ (158). Il est clair qu'en place de la grandeur $a$, je puis mettre son égale $bm$; & qu'en place de la grandeur $c$ je puis mettre aussi son égale $dm$ : & alors au lieu de la proportion $a \,.\, b :: c \,.\, d$; j'aurai son égale $bm \,.\, b :: dm \,.\, d$, qui est précisément la même proportion exprimée en d'autres termes.

II°. Je nomme $n$ l'exposant de la seconde propor-

tion $r.s::t.v$, lequel expoſant peut être différent de celui de la premiere; & j'ai $r = sn$, & $t = vn$ (158). Il eſt clair encore qu'en place de la grandeur $r$, je puis mettre ſon égale $sn$; & qu'en place de la grandeur $t$, je puis mettre auſſi ſon égale $vn$: & alors au lieu de la proportion $r.s::t.v$; j'aurai ſon égale en tout $sn.s::vn.v$.

| | |
|---|---|
| Proportions. | $a.b::c.d = bm.b::dm.d.$ <br> $r.s::t.v = sn.s::vn.v.$ |
| Produit. | $ar.bs::ct.dv = bmsn.bs::dmvn.dv$ |

III°. Il y a proportion entre quatre grandeurs, quand le produit des extrêmes eſt égal au produit des moyens (172); or dans les quatre dernieres grandeurs, le produit $bdmnsu$ des extrêmes eſt évidemment égal au produit $bdmnsu$ des moyens. Donc il y a proportion entre ces quatre grandeurs.

Mais les quatre grandeurs qui les précedent, leur ſont préciſément égales, chacune à chacune: donc il y a auſſi proportion entre ces quatre grandeurs, qui ſont le produit de la premiere proportion par les termes correſpondans de la ſeconde. C. Q. F. D.

225. COROLLAIRE I. *Lorſque quatre grandeurs ſont en proportion; ſi on les éleve chacune à leur quarré ou à leur cube, ces quarrés ou ces cubes ſeront en proportion.*

DÉMONSTRATION. I°. Quand on éleve à leurs quarrés quatre grandeurs quelconques $a, b, c, d$; on fait la même choſe que ſi on multiplioit les termes de la proportion $a.b::c.d$, par les termes d'une autre proportion $a.b::c.d$. Or en ce cas les produits ſont en

| | |
|---|---|
| Proportions. | $a.b::c.d$ <br> $a.b::c.d$ |
| Quarrés. <br> Racines. | $aa.bb::cc.dd$ <br> $a.b::c.d$ |
| Cubes. | $aaa.bbb::ccc.ddd$ |

proportion ; comme on vient de le démontrer : donc les quarrés, qui ne sont autre chose que ces produits, sont aussi en proportion.

II°. Maintenant si on multiplie les quarrés par les racines, on multiplie les quatre termes d'une proportion par les termes correspondans d'une autre proportion ; or dans ce cas les produits, qui ne sont autre chose que les cubes, sont en proportion ; selon le théorême précédent. Donc lorsque quatre grandeurs sont en proportion, leurs quarrés & leurs cubes sont aussi en proportion.

III°. Mais il faut observer ici que la proportion des quarrés, n'est pas celle des racines ; & que la proportion des cubes n'est pas celle des quarrés ou des racines. La raison des racines est tantôt plus grande & tantôt plus petite que celle des quarrés & des cubes ; comme on le voit ici en nombres.

| *Racines.* | *Quarrés.* | *Cubes.* |
| --- | --- | --- |
| 1, 2 :: 3, 6 | 1. 4 :: 9. 36 | 1. 8 :: 27. 216. |
| 2. 1 :: 6. 3 | 4. 1 :: 36. 9 | 8. 1 :: 216. 27. |

226. COROLLAIRE II. *Si quatre grandeurs sont en proportion ; leurs doubles, leurs triples, toutes les grandeurs qui les contiennent un même nombre de fois, sont encore en proportion :* puisqu'en prenant leurs doubles ou leurs triples ou leurs quadruples, & ainsi du reste, c'est comme si on les multiplioit par une même grandeur, par 2, ou par 3, ou par 4, & ainsi du reste : ce qui ne change pas leur raison ou leur rapport. (220.)

## THÉORÊME IV.

227. *Si l'on divise chaque terme d'une proportion, par les termes correspondans d'une autre proportion ; les quotiens seront en proportion.*

DÉMONSTRATION. Soient deux proportions quel-

conques, dont les exposans soient $m$ & $n$, comme dans le théorême précédent.

| | |
|---|---|
| Proportions. | $a \,.\, b :: c \,.\, d = bm \,.\, b :: dm \,.\, d$<br>$r \,.\, s :: t \,.\, v = sn \,.\, s :: vn \,.\, v.$ |
| Quotient. | $\frac{a}{r} \,.\, \frac{b}{s} :: \frac{c}{t} \,.\, \frac{d}{v} = \frac{bm}{sn} \,.\, \frac{b}{s} :: \frac{dm}{vn} \,.\, \frac{d}{v}.$ |

Si dans la derniere proportion, on divise l'antécédent de chaque raison par son conséquent; l'exposant est de part & d'autre $\frac{m}{n}$: donc la premiere raison est égale à la seconde (159). Par conséquent, dans cette derniere proportion, le premier antécédent est à son conséquent, comme le second antécédent est à son conséquent; ainsi il y a proportion entre les quatre grandeurs.

Mais les quatre grandeurs $\frac{a}{r}$, $\frac{b}{s}$, $\frac{c}{t}$, $\frac{d}{v}$, sont égales aux quatre grandeurs correspondantes de la proportion qui les suit: donc, puisque les quatre dernieres grandeurs sont en proportion, les quatre premieres sont aussi en proportion. Or ces quatre premieres grandeurs sont les quotiens des termes correspondans de deux proportions, divisés l'un par l'autre; donc ces quotiens sont en proportion. C. Q. F. D.

228. COROLLAIRE I. *Lorsque quatre grandeurs sont en proportion, leurs racines quarrées & cubiques sont aussi en proportion.*

DÉMONSTRATION. Puisque les quarrés étant en proportion, les racines le sont aussi: (225.)

I°. Si on regarde les termes d'une proportion quelconque $a \,.\, b :: c \,.\, d$, comme des grandeurs quarrées; il est clair que leurs racines quarrées seront en proportion. On aura par conséquent, $\sqrt{a} \,.\, \sqrt{b} :: \sqrt{c} \,.\, \sqrt{d}$.

II°. Si on regarde les termes de la même proportion quelconque $a . b :: c . d$, comme des grandeurs cubiques ; il est clair que leurs racines cubiques, qui ont multiplié leurs racines quarrées, seront encore en proportion (225). On aura par conséquent $\sqrt[3]{a} . \sqrt[3]{b} :: \sqrt[3]{c} . \sqrt[3]{d}$.

III°. Mais il faut observer ici, comme dans le premier corollaire précédent (225), que la raison des cubes n'est pas celle des racines quarrées ; & que la raison des racines quarrées n'est pas celle des racines cubiques. Ces trois proportions sont différentes entre elles, sans cesser d'être de vraies proportions. C'est ainsi que ces trois proportions sont différentes entre elles : $2 . 4 :: 6 . 12$ : ensuite $3 . 10 :: 6 . 20$ : ensuite $10 . 3 :: 20 . 6$ : mais quoique différentes ; elles sont chacune une vraie proportion (172).

229. COROLLAIRE II. *Si quatre grandeurs sont en proportion, leurs moitiés, leurs tiers, leurs quarts, toutes leurs parties semblables, sont encore en proportion :* puisqu'en prenant leurs moitiés, leurs tiers, leurs quarts, toutes les grandeurs quelconques qu'elles contiennent un même nombre de fois ; c'est comme si on les divisoit chacune par une même grandeur, par 2 ou par 3 ou par 4, & ainsi du reste : ce qui ne change pas leur raison ou leur rapport, (220.)

# ARTICLE QUATRIEME.

## *CALCUL DES PROGRESSIONS.*

230. DÉFINITION. On appelle *progression*, une suite de raisons égales, dans laquelle chaque terme est en même tems *conséquent* de la raison précédente, &

antécédent de la raison suivante. Il y a & une *progression arithmétique*, & une *progression géométrique* : l'une & l'autre est ou finie ou infinie.

On nomme *progression finie*, celle qui est composée d'un nombre fini de termes. On nomme *progression infinie*, celle qui est composée d'un nombre de termes infini. Ces progressions se nomment aussi *suites*.

La *progression arithmétique* se marque communément en cette maniere, ÷ 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 ; & ÷ *a* . *b*. *c* . *d* . *e* . *f*.

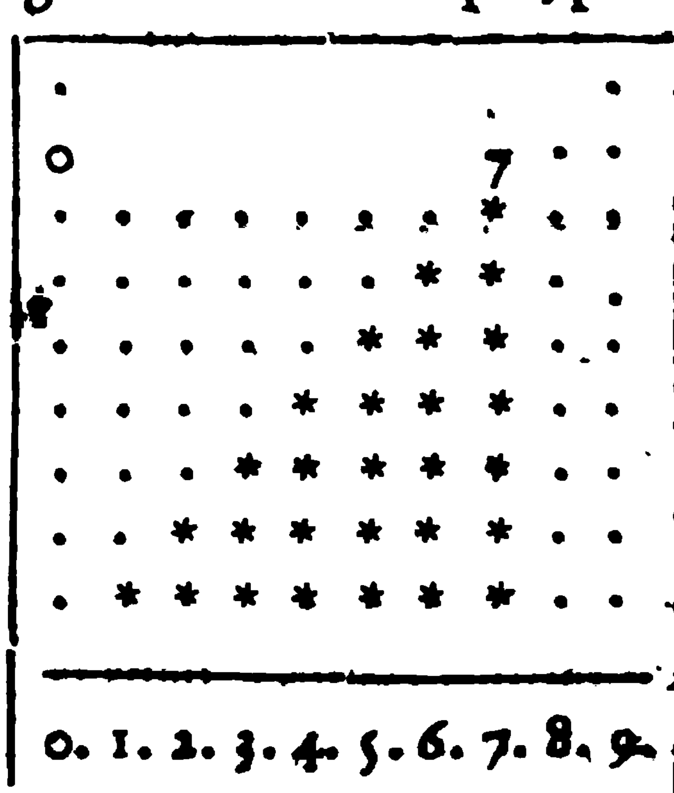
La *progression géométrique* se marque en cette autre maniere, ∺ 3 . 6 . 12 . 24 . 48 . 96 ; & ∺ *a* . *b* . *c* . *d* . *e* . *f* . *g*.

## PARAGRAPHE PREMIER.

### *Progressions finies.*

231. PROBLÊME I. *Trouver la valeur d'une suite finie de nombres naturels**, *quand cette suite commence par zero.*

SOLUTION. Soit une progression arithmétique, prise dans la suite des nombres naturels 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. On trouvera tout d'un coup la somme de tous les termes, en prenant *la moitié du produit du dernier terme multiplié par un nombre plus grand d'une unité que ce dernier terme.*




Car soit exprimée la suite croissante des nom-

bres naturels par des étoiles rangées en colonnes ; savoir, + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7, & ainsi de suite. Pour completter le rectangle en rétrogradant, il faudra placer sur les colonnes qui précedent la derniere 7, par exemple, un égal nombre d'étoiles ; savoir, + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 : & alors la derniere colonne, en rétrogradant, tombera sur la colonne 0.

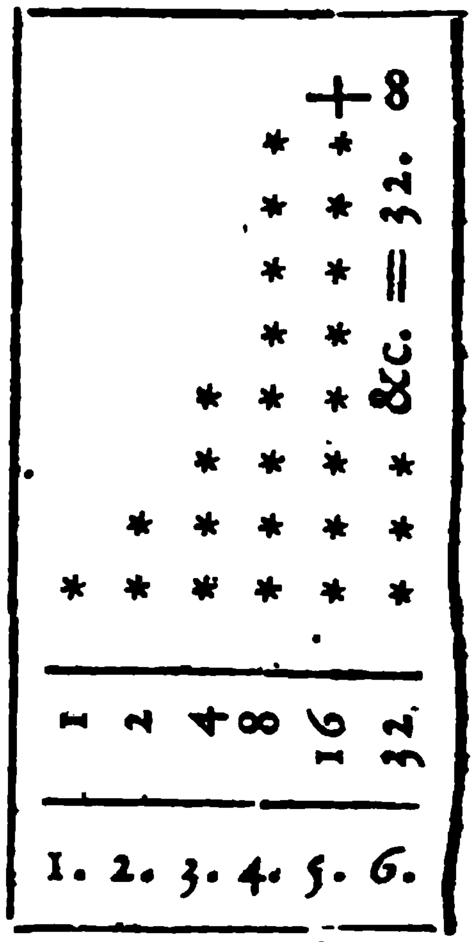
Or on auroit la somme entiere des étoiles qui formeroient ce rectangle 0770 ; en multipliant la hauteur 7, par la largeur 8 qui exprime de plus la colonne 00, qu'il faut ajouter en rétrogradant : donc on aura la somme des étoiles croissante selon la suite des nombres naturels, en prenant la moitié du produit qui naît du dernier terme multiplié par un terme plus grand d'une unité que ce dernier terme ; puisque cette somme est égale à la moitié du produit & du rectangle. C. Q. F. D.

232. COROLLAIRE. *Quand la suite des nombres naturels commence par l'unité ; la somme de tous les termes est égale à la moitié du produit du dernier terme multiplié par un nombre plus grand d'une unité que ce dernier terme*. Par exemple,

Si cette suite renferme six termes 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 ; la somme de tous ces termes est la moitié du produit du dernier terme 6, par 7 plus grand d'une unité.

Si cette suite renferme 336 termes ; la somme de tous ces termes est la moitié du produit du dernier terme 336, par 337 plus grand d'une unité. 336 × 337 = 113232 : la moitié de ce dernier nombre est la somme de tous les termes de la suite des nombres naturels qui commence par l'unité & dont le dernier terme est 336 ; & cette moitié ou cette somme est 56616.

REMARQUE. Par une semblable théorie, on pourra *trouver la somme de tous les termes d'une progression géométrique finie, dont les termes commencent par l'unité & vont en doublant* ∺ 1 . 2 . 4 . 8 . 16 . 32 . 64 . 128 . 256, &c. Car en supposant que chaque terme de cette suite soit représenté par une colonne d'autant d'étoiles ou de points qu'il a d'unités; on verra clairement que le premier terme plus 1, est égal au second; que les deux premiers termes + 1, sont égaux au troisieme; que les trois premiers termes + 1, sont égaux au quatrieme; & ainsi de suite à l'infini. Par conséquent, en cherchant par un calcul suivi le dernier terme 25, par exemple, de cette suite; on trouvera la valeur de ce dernier terme 25 : & cette valeur, plus cette valeur moins 1, sera la somme de tous les termes de la progression donnée, jusqu'au vingt-cinquieme terme inclusivement.



Un Indien, nommé Sessa, ayant inventé le jeu d'échecs, c'est-à-dire, le plus beau de tous les jeux qu'ait encore imaginé l'esprit humain, présenta & fit connoître ce genre d'amusement à son Souverain. Le monarque Indien, charmé d'une invention si propre à exercer & à étendre l'esprit en l'intéressant & en l'amusant, demanda à son Sujet ce qu'il souhaiteroit pour récompense de la satisfaction & du plaisir que lui procuroit le jeu par lui créé? Un grain de bled, Sire, répondit Sessa, pour la premiere case, deux pour la seconde, quatre pour la troisieme, & ainsi de suite en doublant toujours jusqu'à la derniere ou soixante-quatrieme. Le Monarque souscrivit à sa

demande, n'en prévoyant pas d'abord toute l'étendue. Mais après un coup d'œil sur un calcul assez simple, suivi pendant quelques momens dans son progrès, il apperçut bientôt que la demande de Sessa n'étoit & ne pouvoit être au fond qu'un ingénieux badinage, destiné à opérer une piquante surprise; & que l'immense région des Indes produiroit à peine en huit ou dix mille ans, la quantité de bled qu'il avoit promise. Car en supposant que 72 grains de bled pesent *un gros* ou un huitieme d'once (7. V°.), & que le *muid de bled* dans l'Inde pesât 36 de nos quintaux; on trouvera qu'à la vingt-cinquieme case, il seroit dû à Sessa deux fois 16,777,216 grains de bled, qui réduits en gros, en onces, en livres (52), font un peu plus d'un muid de 36 quintaux; & qu'à la cinquantieme case, il lui auroit été dû plus de 16,777,216 muids semblables; & qu'en poussant cette progression jusqu'à la soixante-quatrieme case, la somme des muids de bled eût été immense.

233. PROBLÊME II. *Trouver la valeur de la suite finie des nombres impairs* 1, 3, 5, 7, 9, 11, &c.

SOLUTION. Soit une suite finie de nombres impairs, qui commence par l'unité; & que chaque terme exprime un nombre fixe d'étoiles, que vous puissiez arranger en quarrés, si la chose est possible.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| . | . | . | . | . | . |
| o | o | o | o | * | . |
| o | o | o | * | * | . |
| o | o | * | * | * | . |
| o | * | * | * | * | . |
| * | * | * | * | * | . |
| 1, | 3, | 5, | 7, | 9, | 11 |
| 1 . | 2 . | 3 . | 4 . | 5 . | 6 |

Sur le premier terme 1, placez une étoile correspondante à ce terme. Sur le second terme 3 de cette suite, placez deux des étoiles correspondantes à ce terme: il vous en restera une pour mettre sur le premier terme; & vous aurez un quarré. Sur le troisieme terme 5 de cette suite, placez trois des étoiles cor-

respondantes à ce terme : il vous en restera deux à placer, l'une sur le second & l'autre sur le premier terme ; & vous aurez encore un quarré. Sur le quatrieme terme 7 de cette suite, placez quatre étoiles : il vous en restera trois à placer sur les trois termes précédens ; & vous aurez encore un quarré. Sur le cinquieme terme 9 de cette suite, placez cinq étoiles : il vous en restera 4 à reprendre sur les quatre termes précédens ; & vous aurez encore un quarré ; & ainsi de suite à l'infini.

D'où il résulte qu'en connoissant le nombre des termes d'une suite quelconque, *on aura toujours la somme, en prenant le produit du dernier terme multiplié par lui-même.* Par exemple, la somme de tous les termes, à compter depuis le *quatrieme* terme inclusivement, est le quarré de 4 ou 16. De même, la somme de tous les termes, à compter depuis le *sixieme* terme inclusivement, est le quarré de 6 ou 36 ; & ainsi du reste. C. Q. F. D.

## THÉORÊME.

234. *Dans toute progression géométrique, le premier terme est au troisieme, comme le quarré du premier est au quarré du second ; & le premier terme est au quatrieme, comme le cube du premier est au cube du second.*

DÉMONSTRATION. Soit la progression géométrique quelconque $\div\!\div a . b . c . d . e . f . g$, dans laquelle le premier terme $a$ est au second terme $b$, comme ce second terme $b$ est au troisieme $c$ ; comme ce troisieme terme $c$ est au quatrieme terme $d$ ; & ainsi de suite : toutes ces raisons sont égales, par la supposition. Le premier terme $a$ est une fois lui-même : il peut donc toujours être représenté par l'unité, soit qu'il se trouve plus grand, soit qu'il se trouve plus petit que son conséquent $b$. Après ces observations,

1°. Je

I°. Je dis que $a . c :: aa . bb$. Car si le premier terme $a$, qu'on peut toujours supposer $= 1$, contient par exemple 3 fois le second $b = \frac{1}{3}$, & le second 3 fois le troisieme $c = \frac{1}{9}$; il est évident que le premier contiendra 3 fois $3 = 9$ fois, le troisieme. Or le quarré $aa$ du premier terme contiendra aussi 9 fois le quarré $bb$ du second: puisque $1 \times 1 = 1$, & que $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.

La même démonstration auroit également lieu, si le premier terme étoit, par exemple, 4 fois plus petit que le second. Car par l'hypothese on auroit $\frac{1}{4} . 1 :: 1 . 4$: donc le quarré du premier $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$, est au quarré du second $1 \times 1 = 1$, comme $\frac{1}{4}$ est à 4; & par conséquent comme 1 est à 16.

Si la raison du premier terme au second étoit un incommensurable en nombres; par exemple, si le premier terme $a$ contenoit deux fois & un peu plus le second terme $b$, & que cet *un peu plus*, ce *reste sourd*, ne pût être exprimé par aucun nombre entier ou fractionnaire (6); la même démonstration auroit également lieu: parce qu'alors le troisieme terme $c$, contiendroit deux fois avec un semblable *reste sourd*, le quatrieme terme $d$; & ainsi du reste de la progression.

II°. Je dis que $a . d :: aaa . bbb$. Car si le premier terme $a$ que je puis encore supposer $= 1$, est contenu 4 fois dans le second $b = 4$, & que le second soit contenu 4 fois dans le troisieme $c = 16$; il est évident que le quatrieme terme $d$ sera 64, & que le premier terme sera contenu 64 fois dans le quatrieme: or le cube du premier terme $1 \times 1 \times 1 = 1$, sera aussi contenu 64 fois dans le cube du second $4 \times 4 \times 4 = 64$. C. Q. F. D.

235. REMARQUE. On démontreroit de même & par le même raisonnement, que le quarré d'un terme quelconque d'une progression géométrique, par exemple, du douzieme que nous appellerons $m$, est au quarré de celui qui le suit immédiatement; comme le terme $m$ est au troisieme depuis $m$ inclusivement;

& que le cube du terme *m* est au cube du terme suivant, comme ce terme *m* est au quatrieme depuis *m* inclusivement.

236. COROLLAIRE. Il suit de-là que dans une progression géométrique ∺ 1 . 2 . 4 . 8 . 16 . 32 . 64 & ainsi de suite; la raison du premier terme au troisieme, est *doublée* de la raison qui est entre le premier & le second; & que la raison du premier terme au quatrieme est *triplée* de la raison qui est entre le premier & le second. On peut prendre pour premier terme dans cette progression, ou le nombre 2, ou le nombre 4, & ainsi de suite : alors le second terme est celui qui suit le nombre qu'on prend pour premier terme.

## PARAGRAPHE SECOND.

### *PROGRESSIONS INFINIES.*

237. LEMME. *La grandeur est par son essence susceptible de plus & de moins. Donc elle ne perd rien de son essence en recevant ce plus & ce moins :* donc elle est encore grandeur, après l'avoir reçu : donc elle est encore également susceptible de plus & de moins; donc elle en est toujours susceptible; donc elle l'est sans fin ou à l'infini.

I°. Par exemple, dans la suite croissante des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, & ainsi de suite sans fin, *la grandeur croît évidemment à l'infini.* Car à quelque grand nombre que l'on conçoive élevé un terme de cette suite, on ne voit pas pour cela que l'on soit plus près de la fin : ce qui ne peut convenir à une suite dont le nombre des termes seroit fini.

II°. De même dans la suite décroissante de l'unité, $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$, & ainsi de suite, *la*

*grandeur divisée ou diminuée n'est pas anéantie* : donc elle est encore grandeur après toute division ou diminution possible. Or la division est possible à l'infini ; donc la grandeur est susceptible de division & de diminution à l'infini. C. Q. F. D.

238. REMARQUE. I°. Quoiqu'il n'y ait rien d'infini en nature dans l'univers, à l'exception de l'Être incréé & créateur ; *il y a cependant une foule de grandeurs que les mathématiques considerent comme infinies* ; à cause du rapport comme infiniment grand qu'elles ont avec d'autres grandeurs auxquelles on les compare. Par exemple, la longueur d'une toise est comme infiniment grande, par rapport à un point mathématique : parce qu'il ne faut rien moins qu'une infinité de points mathématiques, pour former la longueur d'une toise. Ensuite la longueur d'une toise est comme infiniment petite, par rapport à la distance des étoiles : parce qu'il faut un nombre immense, un nombre comme infini de toises, pour égaler cette distance des étoiles.

II°. En général les mathématiques regardent *comme infiniment petite*, toute quantité qu'on peut ajouter ou retrancher à une autre, sans qu'on soit censé augmenter ou diminuer celle-ci : elles regardent *comme infiniment grande*, la quantité qui est censée n'être ni diminuée par une telle soustraction, ni augmentée par une telle addition. Par exemple, une ligne composée d'une infinité de points, ne sera censée ni plus grande ni plus petite, quand on lui aura ajouté ou retranché quelques centaines ou quelques millions de points : c'est un *infini du premier ordre*. Une surface composée d'une infinité de lignes, ne sera réputée ni plus grande ni plus petite, quand on lui aura aujouté quelques centaines ou quelques millions de points ou de lignes : c'est un *infini du second ordre*. Un solide composé d'une infinité de surfaces appliquées les unes aux autres, ne sera censé ni plus grand ni

plus petit, quand on lui aura ajouté ou retranché quelques centaines ou quelques millions de lignes ou de surfaces : c'est un *infini du troisieme ordre*. Nous ne dirons rien des infinis d'un ordre supérieur, par exemple, de l'infini du quatrieme ordre, qui est le produit du cube par sa racine infinie.

III°. Les mathématiques regardent encore assez souvent *comme infiniment petite*, toute quantité qu'on peut négliger sans erreur sensible. Par exemple, une ou deux toises sont regardées comme nulles ou comme infiniment petites, dans la longueur du rayon terrestre : une once est une quantité comme infiniment petite, dans un poids de douze ou quinze cents quintaux ; & ainsi du reste. Cette derniere maniere d'envisager les grandeurs, n'est pas exactement vraie dans toute la rigueur géométrique : mais elle a toute la vérité qu'on peut attendre & desirer dans l'état physique des choses ; & c'est ainsi qu'envisagent les grandeurs les plus exacts géometres, tels que Wolff, par exemple, dans son excellent cours de mathématiques, tome I, page 418.

## *INFINIS, INFINIMENT PETITS.*

239. DÉFINITION I. On appelle *quantité infinie*, une quantité qui a reçu tous ses accroissemens possibles.

I°. Une quantité infinie, qui n'est ni multipliée ni divisée par aucune autre quantité infinie, est un *infini du premier ordre* : elle s'exprime ainsi $\infty$.

II°. Une quantité infinie, multipliée par une quantité infinie, est un *infini du second ordre* ; & s'exprime par $\infty^2$.

III°. Un infini du second ordre, multiplié par une quantité infinie, est un *infini du troisieme ordre* ; & s'exprime par $\infty^3$.

Il est clair qu'on peut faire l'addition & la soustraction, la multiplication & la division, sur des quantités infinies, comme sur des quantités finies. Par exemple, $\infty + \infty + \infty = 3\infty$. De même $3\infty + 2\infty - 4\infty = 1\infty$. De même $2\infty^2 \times 3\infty = 6\infty^3$. De même $\infty \times \infty^2 = \infty^3$. De même $\infty^2$ divisé par $\infty = \infty$. De même encore $\infty$ divisé par $2, = \frac{\infty}{2}$; & $\infty^2$ divisé par $3 = \frac{\infty^2}{3}$.

240. DÉFINITION II. On appelle quantité *infiniment petite*, une quantité qui a reçu tous ses décroissemens finis possibles, elle s'exprime par $\frac{1}{\infty}$.

Une quantité infiniment petite, multipliée par un infiniment petit, est un *infiniment petit du second ordre*; & s'exprime ainsi $\frac{1}{\infty^2}$ : multipliée par un *infiniment petit* du second ordre, elle devient un *infiniment petit du troisieme ordre*; & se marque ainsi $\frac{1}{\infty^3}$.

## *PRINCIPES SUR LES INFINIS.*

241. PRINCIPE I. *Une quantité finie, ajoutée ou ôtée à une quantité infinie, ne la rend ni plus grande ni plus petite* : c'est-à-dire, qu'une quantité finie est nulle, par rapport à une quantité infinie, & peut être négligée dans le calcul; parce qu'elle est par rapport à l'infini, comme zero par rapport à l'unité. Ainsi $\infty + 2$ ou $- 2 = \infty$.

242 PRINCIPE II. *Un infini d'un ordre inférieur est nul, par rapport à l'infini d'un ordre supérieur.* Car l'infini d'un ordre inférieur est par rapport à l'infini d'un ordre supérieur, ce que le fini est par rapport à l'infini. Ainsi $\infty^2 + \infty = \infty^2$ : de même $\infty^3 - \infty^2 = \infty^3$.

243. PRINCIPE III. *Une quantité infinie multipliée par une autre quantité infinie, devient un infini d'un ordre supérieur, dont l'ordre sera exprimé par la somme des exposans.* Par exemple, $\infty^2 \times \infty^3 = \infty^5$ : de même $\infty \times \infty = \infty^2$.

244. PRINCIPE IV. *Une quantité infinie divisée par une quantité infinie, devient un infini d'un ordre inférieur, dont l'ordre sera marqué par la différence des exposans.* Par exemple, $\frac{\infty^4}{\infty} = \infty^3$; $\frac{\infty^2}{\infty} = \infty$; $\frac{\infty}{\infty} = 1$.

245. PRINCIPE V. Il faut dire la même chose des quantités infiniment petites. Un infiniment petit du troisieme ordre est nul par rapport à un infiniment petit du second ordre; & un infiniment petit du second ordre est nul par rapport à un infiniment petit du premier ordre : un infiniment petit du second ordre, multiplié par un infiniment petit du second ordre, devient un infiniment petit du premier ordre; & ainsi du reste.

246. REMARQUE. Cette théorie des infinis sert à *sommer des suites;* par exemple, la suite infinie des nombres naturels, la suite infinie de leurs quarrés, la suite infinie de leurs cubes.

La somme infinie des unités peut être représentée par une *ligne infinie*, ou par une ligne composée d'une infinité de points. La somme infinie des nombres naturels peut être représentée par un *triangle infini*, ou par un triangle rectangle composé d'une infinité de lignes croissantes comme cette suite, depuis le sommet jusqu'à la base. La suite infinie des quarrés des nombres naturels peut être représentée par une *pyramide infinie*, ou par une pyramide quadrangulaire composée d'une infinité de quarrés appliqués les uns sur les autres & décroissans comme cette suite, depuis le sommet jusqu'à la base. On concevra aisément dans la suite, comment on peut appliquer cette théorie à la Géométrie.

## DIVERS THÉORÊMES.

247. THÉORÊME I. *La somme des unités prise une infinité de fois, est un infini du premier ordre, ou est* $= \infty$.

DÉMONSTRATION. L'unité prise une infinité de fois, est une quantité qui a reçu tous ses accroissemens finis possibles : donc elle est devenue infinie.

248. THÉORÊME II. *La somme des termes de la progression infinie des nombres naturels* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. . . . . $\infty$, *est un infini du second ordre, & est* $= \frac{\infty^2}{2}$.

DÉMONSTRATION. Cette progression exprimée en points, formera un triangle dont la derniere colonne sera infinie en nombre, & dont la surface sera la moitié d'un quarré dont les quatre côtés seroient égaux à cette derniere colonne infinie. (231 & 246.)

249. THÉORÊME III. *La somme des termes de la progession infinie des nombres quarrés*, 1, 4, 9, 16, 25, 36. . . . $\infty^2$, *est un infini du troisieme ordre ; & est* $\frac{\infty^3}{3}$.

DÉMONSTRATION I°. Dans la suite des nombres naturels du corollaire précédent, concevez chaque terme élevé à son quarré : vous aurez la progression infinie des nombres quarrés dont il est ici question.

II°. Concevez chaque terme quarré de cette progression des nombres naturels, exprimé en points : le premier terme 1 sera un point ; le second terme 2 sera une surface quarrée de 4 points ; le troisieme terme 3, une surface quarrée de 9 points ; le dernier terme $\infty$, une surface quarrée d'une infinité de points. Si toutes ces surfaces appliquées les unes aux autres étoient égales à la derniere, il est évident que le nombre des points qui les composent, formeroit un cube infini ; & par conséquent $= \infty^3$. (*fig.* 74.)

III°. Mais toutes ces surfaces quarrées allant en croissant depuis la premiere $=$ 1 point, jusqu'à la derniere $= \infty^2$ ; il est évident que la somme des

points qui les composent, au lieu d'un cube AB, ne forme qu'une pyramide quadrangulaire AGCFD, qui a pour base la derniere surface infinie DF (246). Or le cube en question est égal à trois pyramides, égales à cette pyramide (595) ; donc cette pyramide n'est que le tiers du cube, donc elle est $\frac{\infty^3}{3}$.

Tels sont les principes ou les élémens du calcul de l'Infini ; calcul dont les modernes Géometres ont fait un si brillant usage, sur-tout dans la Géométrie transcendante. C'est par-là que nous terminerons ce traité des Raisons & des Proportions, pour passer à celui des Équations.

# PRINCIPES
## DU CALCUL
## ET DE LA GÉOMÉTRIE,
### OU
## *ÉLÉMENS DE MATHÉMATIQUES.*

## QUATRIEME TRAITÉ.
### *LE CALCUL ANALYTIQUE.*

250. DÉFINITION I. L'*ANALYSE* eſt une ſcience qui apprend à découvrir & à connoître les *quantités inconnues*, par le moyen des rapports qu'elles ont avec les quantités connues. L'analyſe differe de l'analogie, en ce que l'analogie apprend à connoître & à évaluer les rapports des grandeurs ; au lieu que l'analyſe par le moyen de ces rapports qu'elle ſuppoſe évalués & connus, du moins en partie, paſſe à la recherche des grandeurs inconnues. (2.)

251. DÉFINITION II. On parvient à la découverte de la vérité par deux ſortes de voies ou de méthodes ; l'une s'appelle ſynthèſe & l'autre s'appelle analyſe. L'une & l'autre a pour objet, ou la démonſtration de

quelque théorême, ou la solution de quelque problême. Soit qu'il faille démontrer un théorême, soit qu'il s'agisse de résoudre un problême :

I°. La *synthese* commence par les principes les plus simples & les plus connus ; & s'éleve par un enchaînement de vérités bien connues & bien liées, jusqu'à ce qu'elle parvienne à la connoissance de ce qui fait l'objet de sa recherche. Dans la méthode synthétique, on assemble, on joint & on lie en quelque sorte, plusieurs vérités ; de la liaison desquelles il résulte une *vérité nouvelle*, qui est la démonstration du théorême ou la solution du problême. C'est de-là que lui vient son nom de synthese ou de méthode de composition : car synthese, en grec σύνθεσις, signifie composition : de σὺν, *cum* ; & de θέσις, *positio* ; ou de τίθημι, *pono*.

Cette méthode s'appelle *méthode de doctrine* : parce que l'on s'en sert communément, pour enseigner aux autres les vérités que l'on sait.

II°. L'*analyse* au contraire commence par prendre pour vrai, ce qui est en question ; ou regarde comme résolu, le problême qu'il s'agit de résoudre. De-là elle tire des conséquences, qui en découlent ; & de celles-ci, de nouvelles : jusqu'à ce quelle soit parvenue à quelque chose de manifestement vrai ou faux, si c'est un théorême ; de possible ou d'impossible à exécuter, si c'est un problême. La nature de cette *derniere conséquence* décide de la vérité ou de la possibilité de la proposition qu'on examine. Dans la méthode analytique, on décompose une proposition encore incertaine en ses parties, toutes nécessairement vraies & liées ensemble, si la proposition est vraie ; toutes fausses & répugnantes, si elle est fausse. De-là lui est venu le nom d'analyse, du mot grec ἀνάλυσις, qui signifie dissolution, décomposition : de λύω, *dissolvo* ; & de la préposition ἀνὰ, *in*, *per*, *inter* ; dé-

composition d'un tout en ses parties.

Cette méthode s'appelle aussi *méthode d'invention*: parce que l'on découvre par la méthode analytique, bien des vérités qu'il seroit souvent impossible de découvrir par la méthode synthétique. On verra par la suite de ce traité, comment, en résolvant par l'analyse des problêmes particuliers, on découvre les *propriétés générales de la grandeur*; & comment ces propriétés, une fois découvertes & démontrées, deviennent des théorêmes ou des corollaires, qui sont des sources générales de lumiere.

III°. Quoique la synthese & l'analyse paroissent si différentes l'une de l'autre; cependant leurs principes sont les mêmes: savoir, que le tout est égal à toutes ses parties prises ensemble: que les quantités égales, qui ont eu des augmentations ou des diminutions égales, restent égales: que si deux quantités *a* & *x* sont égales entre elles, on peut prendre indifféremment l'une pour l'autre, ou substituer l'une à l'autre: & ainsi du reste. Dans la méthode synthétique, on va du simple au composé, du connu à l'inconnu, du tronc aux rameaux. Dans la méthode analytique, on va du composé au simple, de l'inconnu au connu, des rameaux au tronc. Les points de départ sont différens: mais la route & le terme sont au fond les mêmes.

IV°. L'analyse étoit en usage chez les anciens géometres: mais chez eux elle étoit fort différente de ce qu'elle est aujourd'hui. L'analyse ancienne, l'analyse employée par les Archimede, par les Euclide, par les Apollonius, consistoit à décomposer un tout en ses différentes parties, en ses différentes racines, en ses différentes puissances; à envisager comme intuitivement les différens rapports des parties entre elles, des parties avec le tout, du tout & des parties avec les racines & les puissances quelconques d'une grandeur donnée; & à chercher à travers un très-long & très-

pénible enchaînement de raiſonnemens explicitement développés, ou *quelque vérité particuliere*, ou *quelque propriété générale* de la grandeur ; & c'eſt ce qui rendoit cette analyſe ſi difficile, pour ne pas dire impoſſible, dans des queſtions d'un certain ordre plus relevé & plus compliqué. Si l'on ne peut ſuivre qu'avec peine cette interminable ſuite de raiſonnemens développés ; à plus forte raiſon ne peut-on les former ſans une extrême contention d'eſprit, ſans des efforts extraordinaires de mémoire & d'imagination. Le premier pas à faire, pour mettre l'analyſe en état de ſurmonter ces difficultés, étoit donc d'en changer la forme, & de décharger l'eſprit de ce fardeau accablant de raiſonnemens. Rien de plus heureux en effet, que l'idée qu'on a eue dans ces derniers ſiecles, avant & après Deſcartes, de réduire ces raiſonnemens, par le ſecours de l'algebre, en une ſorte de *procédés techniques* (*), de *formules algébriques*, qui ſont comme des tableaux ſenſibles & abrégés de l'opération réduite en une eſpece d'art méchanique ; & qui, après les premiers pas, n'exigent preſqu'aucun travail d'eſprit. L'arithmétique nous en offre un exemple ſenſible. Car qu'eſt ce qu'une opération arithmétique, ſinon un procédé méchanique pour la plupart des hommes ; mais qui eſt cependant le tableau & l'équivalent des opérations laborieuſes auxquelles l'eſprit ſeroit réduit ſans ce ſecours ? De même, l'analyſe algébrique, ſoit qu'elle opere ſur des grandeurs diſcretes, ſoit qu'elle ait pour objet des lignes & des ſurfaces, ſuſceptibles des mêmes calculs que les grandeurs diſcretes (74), n'eſt autre choſe qu'une ſuite de raiſonnemens écrits en abrégé ; & qui, ſans contention & preſque méchaniquement, conduiſent au

(*) ÉTYMOLOGIE. Technique, c'eſt-à-dire machinal, artificiel : de Τεχνὴ, *Artificium*, *opus* aut *methodus ſimplicis Artificis*.

même but que si l'esprit les avoit successivement formés ou suivis l'un après l'autre.

V°. L'analyse fut inventée par Platon, environ 370 ans avant l'ere chrétienne : elle a été perfectionnée, appliquée à de nouveaux objets & à de nouvelles recherches, & pour ainsi dire, créée de nouveau dans le dernier siecle, par l'immortel Descartes. Platon, en inventant l'ancienne analyse fit prendre à la géométrie une face nouvelle : Descartes, par la liaison qu'il établit entre la géométrie & l'analyse algébrique, y a opéré à son tour une heureuse révolution. La découverte de l'analyse donna naissance à diverses théories sublimes, qui tirerent la géométrie de cet état de médiocrité où elle avoit été jusqu'alors : la géométrie a tiré dans ces derniers tems, les mêmes avantages de son alliance avec l'analyse algébrique ; & aidée de ce secours, elle s'est soumis une multitude d'objets, auxquels elle n'avoit encore pu atteindre. De même que Platon prépara par sa découverte, celles des Archimèdes, des Euclides, des Apollonius de Perge ; on peut dire que Descartes a jetté les fondemens de celles qui illustrent aujourd'hui les modernes géometres. C'est par Descartes qu'ont été, pour ainsi dire, électrisés les Newton en Angleterre, les Leibnitz en Allemagne, les Bernouilly en Suisse, les de L'Hôpital en France, tous les célebres analystes du siecle dernier & du siecle présent dans les différentes contrées de l'Europe.

Ce que Christophe Colomb a été pour la moderne navigation, Descartes l'a été pour la moderne géométrie. Il a ouvert & frayé la route, que les autres n'ont plus eu qu'à suivre, à applanir, à étendre : de sorte qu'on peut dire de Descartes en genre de génie, ce que dit du brave Judas Machabée en genre de vaillance l'histoire sainte : *& transfretavit primus ! .... & viderunt eum Viri, & transierunt post eum.*

## PARAGRAPHE PREMIER.

### *Idée générale des Équations.*

252. DÉFINITION I. Le moyen dont se sert l'analyse pour découvrir les quantités inconnues, est la *double expression* d'une même quantité. La double expression d'une même quantité, s'appelle *équation*. Par exemple, la quantité *huit* peut être représentée par l'expression 8, ou par celle de $5+3$ égale à la premiere; d'où naît l'équation $8=5+3$, dans laquelle les quantités jointes par le signe $=$ s'appellent *membres*.

Tous les termes qui se trouvent à la gauche du signe, s'appellent *premier membre*; &c. tous ceux qui sont à la droite, s'appellent *second membre*. L'usage des équations est fort étendu: on peut par leur moyen résoudre avec une extrême facilité une infinité de *questions* ou *problêmes*, que l'on n'auroit osé espérer de résoudre sans cet art merveilleux.

253. REMARQUE. Dans tout problême, il y a des grandeurs connues & des grandeurs inconnues. On représente ordinairement les *grandeurs connues*, par les premieres lettres de l'alphabet $a$, $b$, $c$, $d$; les *grandeurs inconnues*, par les dernieres lettres $x$, $y$, $z$; les *quantités égales*, par les mêmes lettres.

Il arrive cependant assez souvent qu'on emploie les lettres initiales des noms, pour marquer les grandeurs connues ou inconnues, que ces noms signifient: ainsi le mouvement se marque par $m$, la vîtesse par $v$, le tems par $t$, le poids par $p$, la force motrice par $f$: & ainsi du reste.

254. DÉFINITION II. Les équations sont de *différens degrés*, sçavoir du premier, du second, du troisieme, du quatrieme, & ainsi de suite; selon que l'inconnue est élevée à la premiere, à la seconde, à la troisieme, à la quatrieme puissance.

Le *degré de l'équation*, quand il y a plusieurs inconnues, se prend du terme où l'inconnue est élevée à la plus haute puissance. L'équation $x + y = aa$, est du premier degré. L'équation $x + yy = a$, ou $x - yy = a$, est du second degré. L'équation $xxx + xx - 3x = ab$, est du troisieme degré : & ainsi du reste.

Nous nous attacherons principalement dans ce traité, à résoudre les équations du premier degré, que l'on appelle aussi *équation simples :* ce qui facilitera la résolution des *équation du second degré*, dont nous donnerons aussi les principes & les regles (298). La théorie des équations du premier degré suffit pour la solution de tous les problêmes de la géométrie élémentaire : celle des équations du second degré suffit dans la géométrie transcendante, dans toute la partie bornée aux sections coniques : ainsi nous ne pousserons pas plus loin cette théorie.

255. DÉFINITION III. Pour résoudre un problême, ou pour découvrir les quantités inconnues par le moyen des quantités connues, il faut nécessairement qu'il y ait des rapports donnés entre les connues & les inconnues : ces rapports s'appellent *conditions du problême;* & c'est à ces rapports ou à ces conditions qu'il faut faire la plus grande attention ; parce que c'est toujours de-là que dépend la solution des problêmes. Ces rapports ou ces conditions s'appellent aussi *les données du problême*.

On voit ici que *proposer un problême*, c'est demander qu'on trouve la valeur d'une ou de plusieurs inconnues, Le problême est résolu, quand on a trouvé cette valeur ; ou quand on démontre qu'il est impossible de la trouver : ce qui arrive lorsque les rapports donnés renferment quelque contradiction.

256. DÉFINITION IV. Parmi les problêmes, il y en a de déterminés & d'interminés. On appelle *pro-*

*blême déterminé*, celui dans lequel il y a autant de conditions ou de rapports, qu'il y a de quantités inconnues. On appelle *problême indéterminé*, celui où il y a moins de rapports ou de conditions, que de quantités inconnues. Le problême déterminé du premier degré, n'eſt ſuſceptible que d'une ſeule ſolution : il eſt ſuſceptible de deux ſolutions, s'il eſt du ſecond degré. Le problême indéterminé eſt ſuſceptible de pluſieurs ſolutions. Deux exemples vont faire ſentir la différence de ces deux eſpeces de problêmes.

I°. Soit propoſé ce problême : *couper le nombre 24 en deux parties, dnot l'une ſoit triple de l'autre.* Les deux nombres ou les deux parties que l'on cherche, ſeront 18 & 6 : il n'y a que ces deux nombres qui ſatisfaſſent aux conditions du problême. Ce problême eſt un problême déterminé.

II°. Soit propoſé cet autre problême : *deux hommes ont partagé une ſomme d'écus, & la part de l'un eſt le tiers de la part de l'autre : qu'elles ſont ces deux parts?* Ces deux parts peuvent être 2 & 6, qui égaleront la ſomme 8 ; ou bien 4 & 12 = 16, ou bien une infinité d'autres nombres : car il n'y a point de nombre, qui joint à ſon triple, ne faſſe une ſomme totale dont la grandeur n'a été déterminée ni en elle même ni en aucune de ſes parties. Ce problême eſt un problême indéterminé.

La ſcience des équations conſiſte en deux choſes ; à compoſer ou à *former l'équation*, & à décompoſer ou à *réſoudre l'équation* : nous allons parler de l'une & de l'autre.

## *FORMATION ET RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS.*

257. DÉFINITION I. La *formation des équations*, conſiſte à exprimer algébriquement le problême : c'eſt-à-dire, à exprimer en *ſtyle algébrique* les quantités & les

les rapports des quantités, qui dans l'état de la question sont énoncés en ſtyle ordinaire.

Il n'y a point de regles à donner ſur la formation des équations: tout dépend de l'attention & de la ſagacité de l'eſprit, qui doit ſaiſir & réduire les rapports donnés dans le problême.

258. DÉFINITION II. La *réſolution des équations*, conſiſte à prendre & à trouver la valeur de chaque inconnue. Cette valeur ſe connoît, par les rapports que chaque quantité inconnue a avec des quantités toutes connues. Ces rapports ſont enveloppés dans l'équation; à cauſe de la pluralité des inconnues & de leur mêlange, ſoit entre elles, ſoit avec les quantités connues. Il s'agit de développer & de dégager ces rapports; & c'eſt en quoi conſiſte en grande partie, l'art de l'analyſe.

I°. *Trouver la valeur d'une inconnue*, c'eſt la réduire à être ſeule un membre d'une équation, dont l'autre membre ſoit compoſé de quantités toutes connues. Par exemple, ſi $x = 12 + 10 - 18$; la valeur de l'inconnue $x$ devient connue, & elle eſt égale à 14.

II°. *Prendre la valeur d'une inconnue*, c'eſt faire enſorte que cette inconnue faſſe ſeule un membre d'une équation; de quelques quantités connues ou inconnues que ſoit formé l'autre membre égal de la même équation. Par exemple, ſi $x = a + y$; en prenant $a + y$ pour $x$, ou $x$ pour $a + y$, on prendra la valeur de l'inconnue: quoique la valeur de cette inconnue ne ſoit pas encore trouvée.

III°. Lorſque l'on a formé les équations qui renferment les conditions ou les rapports du problême, il faut les préparer pour la ſolution. Cette préparation conſiſte en *différentes transformations* qui les ſimplifient & qui les rendent plus faciles à réſoudre. Ces transformations ſe font par le moyen de la tranſpoſition, de la multiplication, de la diviſion, de l'exal-

tation, de l'extraction des racines. L'usage apprendra quelle est, dans chaque problême proposé, celle de ces cinq ou six principales opérations, qu'il faut actuellement mettre en œuvre, pour le résoudre.

## TRANSFORMATIONS DES ÉQUATIONS.

259. DÉFINITION. Ces *transformations* se font ou par voie d'addition, en ajoutant une même quantité aux deux membres; ou par voie de soustraction, en ôtant aux deux membres une même quantité; ou par voie de multiplication, en multipliant par une même quantité les deux mêmbres; ou par voie de division, en divisant les deux membres par une même quantité; ou, par voie d'extraction, en extrayant la racine des quantités qui forment l'un & l'autre membre. Nous allons parler de ces diverses transformations, qui doivent toujours être telles que l'on ne change jamais l'égalité entre les deux membres: ainsi il ne faut rien faire dans l'un, que l'on ne fasse précisément la même chose dans l'autre.

Il est évident que tous ces changemens ou transformations ne détruiront point l'équation ou l'égalité entre les deux membres: puisque dans tous ces changemens ou transformations, toujours on retranche ou l'on ajoute des quantités égales, à des quantités qui étoient égales. En voici des exemples.

260. EXEMPLE I. On dégage une inconnue, *par voie d'addition*. Si j'ai l'équation $x - b = ac$; je puis, sans détruire l'égalité, ajouter la quantité $b$ de part & d'autre: il viendra $x - b + b = ac + b$; & en réduisant (90), j'aurai $x = ac + b$.

De-là on déduit cette regle: *dans une équation, on peut faire passer une quantité négative d'un membre à l'autre, en changeant son signe — en +.*

261. EXEMPLE II. On dégage une inconnue, *par*

*voie de soustraction.* Si j'ai l'équation $x + b = ac$, je puis retrancher de part & d'autre la quantité $b$; & j'aurai $a + b - b = ac - b$; & en réduisant, j'aurai $x = ac - b$.

De-là on déduit cette regle : *dans une équation, on peut faire passer une quantité positive d'un membre dans l'autre, en changeant son signe* $+$ *en* $-$.

Dégager une inconnue par addition ou par soustraction, s'appelle *transposer* : soit que *par la transposition*, on fasse passer la quantité positive ou négative du premier membre dans le second, ou du second dans le premier. Par-là, *on peut rendre positif, un membre qui étoit négatif ; ou négatif, un membre qui étoit positif.* Par exemple, si j'ai l'équation $+ a = + 10$; je puis, sans détruire l'égalité, retrancher deux fois sa valeur à chaque membre, ou mettre dans chaque membre deux fois l'opposé de sa valeur ; & alors l'équation $+ a = + 10$, deviendra $+ a - a - a = + 10 - 10 - 10$; & en effaçant dans chaque membre de cette derniere équation les termes qui se détruisent, j'aurai $- a = - 10$.

De même & par la même théorie de la transposition, on aura les transformations suivantes : . . . .

| | | | |
|---|---|---|---|
| Si | $+ 10 - 6 = + 4$; | Si | $+ 8 + 12 = 30 - 10$; |
| Donc | $- 10 + 6 = - 4$. | Donc | $- 8 - 12 = - 30 + 10$. |
| Si | $+ 10 + 4 = + 14$; | Si | $+ xx - ax = + da - b$; |
| Donc | $- 10 - 4 = - 14$. | Donc | $- xx + ax = - ad + b$. |

262. EXEMPLE III. On dégage une inconnue, *par voie de multiplication.* Si j'ai l'équation $\frac{x}{a} = b$, je puis multiplier les deux membres par le dénominateur $a$ (207) ; & il viendra $\frac{ax}{a} = ab$; & en réduisant (106), on aura $x = ab$.

De-là découle cette regle : *dans une équation on peut faire évanouir une fraction qui s'y trouve, en multipliant*

*par son dénominateur tous les autres termes de l'équation.*

263. EXEMPLE IV. On dégage une inconnue, *par voie de division.* Si j'ai l'équation $ab + cc = bx$, je puis, sans détruire l'égalité, diviser l'un & l'autre membre par une même quantité $b$; & j'aurai $\frac{ab}{b} + \frac{cc}{b} = \frac{bx}{b}$; & en réduisant (106), j'aurai $a + \frac{cc}{b} = x$. Par ce moyen les deux quantités $a$ & $x$ ont été dégagées de la quantité $b$ qui les multiplioit.

De-là on déduit encore cette regle : *dans une équation, on peut dégager une quantité d'une autre quantité qui la multiplie, en divisant tous les autres termes de l'équation, par la quantité qui fait la fonction de multiplicateur.*

264. EXEMPLE V. On dégage une inconnue, *par voie d'exaltation.* Si j'ai l'équation $\sqrt{x} = a$, j'éleve l'un & l'autre membre au quarré, & j'aurai $x = aa$. Car $\sqrt{x} \times \sqrt{x} = x$ : puisque la racine, en se multipliant elle-même, donne le quarré de sa valeur.

265. EXEMPLE VI. On dégage une inconnue, *par voie d'extraction des racines.* Si j'ai l'équation $xx = aa$, j'extrais la racine quarrée dans l'un & dans l'autre membre ; & j'ai $x = a$. De même si j'ai $x^3 = a$ ; en extrayant de part & d'autre la racine cubique, j'aurai $x = \sqrt[3]{a}$.

Nous donnerons ailleurs un plus ample développement sur les *transformations* qu'il faut faire subir aux équations du second degré, pour en extraire la *racine quarrée*, algébrique & numérique (298). Cette théorie, nécessaire pour la résolution des équations du second degré, ne l'est pas pour la résolution des équations simples dont il sera uniquement question dans le paragraphe suivant.

## SUBSTITUTION DES ÉQUATIONS.

266. DÉFINITION. La *ſubſtitution analytique* conſiſte à mettre dans une équation, une quantité égale à la place d'une autre quantité égale, par où l'on vient à bout de réduire deux inconnues à une ſeule inconnue ; & enſuite, à réduire ſucceſſivement pluſieurs inconnues à une ſeule inconnue. Par exemple,

I°. Soient les deux équations $x+y=a$, & $x=3y$. Dans la premiere équation, où il y a deux inconnues, je puis faire évanouir l'inconnue $x$, en mettant à ſa place ſon égale $3y$; & alors cette premiere équation deviendra $3y+y=a$: il n'y aura donc plus dans la premiere équation transformée, qu'une ſeule inconnue $y$.

| | |
|---|---|
| Si | $x+y=a$; |
| Si | $x=3y$: |
| Donc | $3y+y=a$. |

De même ſoient les deux équations $x+y=a$, & $x-y=b$, dans chacune deſquelles ſe trouvent deux inconnues. Je fais évanouir l'inconnue $x$ dans la ſeconde équation, en prenant la valeur de $x$ dans la premiere équation, par le moyen de la tranſpoſition (261); & en mettant cette valeur $a-y$, dans la ſeconde équation à la place de $x$: ce qui donnera pour cette ſeconde équation $a-y-y=b$. Dans la ſeconde équation ainſi transformée par le moyen de la ſubſtitution, il n'y a plus qu'une ſeule inconnue $y$. L'inconnue $x$ a diſparu.

| | |
|---|---|
| Si | $x+y=a$ |
| Si | $x-y=b$ |
| Donc | $a-y-y=b$ |

II°. Soient données ces trois équations, $x+y+z=a$; enſuite $x+y-z=b$; enfin $x-y+z=c$; dans chacune deſquelles ſe trouvent trois inconnues. On fera évanouir deux inconnues dans chacune, par la ſubſtitution; en cette maniere.

Prenez dans la premiere équation, la valeur de $x$; & par la transposition, vous aurez $x = a - y - z$. Mettez cette valeur $a - y - z$, à la place de $x$, dans les deux équations suivantes : vous aurez pour seconde équation transformée,

$$x + y + z = a$$
$$x + y - z = b$$
$$x - y + z = c.$$

$$a - y - z + y - z = b$$
$$a - y - z - y + z = c.$$

$$a - b = 2z; \ \& \ a - c = 2y.$$

$a - y - z + y - z = b$; & pour troisieme équation transformée, $a - y - z - y + z = c$. Ces deux équations deviennent par la réduction, l'une $a - 2z = b$; l'autre $a - 2y = c$; & dans l'une & dans l'autre, il n'y a plus qu'une inconnue.

Si on veut maintenant réduire la premiere équation $x + y + z = a$, à n'avoir que l'inconnue $x$; il faut prendre la valeur de $y$ & la valeur de $z$ dans les deux équations transformées & réduites, on aura.... d'abord, en transposant, $a - b = 2z$, & $a - c = 2y$; ensuite, en divisant par 2, ... $\frac{a-b}{2} = z$, & $\frac{a-c}{2} = y$; enfin, en substituant ces valeurs dans la premiere équation, . . . . . $x + \frac{a-c}{2} + \frac{c-b}{2} = a$.

Le grand art de l'analyse consiste à réduire toutes les inconnues à une seule inconnue, que l'on égale ensuite à toutes les connues; & par-là l'inconnue devient connue. S'il y a deux équations, & par conséquent deux inconnues, *il faut réduire les deux inconnues à une seule inconnue*, par le moyen de la substitution. S'il y a trois équations, & par conséquent trois inconnues, *il faut réduire d'abord les trois inconnues à deux, ensuite les deux à une.* On voit par-là ce qu'il faudroit faire, s'il y avoit plus de trois inconnues.

Nous allons bientôt éclaircir tout ce que nous avons

dit, par quelques exemples ou par la solution de quelques problêmes. Mais il faut pour cela réduire en précis, les regles de l'analyse: afin qu'elles restent plus facilement imprimées dans l'esprit, & qu'elles dirigent sa marche dans la solution des problêmes.

### *REGLES DE L'ANALYSE.*

267. COROLLAIRE. *Pour résoudre un problême d'analyse, il faut nécessairement :*

I°. Exprimer en style algébrique, les différentes conditions du problême.

II°. Réduire toutes les inconnues à une seule inconnue; afin de pouvoir substituer une inconnue à une autre inconnue.

III°. Porter la valeur trouvée de l'inconnue, dans toutes les équations où se trouve cette même inconnue.

On verra dans les problêmes suivans, comment ces regles se réduisent en pratique par le moyen de la transformation, de la substitution, & de l'expression algébrique.

## PARAGRAPHE SECOND.

### *RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS SIMPLES.*

### PROBLÊME I.

268. PIERRE *& Paul ont dépensé ensemble 1000 écus; mais la dépense de Pierre est trois fois plus grande que celle de Paul : combien ont-il dépensé chacun?*

SOLUTION. I°. Ce problême renferme deux inconnues, savoir, la *dépense de Pierre* que j'appelle $x$, &

| *Problême exprimé en paroles.* | Problême exprimé algébriquement. |
|---|---|
| On demande deux dépenses, ... | $x$, $y$. |
| dont la somme est 1000 $= a$ .. | $x + y = a$ |
| & dont l'une $x$, est triple de l'autre. | $x = 3y$. |

la *dépense de Paul* que j'appelle $y$ : il renferme aussi une quantité connue, savoir, les 1000 écus que j'appelle $a$ : on voit aussi que le problême renferme deux conditions.

La *premiere condition* est, en style ordinaire, que la dépense de Pierre & de Paul, prises ensemble, font 1000 écus : ce qui s'exprime algébriquement par l'équation $x + y = a$.

La *seconde condition* est, en style ordinaire, que la dépense de Pierre est triple de celle de Paul ; donc $x$ est triple de $y$ ; & par conséquent pour rendre $y$ égal à $x$ ; il faut multiplier $y$ par 3, ou prendre trois fois $y$. La seconde condition s'exprimera donc en style algébrique par l'équation $x = 3y$.

II° Le problême étant mis en équations, il s'agit de *réduire les deux inconnues à une seule inconnue*, & les deux équations à une seule équation, par le moyen de la substitution. Pour cela, j'observe dans la seconde équation, que $x$ est égal à $3y$ : d'où je conclus que je puis mettre dans la premiere équation, $3y$ à la place de $x$ ; & que dans ce cas je n'aurai qu'une équation & qu'une inconnue, savoir, $3y + y = a$ : . . .

donc . . . . . $a = 3y + y$ ;

& en réduisant, $a = 4y$ ;

& en divisant par 4, $y = \frac{a}{4} = \frac{1000}{4} = 250$.

III°. La valeur de $y$ étant toute connue, je la mets à la place de $y$ dans toutes les équations où se trouve $y$,

Ainsi je mets 250, qui est la valeur de $y$, à la place de $y$ dans l'équation $x = 3y$; & je trouve $x = 3 \times 250 = 750$: donc la valeur de $x$ est toute connue, & l'équation est résolue. Ainsi la dépense de Pierre est 750 écus, & celle de Paul 250 écus.

## PROBLÊME II.

269. *Une armée a été défaite : le quart est resté sur le champ de bataille ; les deux cinquiemes ont été faits prisonniers ; le reste* 14000 *hommes a pris la fuite ; de combien d'hommes étoit l'armée avant la bataille ?*

SOLUTION. Ce problême ne renferme qu'*une seule inconnue*, savoir le nombre d'hommes qui composoit l'armée. Pour trouver cette inconnue,

I°. J'appelle $a$ les 14000 hommes : j'appelle $x$ le nombre total de l'armée, que je cherche. Ensuite je dis : le quart de $x$, plus les deux cinquiemes de $x$, plus 14000, sont égaux à toute l'armée ; & en style algébrique, $\frac{x}{4} + \frac{2x}{5} + a = x$.

II°. Comme il n'y a qu'une espece d'inconnue, savoir $x$; la seconde regle, ou la substitution, n'a point lieu dans cette équation.

III°. Je fais évanouir la premiere fraction $\frac{x}{4}$, en multipliant tous les termes de l'équation par le dénominateur 4 (207) : je trouve l'équation suivante, $x + \frac{8x}{5} + 4a = 4x$.

Je fais évanouir de même l'autre fraction $\frac{8x}{5}$, en multipliant tous les termes par le dénominateur 5 : il vient $5x + 8x + 20a = 20x$:
& en réduisant, $13x + 20a = 20x$;
& en transposant, $20a = 20x - 13x$;
& en réduisant encore, $20a = 7x$.

IV°. Or $a = 14000$ : donc $20\,a = 280000$ : donc $7\,x = 20\,a = 280000$ : ainsi $7\,x = 280000$.

Mais l'armée est $x$ & non $7\,x$ : donc pour avoir le nombre de l'armée, je divise par 7 le nombre $280000 = 7\,x$ : le quotient 40000 exprimera le nombre d'hommes dont l'armée étoit composée. $x = 40000$.

Ce nombre satisfait aux conditions du problême : puisqu'en ajoutant les nombres marqués dans le problême, on trouve que la somme totale de ces nombres est égale à 40000. Voici ces nombres marqués par le problême . . . 10000. . . quart de 40000.

$+$ 16000 deux cinquiemes de 40000.

$+$ 14000. . . reste de l'armée.

Total . . . . . 40000 $= x$ ou à l'armée.

## PROBLÊME III.

270. *La somme & la différence de deux grandeurs étant données ou connues, trouver qu'elles sont ces deux grandeurs.*

Ce problême peut se résoudre & en lignes & en nombres : nous allons le résoudre en l'une & en l'autre maniere. (*fig.* 9.)

SOLUTION I. Soient deux lignes inégales AD & DB, qui exprimeront deux quantités quelconques : que leur somme soit 40 pieds & leur différence 8 pieds. Partagez la ligne totale en deux parties égales au point M ; & décrivez du point M une demi-circonférence D$d$, qui ait pour rayon MD, égal à la moitié de la différence des deux grandeurs données. Par l'hypothese, AM est égale à MB ; & l'une & l'autre sont égales à 20 pieds. De ces deux quantités égales retranchez les deux quantités égales DM, M$d$ : les restes AD & B$d$ seront égaux. La différence des deux lignes est donc DM$d = 8$ pieds, dont la moitié est DM $= 4$ pieds.

Cela posé, il est évident que la plus grande ligne

BD est la moitié BM de la ligne totale, plus la moitié MD de la différence; & que la plus petite ligne AD est la moitié AM de la ligne totale, moins la moitié DM de la différence. Donc BD $= 20 + 4$, & AD $= 20 - 4$.

SOLUTION II. Soit la somme donnée des deux nombres inconnus 40, & leur différence 8. J'appelle $x$, le plus grand nombre : j'appelle $y$, le nombre plus petit : j'appelle $a$, la somme 40 des deux nombres : j'appelle $b$, la différence 8 des deux mêmes nombres. Par la nature du problême, j'ai deux équations qui renferment chacune deux inconnues; sa voir, l'équation $x + y = a$, & l'équation $x - y = b$. Je dois donc employer la substitution, pour avoir la valeur d'une des deux inconnues, par exemple, de l'inconnue $y$ : afin de faire disparoître l'inconnue $x$.

| Problême exprimé algébriquement. |
|---|
| $x + y = a$. |
| $x - y = b$. |

Pour cela je dis : puisque $x + y = a$;
donc en transposant, . . . $x = a - y$;
& en mettant cette grandeur $a - y$, à la place de son égale $x$ dans la seconde équation du problême,
j'aurai . . . . . $a - y - y = b$;
& en réduisant, . . . . $a - 2y = b$;
& en transposant, . . . $a - b = 2y$;
& en divisant par 2, . . . . $\frac{a-b}{2} = y$.

Après ces opérations, la valeur de la quantité $y$ est toute connue : puisqu'elle est égale à la grandeur $a$, moins la grandeur $b$, divisées par 2; ou à $\frac{40-8}{2} = 20 - 4 = 16$.
L'autre quantité $x$ devient aussi connue; puisque $x + y = 40$ : donc si de 40, on retranche $y = 20 - 4$ : reste $x = 20 + 4 = 24$.

Par une semblable opération on peut faire évanouir $y$, pour avoir la valeur de $x$: on trouvera $\frac{a+b}{2}=x$.

271. COROLLAIRE. On voit par la solution de ce problême, & par l'équation qui en résulte, $y=\frac{a-b}{2}$, ou $x=\frac{a+b}{2}$, que *la plus grande des deux quantités inégales, est toujours égale à la moitié de la somme de ces quantités, plus à la moitié de la différence :* & que *la plus petite est égale à la moitié de la somme, moins la moitié de la différence.* Telle est la vérité générale, tel est le théorême, que découvre & démontre la solution de ce problême.

272. REMARQUE. On pourra d'après les principes que nous avons établis, & d'après l'application que nous venons d'en faire dans les problêmes précédens, se proposer & résoudre, si l'on veut, différens problêmes dans le goût des suivans, dont nous ne ferons qu'indiquer la solution pour servir d'exemple.

I°. Pierre & Jean avoient ensemble 36 livres $=a$; & ils ont perdu ensemble 10 livres $=b$: Pierre a perdu le tiers, & Jean le cinquieme de ce qu'ils avoient. *On demande ce que chacun avoit avant le jeu, & ce que chacun a perdu?*

Ce problême semble d'abord renfermer quatre inconnues, quoi qu'il n'y en ait réellement que deux. Car lorsque l'on connoîtra la somme $x$ que Pierre avoit avant le jeu; le tiers de cette somme sera sa perte, laquelle par conséquent ne fait pas une quantité inconnue. De même, quand on connoîtra la somme $y$ de Jean, les deux cinquiemes de cette perte ne feront plus une quantité inconnue. Par où l'on voit que *le nombre des inconnues ne dépend pas du nombre des demandes qu'on fait dans un problême*; mais qu'il faut

$$\boxed{\begin{aligned} &x+y=a \text{ ou } 36. \\ &\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=b \text{ ou } 10. \end{aligned}}$$

voir, avant de déterminer le nombre des inconnues, si la solution d'une demande ne donne pas la solution d'une autre.

Après avoir délivré de fractions la seconde équation (262); on aura $5x + 3y = 15b$: & alors si en transposant, on prend $x = a - y$ dans la premiere équation, pour substituer cette valeur $a - y$ dans la seconde équation simplifiée & transformée $5x + 3y = 15b$; on aura $5a - 5y + 3y = 15b$, dans laquelle équation il n'y a plus qu'une inconnue. Après quoi, en réduisant d'abord, & en transposant ensuite, on aura $2y = 5a - 15b$; & en divisant par 2, on aura enfin $y = \frac{5a - 15b}{2}$.

Cette derniere équation suffit pour la solution du problême : car en faisant les additions, les soustractions, les divisions, les substitutions, marquées par la formule de cette derniere équation; on trouvera $y = 15$ livres. Jean avoit donc 15 livres; & il en a perdu 3, qui sont le cinquieme de 15. Par conséquent Pierre avoit 21 livres puisque $15 + 21 = 36$; & il a perdu 7 livres, qui sont le tiers de 21.

Si dans ce même problême on avoit supposé la somme totale $a$ de Pierre & de Jean avant le jeu, égale à 236 livres; & leur perte commune $b$ égale à 40 livres; & les mêmes conditions de la perte; le problême auroit été résolu par la même équation $y = \frac{5a - 15b}{2}$. Mais dans ce dernier cas, la résolution du problême eût consisté à faire voir que *le problême est impossible*, & qu'il renferme une absurdité manifeste; puisque la somme $y$ de Jean eût été 290 livres, plus grande que la somme de Jean & de Pierre prises ensemble.

II°. Une ânesse disoit à une mule : si je t'avois donné un de mes sacs, nous serions également char-

gées ; & si tu m'en faisois porter un des tiers, j'aurois le double de la charge. *On demande combien de sacs chacune portoit ?*

Ce problême renferme deux inconnues, savoir, le nombre $x$ des sacs de l'ânesse, & le nombre $y$ des sacs de la mule : il renferme aussi deux conditions, savoir, qu'en ôtant un des sacs de l'ânesse & en l'ajoutant aux sacs de la mule, le nombre des sacs seroit égal de part & d'autre ; & qu'en ôtant un des sacs de la mule, & en l'ajoutant aux sacs de l'ânesse, on rendroit le nombre des sacs de l'ânesse, deux fois plus grand que celui des sacs de la mule. On voit ici algébriquement exprimées ces deux conditions, dans les deux équations encadrées, qu'on réduira à une seule par le moyen de la substitution. Après quoi, par la transposition, on trouvera que $y = 5$, & que $x = 7$. Car en prenant dans la premiere équation la valeur de $x$, on aura $x = y + 1 + 1$, ou $x = y + 2$ : & en substituant cette valeur $y + 2$ dans la seconde équation, à la place de $x$ ; on aura $y + 2 + 1 = 2y - 2$, dans laquelle équation il n'y a plus qu'une seule inconnue $y$.

$$\boxed{\begin{array}{l} x - 1 = y + 1. \\ x + 1 = 2y - 2. \end{array}}$$

Après quoi, en réduisant, on aura $y + 3 = 2y - 2$ ; & en transposant, $y = 2y - 2 - 3$ ; & en transposant de nouveau, $2y - 5 = y$ ; & en transposant encore, $5 = 2y - y$ ; & en réduisant, $5 = y$.

On trouvera, si l'on veut de la même maniere & par la même méthode, la valeur de $x = 7$.

## PROBLÊME IV.

273. *Diviser une somme donnée quelconque entre trois particuliers, Pierre, Paul & Jacques ; en telle maniere que la portion du premier soit double de celle du*

*second, & que la portion du second soit triple de celle du troisieme.*

SOLUTION. Supposons que la somme donnée soit 10000 livres, $=a$. Quoique ce problême paroisse renfermer trois inconnues, il n'en renferme qu'une seule, savoir, la portion du dernier ou de Jacques, qui est *la plus petite* des trois.

I°. Soit donc $x$, la portion de Jacques : celle de Paul qui est triple sera $3x$ : celle de Pierre qui est double de celle de Paul, sera $6x$ : donc la condition du problême, exprimée algébriquement, . . . . . .
sera . . . . $x+3x+6x=10000$;
& en réduisant, . . . $10x=10000$;
& en divisant par 10, $x=\frac{10000}{10}=1000$.

Donc $x$, portion de Jacques $=1000$ livres : $3x$, portion de Paul, $=3000$ livres : $6x$, portion de Pierre, $=600$ livres.

II°. Ce probleme peut aussi se résoudre par la *regle de fausse position*, dont nous parlerons bientôt, & dont on peut fréquemment faire un utile usage dans le calcul.

Si l'on supposoit la portion de Jacques $=10$ livres; celle de Paul seroit 30 livres, celle de Pierre 60 livres; & la somme totale seroit 100 livres. Mais cette supposition est fausse; puisqu'il s'agit de diviser non 100 livres, mais 10000 livres. Cependant cette supposition, quoique fausse, peut conduire à la vérité par le moyen de la regle de trois, en disant : si 100 livres donnent 10 livres pour la portion du troisieme, combien donneront 10000 livres pour la portion du même? ou $100 . 10 :: 10000 . x$ : donc $x=\frac{100000}{100}=1000$ : c'est-à-dire, que la portion qui échoit au troisieme, est 1000 livres.

III°. On voit dans ce problême, que les parties auxquelles il faut diviser 10000 livres, ont entre elles

un certain rapport exprimé par les nombres 6, 3, 1; & que ce problême auroit pu être exprimé d'une façon générale en disant : *diviser un tout en trois parties, telles que leur rapport soit comme* 6, 3, 1 : & alors on prend pour inconnue, la plus petite quantité.

IV°. Si le problême précédent eût consisté à *diviser une somme quelconque* 3000 *livres entre trois personnes, Pierre, Paul, & Jacques*; en telle sorte que la portion de Pierre fût le quart de celle de Paul, & que la portion de Paul fût le cinquieme de celle de Jacques : on auroit eu par la même méthode la solution du problême, en prenant pour inconnue $x$ la portion de Pierre qui seroit *la plus petite* des trois. Par-là on auroit eu $x+4x+20x=3000$; & en réduisant, $25x=3000$; & en divisant par 25, $x\frac{3000}{25}=120$. Ainsi on auroit eu $120+480+2400=3000$.

## *REGLE DE FAUSSE POSITION.*

274. OBSERVATION. La *regle de fausse position*, dont nous venons de donner & une idée & un exemple dans le problême précédent, sert souvent dans les calculs à faire trouver des grandeurs inconnues, par le moyen d'une *fausse hypothese* ou supposition, qui a un *rapport vrai & connu* avec la vraie hypothese.

Par exemple, si le rapport de fausse position est le rapport de 2 à 8, égal au rapport de 1 à 4; & que le rapport de $x$ à 100, soit égal au même rapport 1 à 4; il est clair que ces deux raisons, égales chacune à une même raison, sont égales entr'elles (166); & forment une proportion géométrique (170), savoir cette proportion $2 . 8 :: x . 100$. Et alors, en divisant le

$$2 . 8 = 1 . 4.$$
$$x . 100 = 1 . 4$$
$$2 . 8 :: x . 100.$$

$$a . b = c . d.$$
$$x . aa = c . d$$
$$a . b :: x . aa.$$

le produit des extrêmes par le produit des moyens, on trouve un quotient 25, qui exprime la vraie grandeur $x$, auparavant inconnue. (175.)

De même dans l'exemple en lettres, si les deux raisons, dont l'une est de fausse position, sont égales à une même raison; il en résulte une proportion géométrique, dans laquelle l'inconnue $x$ devient connue, étant égale au quotient des extrêmes divisé par le moyen connu: ainsi $x = \frac{aaa}{b}$.

## *AUTRES REGLES DE CALCUL.*

275. OBSERVATION. La *regle de fausse position*, dont nous venons de parler, est fondée sur la *regle de trois*, que nous avons expliquée & démontrée ailleurs (178). Sur la même regle de trois, sont fondées la regle de cinq, de sept, de neuf, la regle de compagnie, la regle d'alliage; dont nous allons parler dans les problêmes suivans, après en avoir donné ici des notions générales.

I°. La *regle de cinq, de sept, de neuf*, n'est autre chose qu'une regle de trois compliquée: comme on le verra dans le problême suivant.

II°. La *regle de compagnie* est une méthode par laquelle, deux ou plusieurs associés ayant fait un gain ou essuyé une perte; on trouve qu'elle est la part du gain qui revient à chacun, ou la part de la perte que chacun doit supporter, à proportion de ce qu'il a mis dans la bourse commune.

III°. La *regle d'alliage* est une méthode qui sert à résoudre toutes les questions où il s'agit de faire des mêlanges de certaines marchandises ou des alliages de certains métaux, à certaines conditions qu'on fixe & qu'on détermine. Elle est ou *directe* ou *indirecte*.

La regle d'alliage est directe quand elle sert à faire *trouver le prix moyen* d'un mêlange fait ou à faire;

elle eſt indirecte, quand *étant donné le prix moyen* du mêlange à faire, elle ſert à faire trouver les portions qui doivent le former.

## PROBLÉME V.

276. *Si* 20 *ouvriers en* 10 *jours ont fait* 100 *toiſes; combien* 30 *ouvriers en* 6 *jours feront-ils de toiſes ?*

SOLUTION. Cette queſtion renferme cinq termes : ce que l'on appelle la *regle de cinq*. Pour la réſoudre, on exprime l'état de la queſtion par deux proportions en cette maniere :

| Ouvriers. | Toiſes. | Ouvriers. | Toiſes. |
|---|---|---|---|
| 20. | 100 :: | 30. | $x$ : |
| Jours. | | Jours. | |
| 10. | 100 :: | 6. | $x$ : |

Maintenant il n'y a qu'à multiplier le nombre des ouvriers par celui des jours, 20 par 10, ce qui donnera 200; & 30 par 6, ce qui donnera 180. Il eſt évident que 20 ouvriers qui travaillent pendant 10 jours, doivent faire le même ouvrage que 200 ouvriers qui travaillent pendant un ſeul jour : pareillement, que 30 ouvriers qui travaillent pendant 6 jours, doivent faire le même ouvrage que 180 ouvriers qui travaillent pendant un ſeul jour : ou que 200 journées ſont à 100 toiſes, comme 180 journées ſont à $x$ toiſes. Les deux proportions ſe réduiſent donc à une ſeule proportion que l'on réſout par une ſimple regle de trois : 200 . 100 :: 180 . $x$ : donc on aura $x = \frac{180 \times 100}{200} = \frac{18000}{200} = 90$.

277. REMARQUE I. Si le problême eût été propoſé en cette maniere ; 20 *ouvriers en* 10 *jours travaillant* 8 *heures ont fait* 100 *toiſes : combien* 30 *ouvriers en* 6 *jours travaillant* 10 *heures feront-ils de toiſes?* La queſtion propoſée auroit renfermé ſept termes : ce que l'on appelle la regle *de ſept*.

Pour résoudre ce problême, il eût fallu faire trois proportions, qui par la multiplication auroient été réduites à une seule. Ainsi on auroit multiplié 100 journées par 8 heures, & 180 journées par 10 heures:

Heures. Toises. Heures. Toises.
& l'on auroit eu, 1600 . 100 :: 1800 . $x$.

278. REMARQUE II. Si le problême avoit eu neuf termes, ce que l'on appelle la *regle de neuf*; il eût fallu faire quatre proportions, qui par la multiplication auroient été réduites à une seule.

## PROBLÊME VI.

279. *Trois citoyens ont fait un fonds de* 1800 *livres: Pierre y a mis* 300 *livres; Jacques* 600 *livres; Jean* 900 *livres. Sur ce fonds ils ont fait un gain de* 9000 *livres: combien chacun doit-il participer au gain, à proportion de sa mise?*

SOLUTION. Ce problême renferme la *regle de compagnie* (275). Il est évident que le gain qui doit revenir à chacun, doit être proportionnel à la mise qu'il a faite. Ce problême se résout donc par autant de proportions, qu'il y a de termes inconnus, en disant: le fond est au gain, comme la mise de chacun est à la portion du gain qui revient à chacun. Ainsi soit $x$, la portion du gain qui doit revenir à Pierre; celle de Jacques $y$; celle de Jean $z$: on aura ces trois

Proportions . . 1800 . 9000 :: 300 . $x$ : 600 . $y$ : 900 . $z$ :

Donc pour le premier, $x = \frac{2700000}{1800} = 1500$.

pour le second, . . . . $x = \frac{5400000}{1800} = 3000$.

pour le troisieme, . . . . $x = \frac{8100000}{1800} = 4500$.

280. REMARQUE. Ce problême peut être énoncé

d'une façon générale, en proposant de *diviser un tout en parties proportionnelles aux parties d'un autre tout.*

Si les trois associés, au lieu d'avoir fait un gain, avoient essuyé une perte déterminée, par exemple, de 1000 livres; il est clair que la perte de chacun devroit être proportionnelle à sa mise; & que la quantité de chaque perte se trouveroit, par la même équation qui fait trouver la quantité de chaque gain.

## PROBLÊME VII.

281. On a fait, ou l'on veut faire un mêlange de quantités de différens prix : *étant données les portions qui le composent, & le prix de ces portions ; trouver le prix moyen d'une mesure déterminée de ce mêlange.*

SOLUTION. Ce problême renferme la regle d'alliage directe. Soit le mêlange fait ou projetté, un composé de vins de différens prix, par exemple, de 4 pintes de vin à 10 sols, & de 6 pintes de vin à 15 sols la pinte. Il s'agit de trouver le prix moyen, ou le prix auquel reviendra la pinte après le mêlange fait.

I°. Prenez la somme des quantités ou mesures qui doivent composer le mêlange : prenez aussi la somme des prix de toutes ces mesures.

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Mesures.* | 4 pintes à 10 sols font... 40 sols. | | *Prix.* |
| | 6 pintes à 15 sols font... 90 sols. | | |
| *Somme.* | 10 mesures.... font.. 130 sols. | | |

II°. Faites cette proportion : la somme des mesures ou le mêlange entier est au prix total, comme une seule mesure est au prix moyen; ou 10 pintes. 130 sols :: 1 pinte. $x = \frac{130}{10} = 13$.

Ce problême se résout, comme on voit, par une simple regle de trois; & porte avec lui-même sa démonstration.

## PROBLÊME VIII.

282. On veut, avec des quantités de différens prix ou de différens titres, faire un mêlange qui revienne à un prix moyen fixé : *étant donné le prix moyen que doit avoir la mesure du mêlange, & la valeur des quantités dont on veut faire le mêlange ; trouver la portion qu'il faut prendre de chaque quantité, pour faire un mêlange dont la mesure revienne au prix donné.*

EXPLICATION. Ce problême renferme la *regle d'alliage indirecte* (275), laquelle peut se réduire à trois cas généraux. Car on peut demander,

I°. Que l'on forme un mêlange d'une grandeur indéterminée, *sans fixer les portions* des quantités qui doivent le former.

II°. Que l'on forme un mêlange encore indéterminé, *en fixant la portion* d'une de ces quantités.

III°. Que l'on forme un *mêlange d'une grandeur fixée & donnée*, sans fixer les portions de ces quantités.

On suppose toujours que le *prix moyen* est donné, aussi bien que le *prix particulier* de chacune des quantités qui doivent entrer dans le mêlange ou dans l'alliage. Ce problême exige une solution relative à chacun de ces cas particuliers ; & on la trouvera dans les trois exemples suivans.

283. EXEMPLE I. *La livre d'étain valant 16 sols, & la livre de plomb 10 sols ; combien faut-il prendre de l'un & de l'autre, pour en faire un alliage d'une grandeur quelconque, dont la livre revienne à un prix moyen 12 sols ?*

SOLUTION. I°. Comparez les deux prix, avec le prix moyen, qui est ici 12 ; pour en connoître les diffé-

rences : donnez au prix plus haut, la différence du prix moyen avec le plus bas prix;

| Prix particuliers. | Sols. | Différences, |
|---|---|---|
| Prix moyen. 12. | 16. | 2. |
| | 10. | 4. |
| Somme des différences. . . . | | 6. |

& au plus bas prix, la différence du prix moyen avec le plus haut, comme on le voit dans ce cadre.

II°. Observez que ces différences marquent combien il faut prendre de parties de chaque quantité, pour faire l'alliage ou le mêlange. Dans la question proposée pour exemple, il faut prendre deux parties d'étain & quatre de plomb : & comme la somme des parties qui composent l'alliage, est $2+4=6$, les parties qu'il faut prendre des deux titres, sont $\frac{2}{6}$ & $\frac{4}{6}$ ; ou, ce qui revient au même, $\frac{1}{3}$ & $\frac{2}{3}$.

III°. S'il y a trois titres donnés, dont on veuille faire un alliage qui soit d'un titre ou prix moyen, par exemple, de 12 sols ; on prendra d'abord deux des trois titres que l'on réduira à un titre moyen, suivant la regle qui vient d'être donnée : il faudra ensuite comparer ce résultat avec le troisieme titre, pour en faire le mêlange, & par-là l'on trouvera le titre moyen cherché 12.

On voit par-là comment il faudroit opérer s'il y avoit quatre titres donnés, en réduisant d'abord les quatre titres à trois, & ensuite les trois à deux.

DÉMONSTRATION. La raison de cette opération est que les titres doivent fournir à l'alliage ou au mêlange, d'autant plus, qu'ils different moins du prix moyen; & d'autant moins, qu'ils en different plus. Donc les portions qu'ils doivent fournir, sont entre elles réciproquement comme les différences qu'ont les titres avec le titre moyen : donc pour connoître ces portions, il n'y a qu'à donner au plus haut titre la différence du plus petit ; & au plus petit, la différence du plus haut. C. Q. F. D.

284. EXEMPLE II. *Combien faudroit-il prendre de pintes de vin à* 100 *deniers la pinte, pour faire avec* 14 *pintes d'un vin inférieur à* 60 *deniers la pinte, un mêlange qui puisse valoir* 72 *deniers la pinte?*

SOLUTION. I°. Prenez les différences des prix particuliers avec le *prix moyen*; & placez les dans un ordre renversé; comme dans l'exemple & dans le cas précédent: ce qui signifie qu'il faudroit prendre 12 pintes du vin plus cher, & 28 pintes du vin moins cher.

| Prix particuliers. | *Deniers.* | Différences. |
|---|---|---|
| Prix moyen. 72. | 100 . . . | 12. |
| | 60 . . . | 28. |
| Quantité donnée, 14 pintes. | | |

II°. Mais comme la quantité qu'il faut prendre de ce dernier vin moins cher, est donnée & déterminée, savoir, 14 pintes; faites cette proportion: la quantité 28, trouvée par la différence avec le prix moyen, est à la quantité donnée 14; comme la quantité 12, trouvée par la différence avec le prix moyen, est à la quantité cherchée du vin plus cher, ou plus brievement, $28 . 14 :: 12 . x = \frac{168}{28} = 6$.

C'est-à-dire, qu'ayant pris 14 pintes de vin à 60 deniers, il faut prendre 6 pintes de vin à 100 deniers, pour faire un mêlange dont la pinte vaille 72 deniers. Il est clair qu'on peut substituer tout autre prix aux deux prix donnés, & toute autre quantité que 14, à l'une des deux choses qu'on veut mêlanger, sans altérer en rien cette méthode générale.

DÉMONSTRATION. La raison de cette opération se voit évidemment, en faisant l'opération inverse; c'est-à-dire, en cherchant par la regle d'alliage directe (281), quel seroit le *prix moyen* de la pinte de vin, après un mêlange de 14 pintes à 60 deniers la pinte, & de 6 pintes à cent deniers la pinte: on trouvera que ce prix moyen est 72 deniers. Or si 14

pintes à 60 deniers, & 6 pintes à 100 deniers, donnent pour prix moyen 72 deniers à la pinte de ce mêlange ; il est clair que les deux portions ou quantités dont le mêlange doit répondre à ce prix moyen, sont 14 pintes à 60 deniers & 6 pintes à 100 deniers. C. Q. F. D.

285. EXEMPLE III. *Combien faudroit-il prendre de froment à 90 sols la mesure, & de seigle à 60 sols la mesure, pour former un mêlange de 25 mesures à 72 sols la mesure ?*

SOLUTION. I°. Comparez les prix particuliers avec le prix moyen 72 : placez à côté, comme dans les deux exemples précédens, les différences dans un ordre renversé ; & prenez la somme 30 des différences.

| Prix particuliers. | *Sols.* | Différences. |
|---|---|---|
| Prix moyen. 72. | 90 | 12 |
| | 60 | 18 |
| Mesures fixées, 25. | | |
| Somme des différences | | 30. |

$30 . 25 :: 12 . x = \frac{300}{30} = 10.$

$30 . 25 :: 18 . x = \frac{450}{30} = 15.$

II°. Faites cette proportion : la somme 30 des différences, est à la somme donnée 25 de toutes les quantités ; comme la différence d'une des quantités avec le prix moyen, est à cette quantité : vous aurez pour quatriemes termes 10 & 15. C'est-à-dire, qu'il faut prendre 10 mesures de froment & 15 mesures de seigle, pour faire le mêlange demandé.

On conçoit que cette méthode générale peut s'appliquer à toutes sortes de quantités, & servir à faire des mêlanges de vin, de café, de substances métalliques, d'une infinité d'objets commerçables, de différent prix. Il n'y a à changer dans la proportion précédente, que les chiffres relatifs aux quantités données.

DÉMONSTRATION. La raiſon de cette opération ſe voit évidemment, comme dans l'exemple précédent, en faiſant l'opération inverſe. En effet, 10 meſures de froment à 90 ſols, font 900 ſols; & 15 meſures de ſeigle à 60 ſols font auſſi 900 ſols. Or prenant, comme le preſcrit la regle d'alliage directe (281), la ſomme des quantités, ſavoir 25, & la ſomme des prix, ſavoir 1800 ſols; vous aurez cette proportion, $25 . 1800 :: 1 . x = 72$ : ce qui donne le prix moyen $x = 72$, lequel eſt conforme à l'hypotheſe; comme dans la démonſtration de l'exemple précédent. C. Q. F. D.

## PROBLÊME IX.

286. *Etant donné un alliage d'or & d'argent, trouver ſans décompoſer la maſſe qui réſulte de cet alliage, quelle quantité de chaque métal elle contient.*

SOLUTION. Voici le fameux problême dont Archimede trouva la ſolution en entrant dans le bain, avec des tranſports de joie capables de l'expoſer à compromettre la gravité des mathématiques. Hieron, roi de Syracuſe, avoit donné à ſon orfevre, une certaine quantité d'or, pour faire une couronne. L'ouvrage étant fini, le Roi voulut ſavoir s'il n'y avoit point d'alliage : mais il ne vouloit pas qu'on tronquât ou qu'on entamât la couronne, dont le travail étoit encore plus précieux que la matiere. Il propoſa la queſtion à Archimede; & ce ſavant & profond Mathématicien découvrit, ſans endommager en rien la couronne, la quantité préciſe d'or & d'argent que l'orfevre y avoit employée. Quoiqu'on ne ſache pas par quelle voie Archimede parvint à réſoudre ce fameux problême; nous ſuppoſerons & il eſt aſſez vraiſemblable qu'il employa la méthode ſuivante, qui eſt une ſimple application de la regle d'alliage inverſe;

& qui est fondée sur les différentes pesanteurs spécifiques de l'or & de l'argent, qu'on peut déterminer aisément par le moyen de l'hydrostatique. (*Phy*. 642.)

Archimede prit ou put prendre deux lingots, l'un d'or & l'autre d'argent, qui pesoient chacun autant que la couronne; & ayant observé que la couronne, plongée dans l'eau, perdoit plus de son poids que le lingot d'or, & moins que le lingot d'argent, plongés aussi dans la même eau; il conclut qu'il y avoit de l'alliage dans la couronne. Car si elle avoit été d'or pur, comme le lingot d'or, leurs pertes de poids dans l'eau auroient été égales; & si elle avoit été toute d'argent, sa perte & celle du lingot d'argent auroient été aussi égales. Pour résoudre avec lui le problême,

I°. Supposons que la couronne, que nous prenons ici pour exemple général d'un *alliage d'or & d'argent*, pesât 96 onces, comme les deux lingots de comparaison & de même poids: que la perte de son poids dans l'eau, fût de 8 onces: que celle du lingot d'or, fût de 7 onces & $\frac{3}{4}$; & celle du lingot d'argent, de 9 onces & $\frac{1}{4}$.

En multipliant par 4 les poids & les pertes (194 & 207); on réduira d'abord le poids commun 96 des trois masses, & les pertes particulières de chacune des trois masses dans l'eau, en fractions dont le dénominateur sera 4: ce qui donnera $\frac{384}{4}$, & $\frac{32}{4}$, $\frac{31}{4}$, $\frac{37}{4}$.

Ces quatre fractions sont entre elles comme leurs numérateurs (190). Ainsi le poids commun & les trois pertes particulieres sont entre eux, comme 384 & 32, 31, 37: c'est-à-dire, que si les trois poids, égaux chacun à 96 onces, avoient été divisés chacun en 384 parties, la couronne ou l'alliage auroit perdu dans l'eau 32 parties; le lingot d'or 31, & le lingot d'argent 37. La perte 32 est la *perte moyenne*, donnée ou trouvée: les pertes 31 & 37 sont les pertes données ou trouvées, des substances qui forment l'al-

liage. Ces trois pertes répondent à ce que nous avons appellé les *trois prix donnés*, dans toute la regle d'alliage indirecte. (282.)

II°. Je fais un alliage des pertes 31 & 37 des lingots d'or & d'argent, pour lui donner la perte moyenne 32 de la couronne; & échangeant les différences, j'en prends la somme. Cette somme 6 me fait voir que pour

| Pertes particulieres. | *Parties.* | Différenc. |
|---|---|---|
| Perte moyenne.. 32. | 31 . . . | 5. |
| | 37 . . . | 1. |
| Somme des différences. . . . . | | 6. |

avoir un alliage de 6 onces, qui perdît autant dans l'eau que 6 onces du mêlange ou de l'alliage de la couronne, il faudroit cinq onces d'or & une once d'argent.

Les 5 onces d'or prises ensemble, perdroient dans l'eau 5 trente-deuxiemes de moins, que cinq onces de l'alliage de la couronne: mais l'once d'argent perdroit 5 trente-deuxiemes de plus. Ainsi le plus étant compensé par le moins, les cinq onces d'or jointes ou alliées à l'once d'argent, ne perdroient ni plus ni moins que six onces de l'alliage de la couronne. Cette théorie revient, comme on voit, au premier cas & au premier exemple de la regle d'alliage indirecte. (283.)

III°. Maintenant, puisque la couronne pesoit 96 onces, selon la supposition; je fais deux regles de trois en disant pour la premiere: si pour un alliage de 6 onces, qui dans l'eau perde précisément autant de son poids que la couronne, il faut 5 onces d'or; combien en faudra-t-il pour un alliage de 96 onces? Et pour la seconde, si pour ce même alliage de 6 onces, il faut une once d'argent; combien en exigera un alliage de 96 onces? Ces deux

$6 . 5 :: 96 . x = 80$. *Or.*
$6 . 1 :: 96 . x = 16$. *Argent.*

regles donnent 80 onces d'or & 16 onces d'argent, pour l'alliage de la couronne; & le problême est résolu.

DEMONSTRATION. La raison de cette opération est fondée sur les mêmes principes, que celle de l'alliage inverse; & elle revient à la démonstration du premier cas & du premier exemple (283). Il est clair que chaque métal doit fournir d'autant plus au mêlange ou à l'alliage qui doit perdre dans l'eau une certaine quantité déterminée de son poids, que sa perte propre dans l'eau s'éloigne moins de la *perte moyenne* 32, donnée ou trouvée; & réciproquement. Mais l'or perdant 31 & l'argent perdant 37, leurs différences de la perte moyenne sont 1 & 5 : donc en renversant les différences, l'or doit fournir cinq parties, & l'argent une partie, au mêlange ou alliage qui doit essuyer dans l'eau une perte égale à la perte moyenne 32. C. Q. F. D.

287. REMARQUE. Par les mêmes regles d'alliage, on pourra *faire une infinité de mêlanges convenables de différentes sortes de matieres ;* & découvrir si les mêlanges ont été faits selon les proportions requises.

Par exemple, pour fondre une piece de canon qui soit bonne, l'expérience a appris qu'il faut mettre trois livres d'étain sur 25 livres de rosette ou cuivre rouge. La rosette perd dans l'eau environ un neuvieme de son poids; & l'étain ne perd qu'environ un septieme de son poids. (*Phy.* 644). On pourra donc trouver, combien une piece de 5200 livres, par exemple, doit perdre de son poids dans l'eau; & en examinant ce qu'elle en perd, on découvrira, comme dans le problême précédent, ce qu'elle a de trop ou de trop peu de l'un de ces deux métaux.

S'il falloit refondre cette piece, on découvrira de même, en pesant un de ses tronçons dans l'eau, la quantité d'étain ou de rosette qu'il faut ajouter à l'al-

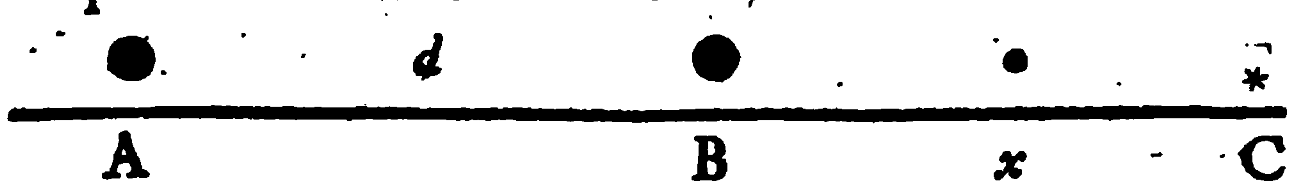
liage précédent, ſi cet alliage a été défectueux.

### PROBLÊME X.

288. Deux mobiles A & B commencent enſemble à ſe mouvoir avec des vîteſſes inégales dans la même direction ſur une même ligne indéfinie vers le point C, & doivent ſe rencontrer : *étant donnés la diſtance des deux mobiles au moment du départ, & le rapport de leurs vîteſſes, trouver le point où ils ſe rencontreront.*

SOLUTION. I°. Soit la vîteſſe du mobile A, $=5$; la vîteſſe du mobile B qui doit être moindre, puiſqu'il doit être atteint par l'autre, $=2$; la diſtance des deux mobiles au moment du départ, & que j'appelle $d$, $=600$ toiſes.

Le mobile B qui précede, parcourt un certan eſpace avant d'être atteint par le mobile qui le ſuit : cet eſpace inconnu & qu'il s'agit de trouver, je l'appelle $x$. Le mobile A, pour arriver au point de rencontre, parcourra la diſtance $d$ compriſe entre les deux mobiles, plus l'eſpace $x$; dans le même tems où le mobile B ne parcourra que l'eſpace $x$. Le problême ſe réduit donc à trouver cet eſpace $x$ au bout duquel doit ſe faire la rencontre des deux mobiles.




II°. Pour trouver cet eſpace $x$; je fais attention que les vîteſſes ſont entre elles, comme les eſpaces parcourus dans le même tems (*Phy.* 265). Car il eſt évident que ſi un corps a, par exemple, deux fois plus de vîteſſe qu'un autre; il parcourra dans le même tems deux fois plus d'eſpace. On aura donc cette proportion : la vîteſſe du corps A, eſt à la vîteſſe du corps B; comme l'eſpace parcouru par le corps A, eſt à l'eſpace parcouru par le corps B : ou bien $5 . 2 :: d+x . x$:

donc en multipliant, $5x = 2d + 2x$:
& en transposant, $5x - 2x = 2d$;
& en réduisant, . . . $3x = 2d$;
& en divisant par 3, . . $x = \frac{2d}{3} = \frac{1200}{3} = 400$.

C'est-à-dire que, quand le corps A attrapera le corps B, l'espace que ce corps B aura parcouru, sera le tiers du double de l'avance qu'il avoit; ou les deux tiers de la distance comprise entre les deux corps, à l'instant de leur commun départ. Ainsi le point de rencontre $x$ sera à 400 toises du corps B, & à 1000 toises du corps A.

289. COROLLAIRE. On voit par cette équation $x = \frac{2d}{3}$, qui renferme la solution du problême, que *pour avoir l'espace* x *parcouru par le mobile qui a le moins de vîtesse; il faut multiplier la distance* d *par la vîtesse de ce mobile, & diviser le produit par la différence des vîtesses.* Le diviseur 3 est la différence entre les deux vîtesses.

290. APPLICATION. On peut par la même méthode, *trouver à quel point du zodiaque la lune ratrappera le soleil*, que je suppose précéder la lune vers l'orient, d'une certaine quantité connue ou d'un certain nombre de degrés & de minutes, que j'appelle $d$.

EXPLICATION. I°. Il faut savoir que les vîtesses de la lune & du soleil dans le zodiaque, sont entre elles à peu près comme 1484 est à 111.

Cela posé, soit la distance $d$ dont le soleil précède la lune vers l'orient, égale à 26 degrés 56 minutes, qui font 1616 minutes. J'appelle $x$ l'espace ou la *partie du zodiaque* que le soleil parcourt, pendant le tems que la lune emploiera à l'attraper: l'espace ou la partie du zodiaque que la lune parcourra dans le même tems, sera $d + x$. On aura donc cette proportion $1484 . 111 :: d + x . x$:

Donc en multipliant, $1484x = 111d + 111x$;
& en transpoſant, $1484x - 111x = 111d$;
& en réduiſant, $1373x = 111d$;
& en diviſant par 1373, $x = \frac{111d}{1373} = \frac{179376}{1373}$.

II°. Voilà le problême réſolu! Ainſi pour avoir l'eſpace $x$, ou le point où la lune atteindra le ſoleil; diviſez 179376 par 1373 : le quotient 130 minutes (plus une fraction de minute que l'on néglige), exprimera la diſtance qu'aura parcouru le ſoleil au point de rencontre. Enſuite $d + x = 1616 + 130$, ſera 1746 minutes; qui font 29 degrés 6 minutes : c'eſt environ la diſtance entre le lieu où étoit la lune, & le point où elle atteindra le ſoleil.

REMARQUE. Nous ſuppoſons ici réelle, la révolution apparente du ſoleil dans le zodiaque. Cette *révolution du ſoleil*; qui eſt ſa révolution annuelle autour du zodiaque, à compter du premier point du bélier actuel juſqu'au retour dans le premier point du bélier ſuivant, s'effectue en 365 jours 5 heures 48 minutes 44 ſecondes (*Phy.* 1137). La *révolution de la lune* autour du même zodiaque, en prenant pour termes le premier point du bélier, eſt de 27 jours 7 heures 45 minutes 5 ſecondes. (*Phy.* 1242.)

L'*eſpace parcouru* en apparence par le ſoleil & par la lune, eſt le même zodiaque, de 360 degrés : les *vîteſſes apparentes* de ces deux globes autour du zodiaque entier, ſont donc entre elles, en raiſon inverſe des tems (*Phy.* 266). En réduiſant ces deux tems en minutes, & en faiſant abſtraction des ſecondes, on trouvera que le tems du ſoleil eſt de 525948 minutes; que le tems de la lune eſt de 39345 minutes; & que le premier tems eſt au ſecond, à très peu près, comme 1484 eſt à 111 : ainſi que le ſuppoſe la ſolution du problême.

## PROBLÈME XI.

291. Deux mobiles B & C commencent au même instant à se mouvoir l'un vers l'autre sur une même ligne : *étant donnés leur distance au moment du départ, & le rapport de leurs vîtesses, trouver le point de rencontre.*

SOLUTION. Soit la distance BC des deux mobiles, distance que j'appelle $d$, égale à 640 lieues ; la vîtesse du mobile B, $= 2$ ; la vîtesse du mobile C, $= 6$.


Il s'agit de trouver quelle partie B$x$, que j'appelle $x$, de la distance totale BC, que j'appelle $d$, aura parcouru le mobile B, au moment de rencontre. Pour cet effet, j'observe que le mobile C parcourra dans le même tems l'autre partie $d - x$ de la distance qui les sépare. On aura donc cette proportion : la vîtesse du mobile B est à la vîtesse du mobile C, comme l'espace parcouru par le premier est à l'espace parcouru par le second ; ou $2 . 6 :: x . d - x$.

Donc en multipliant, $6x = 2d - 2x$ ;
& en transposant, $6x + 2x = 2d$ ;
& en réduisant, $8x = 2d$ ;
& en divisant par 8, $x = \frac{2d}{8} = \frac{1280}{8} = 160$.

C'est-à-dire que, quand les deux mobiles se rencontreront, le mobile B aura parcouru deux huitiemes de la distance BC qui les séparoit. Ainsi le point de rencontre $x$, sera à 160 lieues du point B.

292. COROLLAIRE. On voit par cette équation $x = \frac{2d}{8}$, qui renferme la solution de ce problême ; que

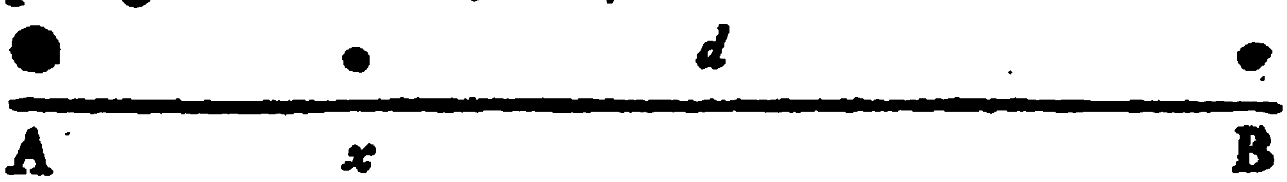
pour

*pour avoir l'espace* x *parcouru par le mobile qui a le moins de vîtesse, il faut multiplier la distance* d *par la vîtesse de ce mobile, & diviser le produit par la somme des vîtesses.* Le diviseur 8 est la somme des deux vîtesses.

## PROBLÊME XII.

293. Deux hommes, dont l'un marche plus vîte & l'autre plus lentement, sont au même lieu A, & veulent arriver au même instant à un lieu éloigné B: *étant donnés le rapport de leurs vîtesses, & la distance des deux termes; trouver quelle partie de l'espace doit avoir parcouru celui qui va le moins vîte, avant que l'autre se mette en chemin.*

SOLUTION. Soit la distance AB entre les deux termes, $= 1000$ toises: la moindre vîtesse, $= 5$: la plus grande vîtesse, $= 7$.




I°. J'appelle $x$, la partie A$x$ de la distance totale AB ou $d$, que doit avoir parcouru celui qui part le premier; avant que le dernier qui a plus de vîtesse, se mette en chemin. Celui qui part le dernier, parcourra la distance entiere $d$, pendant que le premier parcourra $d - x$.

Ainsi en supposant toujours que les vîtesses connues sont entre elles, comme les espaces parcourus (288); on aura encore cette proportion: $7 . 5 :: d . d - x$:

donc en multipliant, $7d - 7x = 5d$;

& en transposant d'abord, $-7x = 5d - 7d$;

& en transposant encore, $7x = -5d + 7d$;

& en réduisant, $7x = 2d$;

& en divisant par 7, $x = \frac{2d}{7} = \frac{2000}{7} = 285 + \frac{5}{7}$.

II°. C'est-à-dire que si la distance $d$ est de 1000 toises ; celui qui va moins vîte doit avoir parcouru un septieme de 2000 toises, à l'instant où part celui qui va plus vîte.

294. COROLLAIRE. On voit par cette équation $x = \frac{2d}{7}$, qui renferme la solution du problême, que *pour avoir l'inconnue* x, *ou l'avance que doit avoir le premier ; il faut multiplier la distance* d *par la différence des vîtesses, & diviser le produit par la plus grande des deux vîtesses*. Le diviseur 7, est la plus grande des deux vîtesses : le multiplicateur 2, en est ici la différence.

REMARQUE. Les trois problêmes précédens peuvent servir, comme on voit, à faire trouver à peu près en combien de jours & à quelle distance doivent se rencontrer deux vaisseaux, dont l'un est *meilleur voilier* que l'autre de telle quantité connue ; & qui partis en différens tems d'un même lieu, de Pondichéri, par exemple, doivent suivre une même route & arriver à un même terme, tel que Bordeaux, tout étant supposé égal d'ailleurs ; ou qui partis l'un de Bordeaux & l'autre de Pondichéri, doivent se rencontrer en chemin. On conçoit qu'il est facile, d'après la théorie & d'après la méthode que nous venons d'exposer dans les trois problêmes précédens, de se proposer & de résoudre une infinité d'autres problêmes également curieux & intéressans, sur le Mouvement.

## PROBLÊME XIII.

295. *Etant donnés le premier & le second terme d'une progression géométrique décroissante & composée d'une infinité de termes ; trouver la somme de tous les termes de cette progression.*

SOLUTION. Soit la progression géométrique donnée $∺ 8 . 4 . 2 . 1 . \frac{1}{2} . \frac{1}{4} . \frac{1}{8} . \frac{1}{16} \ldots \frac{1}{\infty}$.

I°. J'appelle le premier terme $a$; le second terme $b$; la somme inconnue des termes $x$. J'observe d'abord que dans toute progression géométrique, la somme des antécédens est à la somme des conséquens, comme un seul antécédent est à son conséquent (222). Or dans le cas du problême, la somme de tous les antécédens, est la même que la somme de tous les termes; puisque tous les termes sont antécédens, excepté le dernier qui est ici $\frac{1}{\infty}=0$ (241): ainsi la somme des antécédens est $x-\frac{1}{\infty}=x-0=x$.

D'ailleurs la somme de tous les termes d'une progression étant conséquens, excepté le premier; la somme des conséquens sera $x-a$. On aura donc cette proportion: la somme de tous les termes, est à la somme de tous les mêmes termes moins le premier; comme ce premier terme $a$, est au second $b$; ou $x . x-a :: a . b$. Donc $bx = ax - aa$; ou bien $ax - aa = bx$.

Voilà l'équation qui exprime la nature du problême, dans lequel il n'y a qu'une seule inconnue $x$.

II°. Il s'agit maintenant de dégager l'inconnue $x$, qui dans l'équation est mêlée avec deux quantités connues qui la multiplient. Pour cela, dans la derniere équation $ax - aa = bx$, je fais d'abord passer $-aa$ du premier membre dans le second; & j'ai $ax = bx + aa$, ou $bx + aa = ax$.

Ensuite pour mettre tous les termes qui contiennent l'inconnue dans le même membre; je fais encore passer $bx$, du premier membre de la derniere équation dans le second (261); & j'ai $aa = ax - bx$, ou $ax - bx = aa$.

III°. Après cela, considérant que le premier membre de la derniere équation, n'est que l'inconnue $x$ multipliée par $a-b$, ou $a-b$ multiplié par $x$; je divise toute l'équation par $a-b$; afin que l'inconnue $x$ reste seule dans un membre, égale à l'autre membre dans

toutes les quantités ſont connues. J'ai donc $x = \frac{aa}{a-b}$; & l'équation eſt réſolue.

296. COROLLAIRE. On voit par cette derniere équation $\frac{aa}{a-b}$, qui renferme la ſolution du problême, que *la ſomme de tous les termes d'une progreſſion géométrique décroiſſante & infinie, eſt égale au quarré du premier terme, diviſé par le premier moins le ſecond.*

Dans l'exemple propoſé, 8 eſt le premier terme & ſon quarré eſt 64 : le premier terme moins le ſecond, eſt $8 - 4 = 4$. Ainſi il faut diviſer 64 par 4 : le quotient 16 ſera la ſomme de tous les termes de la progreſſion donnée.

297. REMARQUES. I°. Quand les termes de la progreſſion géométrique infinie vont en diminuant par moitié, comme dans l'exemple propoſé; pour lors *la ſomme de tous les termes qui ſuivent le premier, eſt égale à ce premier terme.*

Quand les antécédens ſont triples de leurs conſéquens; alors *la ſomme des termes qui ſuivent le premier, n'eſt que la moitié de ce premier terme.*

Quand les antécédens ſont quadruples de leurs conſéquens; *la ſomme des termes qui ſuivent le premier, eſt le tiers de ce premier terme.*

Quand les antécédens ſont dix fois plus grands que leurs conſéquens; *la ſomme de tous les termes qui ſuivent le premier, eſt la neuvieme partie de ce premier terme.* Tout cela eſt une ſuite de la regle générale qui vient d'être établie. (296.)

II°. *Par ce moyen on trouvera facilement dans un tout, dont les parties décroiſſent en proportion géométrique, la ſomme infinie & décroiſſante*

Des moitiés : $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{\infty}$ ou $0 = 1$.

Des tiers : $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243}, \frac{1}{729} \ldots\ldots 0 = \frac{1}{2}$.

Des quarts : $\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \frac{1}{256}, \frac{1}{1024}, \ldots\ldots 0 = \frac{1}{3}$.

Des dixiemes: $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$, $\frac{1}{100000}$ $0 = \frac{1}{9}$

Des centiemes: $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{10000}$, $\frac{1}{1000000}$, $\frac{1}{100000000}$, $0 = \frac{1}{99}$

III°. En général, *on trouvera la ſomme de toutes les parties fractionnaires, dont la ſuite ſera une progreſſion géométrique décroiſſante infinie, en retranchant une unité du dénominateur du premier terme.* Le premier terme, diminué d'une unité dans ſon dénominateur, exprimera la ſomme de toute la ſuite infinie des termes ſuivans.

## PARAGRAPHE TROISIEME.

### *ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ.*

298. OBSERVATION. On nomme *équations du ſecond degré*, toutes les équations où l'inconnue eſt élevée à ſon quarré, ou multipliée par elle-même. Car lorſque dans une équation, l'inconnue n'eſt multipliée que par une quantité connue; l'équation n'eſt que du premier degré. Ainſi $ax + dx - x = b$, n'eſt qu'une équation du premier degré; en ſuppoſant que les quantités $a$, $b$, $d$, ſont toutes connues & évaluées en nombres entiers ou fractionnaires.

Nous ferons voir auſſi bientôt (301) que le produit $xy$ d'une inconnue par une inconnue, placé dans une équation, donne une équation du ſecond degré, ou une équation qui pour le fond des choſes revient à une équation du ſecond degré. Ainſi $xy + y = a$, eſt équivalemment une équation du ſecond degré.

La réſolution des équations du ſecond degré exige néceſſairement *l'extraction des racines quarrées* dans chaque membre de l'équation; & cette extraction des racines quarrées renferme aſſez ſouvent des difficultés qu'il eſt néceſſaire de prévoir & de lever. Ainſi, *lorſ-*

*que dans une équation, l'inconnue est élevée au quarré; pour en extraire la racine quarrée,*

I°. Il faut voir si ce quarré est multiplié ou divisé par quelqu'autre quantité. Car dans le premier cas, il faut le dégager de la quantité qui le multiplie, par la division; & dans le second cas, il faut le dégager de la quantité qui le divise, par la multiplication.

II°. Il faut voir si ce quarré est positif. Car s'il étoit négatif, il faudroit le rendre positif par la transposition: parce que dans une grandeur élevée à son quarré, il ne peut y avoir aucun quarré négatif. (152. IX°.)

III°. Il faut mettre dans un seul membre de l'équation, tous les termes où cette inconnue se trouve; en les égalant, par la transposition, à l'autre membre.

IV°. Il faut voir si ce membre est un *quarré complet*: ce qui n'arrive que lorsque l'inconnue ne se trouve que dans un seul terme, comme $xx = a - b$. Et lorsque, outre le quarré de l'inconnue, ce membre contient un ou plusieurs produits de l'inconnue par quelques autres quantités connues, comme $xx - ax = b$; ce membre est un quarré incomplet (152, VIII°.); & il faut le compléter, en ajoutant à chaque membre de l'équation, le *quarré de la moitié de la quantité connue* qui multiplie l'inconnue.

V°. Il faut extraire la racine quarrée de chaque membre de l'équation. Par-là on trouvera facilement la valeur de l'inconnue: puisque cette valeur de l'inconnue sera égale à la racine quarrée du membre tout composé de quantités connues. (129 & 153.)

EXEMPLE I. Soit proposée, par exemple, cette équation $\frac{aa - xx}{b} = 2a - b$, dont il faut extraire la racine quarrée. Premierement j'ôte la fraction, en multipliant tout par $b$; & j'ai $aa - xx = 2ab - bb$. Secondement je rends $-xx$ positif, par la transposition & en transposant, . . . $x = 27 - 11$;

(261); & j'ai $aa = xx + 2ab - bb$. Troisiemement je mets $xx$ dans un membre seul, par la transposition encore; & j'ai $aa - 2ab + bb = xx$. Quatriemement, puisque $xx$ est seul dans un membre, je vois que le quarré est complet. Cinquiemement j'extrais la racine quarrée de chaque membre (155); & j'ai $a - b = x$.

EXEMPLE II. Soient proposées encore deux autres équations $xx + ax = bc$, & $xx + x = 6$, qui contiennent chacune, outre le quarré de l'inconnue, l'inconnue linéaire, ou l'inconnue en sa premiere puissance. Car lorsque l'inconnue est multipliée par une quantité connue; cette quantité connue $a$, par exemple, fait la fonction de coefficient par rapport à l'inconnue, & marque que l'inconnue doit être prise tel nombre de fois. Pour trouver la racine quarrée de ces deux équations; on mettra dans un seul membre tous les termes où se trouve l'inconnue, & on fera ensorte que ce membre devienne un quarré complet. Or pour que ce membre devienne un quarré complet, il faut prendre la *moitié du coefficient* qui multiplie l'inconnue linéaire $x$; élever cette moitié au quarré; & ajouter ce quarré à chaque membre de l'équation. Par-là le premier membre deviendra un quarré parfait, dont on pourra aisément extraire la racine: on connoîtra donc la racine de $x$, en extrayant la racine semblable des deux membres.

$$\boxed{\begin{array}{c} xx + ax = bc. \\ \hline xx + x = 6 \end{array}}$$

Dans la premiere équation encadrée $xx + ax = bc$; le coefficient de $x$ est $a$: la moitié de ce coefficient est $\frac{a}{2}$: son quarré est $\frac{aa}{4}$. Ce quarré étant ajouté à l'un & à l'autre membre, on aura l'équation $xx + ax + \frac{aa}{4} = bc + \frac{aa}{4}$; dont la racine quarrée (153) est $x + \frac{a}{2} = \sqrt{bc + \frac{aa}{4}}$.

Dans la seconde équation encadrée $xx+x=6$; le coefficient de $x$ est $1$ : sa moitié est $\frac{1}{2}$ : son quarré est $\frac{1}{4}$. En ajoutant ce quarré à l'un & à l'autre membre, on aura l'équation $xx+x+\frac{1}{4}=6+\frac{1}{4}=\frac{25}{4}$, dont la racine sera $x+\frac{1}{2}=\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}$ : par conséquent, $x=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}=\frac{4}{2}=2$.

PROBLÊME I.

299. *Trouver un nombre inconnu* x; *dont le quarré, & le produit par une quantité connue* a, *soient égaux à une grandeur donnée* b.

SOLUTION. Soit $x$ le nombre inconnu : son quarré inconnu sera $xx$ : son produit inconnu, par la quantité connue, sera $ax$. Par la condition unique du problême, on aura cette équation : $xx+ax=b$.

I°. Par l'observation précédente, je vois d'abord que ce problême est du second degré : puisque l'inconnue s'y trouve élevée à son quarré; & que de plus, l'équation contient différens degrés de l'inconnue, savoir $xx$ & $ax$. Il faut donc, pour trouver la valeur de l'inconnue $x$, extraire la racine quarrée de chaque membre de l'équation.

II°. Je vois ensuite que le premier membre de l'équation n'est pas un quarré parfait; puisqu'il n'a que deux membres (152. VIII°) : il faut donc, pour que l'extraction de la racine soit possible, faire ensorte que le premier membre devienne un quarré complet. Pour cela, je prends la moitié du coefficient $a$ du second terme; & j'ai $\frac{a}{2}$, que j'éleve au quarré $\frac{aa}{4}$ : après quoi, j'ajoute ce quarré à l'un & à l'autre membre; & l'équation devient $xx+ax+\frac{aa}{4}=b+\frac{aa}{4}$.

III°. J'extrais, dans cette derniere équation, la racine quarrée de l'un & de l'autre membre (153); & j'ai cette autre équation $x+\frac{a}{2}=\sqrt{b+\frac{aa}{4}}$.

Cette derniere équation renferme toute la ſolution du problême : il ne s'agit plus que d'évaluer le ſecond membre tout composé de quantités connues, dont il faut prendre la racine quarrée. Ainſi en ſuppoſant la premiere quantité donnée $a = 8$, & la ſeconde quantité donnée $b = 33$; . . . . . . .

J'aurai d'abord . . . . . . . . $x + \frac{8}{2} = \sqrt{33 + \frac{64}{4}}$;

& en réduiſant, . . . . . . . $x + 4 = \sqrt{49}$.

Et en ôtant le ſigne radical, $x + 4 = 7$;

& en tranſpoſant, . . . . . . $x = 7 - 4$;

& en réduiſant, . . . . . . . $x = 3$.

On voit que cette équation $x = 3$, ſatisfait à toutes les conditions du problême. Car le quarré de 3 eſt $9 = xx$: le produit de 3 par 8, eſt $24 = ax$. Ces deux nombres $9 + 24$ ſont $33 = b$: par conſéquent le problême eſt réſolu.

300. REMARQUES. I°. Il faut obſerver ici (& c'eſt une *remarque fondamentale* à faire, pour toute la théorie des équations du ſecond degré) que dans la derniere équation $x = 3$, la quantité $x$ peut indifféremment être poſitive ou négative. La raiſon en eſt que, dans un problême du ſecond degré, la quantité $x$ ſe trouve élevée au quarré; & que tout quarré a toujours deux racines poſſibles. Par exemple, le quarré $xx$, réſultant néceſſairement & indifféremment ou de $+x$ par $+x$, ou de $-x$ par $-x$ (152. IX°.), a deux racines, qui ſont indifféremment ou $+x$ ou $-x$: ſans qu'on puiſſe déterminer dans l'équation $x = 3$, ſi la racine trouvée ſe rapporte à la racine poſitive $+x$, ou à la racine négative $-x$. D'où il réſulte que *les problêmes déterminés du ſecond degré ſont toujours ſuſceptibles de deux ſolutions*.

Pour faire mieux ſentir la vérité de cette remarque fondamentale, & de la conſéquence qui en réſulte; ſuppoſons que l'équation réſolue vienne de $+x +$

$\frac{a}{2}$. En multipliant par lui-même ce binome, on aura $xx + \frac{ax}{2} + \frac{ax}{2} + \frac{aa}{4}$; & en réduisant, $xx + ax + \frac{aa}{4}$: c'est l'équation que nous venons de résoudre, dans laquelle la quantité génératrice $x$ est positive, & vaut $+3$.

Supposons ensuite que l'équation vienne de $-x - \frac{a}{2}$. En multipliant par lui-même ce binome, on aura $xx + \frac{ax}{2} + \frac{ax}{2} + \frac{aa}{4}$; & en réduisant, $xx + ax + \frac{aa}{4}$: c'est encore l'équation que nous venons de résoudre, dans laquelle la quantité génératrice $x$ est négative, & vaut $-3$.

II°. Mais l'équation $x = 3$, qui résout en derniere analyse le problême précédent, satisfait également aux conditions du problême; soit que $x$ exprime une quantité positive $+3$; soit que $x$ désigne une quantité négative $-3$.

Nous avons vu d'abord comment $x$, pris pour une quantité positive $+3$, satisfait aux conditions du problême: il reste donc à faire voir comment $x$, pris pour une quantité négative $-3$, satisfait aux mêmes conditions; qui sont que le quarré de $x$, plus le produit de $x$ par $a$ ou 8, égale le nombre positif 33. Or $-3 \times -3 = +9$: ensuite $-3 \times -8 = +24$: enfin $+9 + 24 = +33$.

III°. Si dans le problême précédent, les quantités données $a$ & $b$, au lieu d'être 8 & 33, eussent été 22 & 615; on auroit eu de même l'equation . . . $x + \frac{a}{2} = \sqrt{b + \frac{aa}{4}}$;

& en substituant, . . . . . $x + \frac{22}{2} = \sqrt{615 + \frac{484}{4}}$;

& en simplifiant, . . . . . $x + 11 = \sqrt{736}$.

& en ôtant le signe radical, $x + 11 = 27$, & un peu plus

& en réduisant, . . . $x = 16$, & un peu plus.

Cette derniere équation satisfait à très-peu près aux conditions du problême. Car d'abord $16 \times 16 = 256$ : ensuite $16 \times 22 = 352$ : enfin $256 + 352 = 608$. Ce nombre 608 est un peu plus petit que le nombre 615 : parce que la quantité $x$ vaut un peu plus que 16. Mais cette équation $x = 16$, ou résout le problême, si on veut se contenter d'un à peu près; ou démontre que *le problême est impossible & insoluble*, si l'on exige la racine exacte & précise d'un nombre 736, qui n'est pas un quarré parfait (134), & qui ne répond pas aux conditions données dans le problême.

IV°. Si on demandoit de *trouver un nombre inconnu* x, *tel qu'ôtant son quadruple de son quarré, on eût un reste égal à* 96 : en procédant comme dans la solution du problême précédent, on auroit d'abord l'équation $xx - 4x = 96$; & en complettant le quarré, on aura ensuite $xx - 4x + \frac{16}{4} = 96 + \frac{16}{4}$. Après quoi, la solution est la même que celle du problême précédent; & on trouve l'inconnue $x = 12$.

## PROBLÊME II.

301. *Trouver deux nombres inconnus, dont la somme & le produit sont donnés.*

SOLUTION. Soient les deux nombres inconnus $x$ & $y$ : leur somme donnée $18 = a$; leur produit donné $65 = b$. Le problême renferme deux conditions, & donne deux équations : par la premiere, $x + y = a$; & par la seconde, $xy = b$.

I°. Comme il y a ici deux inconnues dans chaque équation; j'emploie la substitution, pour faire disparoître une des deux inconnues dans la seconde équation. Pour cela, prenant la valeur de $x$ dans la premiere équation, j'ai $x = a$

$$\boxed{\begin{array}{l} x + y = a \text{ ou } 18 \\ xy = b \text{ ou } 65. \\ \hline ay - yy = b. \end{array}}$$

$-y$; & multipliant $a-y$ par $y$, j'ai $ay-yy$. J'ai donc l'équation $xy=b$, transformée en son égale $ay-yy=b$.

II°. Dans cette derniere équation, je ne vois plus qu'une inconnue : mais j'y vois un quarré négatif, qu'il faut rendre positif; j'y vois de plus un quarré incomplet, qu'il faut completer (298). D'abord je rends positif par la transposition (261), le quarré négatif; & j'ai $yy-ay=-b$.

Ensuite je complette cette derniere équation, en ajoutant à chaque membre le quarré de la moitié de $a$, coefficient du second membre; & j'ai l'équation complete $yy-ay+\frac{aa}{4}=\frac{aa}{4}-b$.

III°. Cette derniere équation renferme la solution du problême; & il ne s'agit plus que d'extraire la racine quarrée de l'un & de l'autre membre (153 & 129), dont l'un est tout composé de quantités connues. J'extrais donc cette racine quarrée;

& j'ai . . . . . $y-\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{aa}{4}-b}$;

& en simplifiant, . . $y-9=\sqrt{81-65}$;

& en réduisant, . . $y-9=\sqrt{16}$;

& en ôtant le signe radical, $y-9=4$;

& en transposant, . . $y=4+9$;

& en réduisant, . . $y=13$.

Cette derniere équation $y=13$, fait voir que l'un des deux nombres cherchés $y$ est 13; & que l'autre nombre cherché $x$ est par conséquent 5 : puisque $13+5=18$. Ces deux nombres 5 & 13 satisfont aux deux conditions du problême : car $5+13=18$; & $5\times13$ ou $13\times5=65$.

IV°. Mais il faut observer ici que, soit qu'on fasse $y=13$ & $x=5$, soit qu'on fasse $y=5$ & $x=13$, les conditions du problême sont également remplies.

D'où il s'ensuit que le nombre 13 ne représente pas plutôt la racine $y$, que l'autre racine $x$; que *chacune des deux inconnues peut indifféremment représenter soit le nombre plus grand, soit le nombre plus petit*; que par conséquent ce problême est susceptible de deux solutions, ainsi que le précédent; & qu'en général tout problême dans lequel une des deux inconnues peut être indifféremment plus grande ou plus petite que l'autre, est un *problême qui a deux solutions & qui est du second degré.* Cette remarque revient, comme on voit, pour le fond des choses, à la seconde partie de la remarque précédente. (300.)

## *CONCLUSION.*

Il seroit facile d'étendre & d'alonger ce traité, ou cette théorie des Équations du premier & du second degré, en y insérant une foule superflue de problêmes plus ou moins difficiles, qu'on trouve par-tout & qui ne menent à rien. Nous avons voulu n'y mettre guere que les problêmes fondamentaux, dont la solution, simplifiée, autant qu'il est possible, a un rapport prochain & immédiat avec les grandes connoissances du Calcul, de la Géométrie, de la Physique.

*FIN DU CALCUL.*

# PRINCIPES
## *DU CALCUL*
## ET DE LA GÉOMÉTRIE.

---

# *SECONDE PARTIE.*
## LA GÉOMÉTRIE.

---

*Longimétrie*, ou mesure de l'Étendue en longueur. *Origine des Lignes, leur position respective, leur réunion en figures, leurs rapports, leurs mesures.*

*Planimétrie*, ou mesure des Surfaces planes envisagées *dans leur égalité, dans leurs rapports, dans leurs sections.*

*Stéréométrie*, ou mesure des Solides. *Formation & développement des différens solides, d'où l'on déduit d'abord les mesures & les rapports de leurs Surfaces; & ensuite, l'égalité, la mesure, & les divers rapports de leurs Solidités.*

*Trigonométrie*, ou l'art scientifique de résoudre les Triangles par le calcul arithmétique. *Théorie des Cordes & des Sinus: usage des Sinus dans la résolution des Triangles: Sinus des Secondes & des Tierces. Idée & principaux usages de la Trigonométrie sphérique.*

*Sections Coniques*: Introduction à cette science. *La Parabole & l'Ellipse considérées, & sur un plan & dans le cône. Table des Sinus.*

PRINCIPES

# PRINCIPES
## *DU CALCUL*
## ET DE LA GÉOMÉTRIE,
OU
## *ÉLÉMENS DE MATHÉMATIQUES.*
# GÉOMÉTRIE.

## NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

### *Principes de la Géométrie.*

La *Géométrie* est la science de l'étendue, ou la science qui apprend à mesurer la grandeur continue. La géométrie est ou spéculative, ou pratique. La *géométrie spéculative* est celle qui est occupée à démontrer : la *géométrie pratique* est celle qui est occupée à opérer & à exécuter : à la premiere appartiennent les théorêmes ; à la seconde, les problêmes. Nous ne séparerons point la géométrie spéculative, de la géométrie pratique : parce que l'opération ne peut être trop rapprochée de la démonstration qui l'éclaire & qui la dirige. Ainsi nous donnerons conjointement, autant qu'il sera possible, & les théorêmes & les Problêmes,

La géométrie se divise communément en géométrie élémentaire & en géométrie transcendente. On nomme *géométrie élémentaire*, toutes les parties de cette science où l'on n'emploie dans les démonstrations & dans les opérations, que la ligne droite & la ligne circulaire. On nomme *géométrie transcendente*, toutes les parties de cette science où l'on emploie dans les démonstrations des lignes différentes de la ligne droite & de la ligne circulaire, telles que sont les trois sections coniques & une foule d'autres courbes d'un genre plus relevé.

302. DÉFINITION. Dans l'étendue il y a quatre choses à considérer ; savoir, le *point*, la *ligne*, la *surface*, & le *solide*. Un corps quelconque considéré tout entier, s'appelle un *solide*. Un solide est terminé par des faces, que l'on appelle *surfaces*. Chaque surface est terminée par des côtés, que l'on appelle *lignes*. Chaque ligne est terminée par des extrêmités, que l'on appelle *points*.

I°. Le point n'a pas de dimensions ; ou n'a que des dimensions infiniment petites, dont on fait abstraction. La ligne a une dimension, que l'on appelle *longueur*. La surface a deux dimensions, que l'on appelle *longueur* & *largeur*. Le solide a trois dimensions, que l'on appelle *longueur*, *largeur* & *profondeur*.

II°. Ces trois dimensions tirent primitivement leur origine du point. Car le point en se mouvant, *décrit une ligne* : une ligne en se mouvant, *décrit une surface* : une surface en se mouvant, *décrit un solide*. Il n'y a donc que trois especes d'étendue, la ligne, la surface & le solide.

III°. La mesure des lignes ou la *longimétrie*, la mesure des surfaces ou la *planimétrie*, la mesure des solides ou la *stéréométrie*, seront la matiere d'autant de traités, qui embrasseront le fond de tout ce que nous avons à dire sur les trois dimensions de l'étendue.

A ces trois traités, nous ajouterons un traité de *trigonométrie*, qui contiendra une méthode particuliere & plus ſcientifique, de meſurer les triangles ; & une *introduction aux ſections coniques*, bornée à donner les notions fondamentales de l'ellipſe & de la parabole, qu'exige indiſpenſablement l'étude de la phyſique.

ETYMOLOGIES. *GÉOMÉTRIE* ; c'eſt-à-dire, meſure de la Terre, ou meſure de l'étendue ſur la terre ; laquelle meſure a été principalement l'objet des premiers géometres, ou des hommes qui ſe ſont occupés de la ſcience de l'étendue. De γη, *terra* ; & de μέτρον, *menſura*. *LONGIMÉTRIE* ; c'eſt-à-dire, ſcience de l'étendue en longueur : de *longum* & de μέτρον. *PLANIMÉTRIE* ; ſcience de l'étendue plane : de *planum* & de μέτρον. *STÉRÉOMÉTRIE* ; ſcience de l'étendue ſolide, ou de l'étendue ſelon ſes trois dimenſions : de στερεόν, *ſolidum* ; & de μέτρον. *TRIGONOMÉTRIE* ; ſcience ou meſure des triangles : de τρεῖς, *trois* ; de γωνία, *angle*, & de μέτρον. *SECTIONS CONIQUES* ; ſcience des ſections faites par un plan dans le cône ; ou des propriétés qu'ont ces ſections ; ou ſcience qui a pour objet, des ſurfaces planes reſſemblantes aux ſections que peut former un plan tranchant, en coupant d'une maniere quelconque, un cône d'une grandeur quelconque.

# PRINCIPES
## *DU CALCUL*
## ET DE LA GÉOMÉTRIE,
OU
## *ÉLÉMENS DE MATHÉMATIQUES.*
# GÉOMÉTRIE.

## PREMIER TRAITÉ.

### *Les Lignes, ou la Longimétrie.*

Nous considérerons dans les lignes, leur origine, *leur* position respective, leur réunion en figures, leurs rapports. De leur *origine*, découlent leur nature & leurs propriétés fondamentales : de leur *position respective*, naissent les angles : de leur réunion, se forment les figures : de leurs *rapports*, résulte leur mesure, ou la longimétrie : matiere d'autant d'articles de ce traité.

## ARTICLE PREMIER.

### *Origine et propriétés des Lignes.*

303. Hypothese. Si un point A est supposé se mouvoir, & partir d'un terme A pour arriver au terme B;

l'eſpace parcouru par ce point s'appelle *ligne*. Ainſi la ligne eſt l'écoulement d'un point. (*fig.* 13.)

I°. Si le point A en ſe mouvant, conſerve toujours la même direction, & va par la voie la plus courte de A en B, il décrit une *ligne droite*.

II°. Si le point A, en ſe mouvant, change à chaque inſtant de direction, il décrit une *ligne courbe ;* par exemple, ligne AFB, ou bien la ligne ADB.

III°. On peut remarquer ici que toute ligne eſt droite ou courbe. *La ligne droite eſt unique dans ſon eſpece :* elle ne peut être plus ou moins droite. *La ligne courbe peut varier à l'infini :* elle peut être plus ou moins courbe. Parmi les lignes courbes, nous ne conſidérerons ici que la circulaire, de laquelle toutes les autres courbes tirent primitivement leur origine.

A la ligne droite & à la ligne circulaire, répondent la *regle* & le *compas :* la regle, pour décrire la ligne droite ; le compas, pour décrire la ligne circulaire : ce ſont les inſtrumens fondamentaux dont on ſe ſert dans la géométrie pratique.

## DE LA LIGNE DROITE.

Voici, ſur la nature & ſur les propriétés de la ligne droite, quelques propoſitions qu'on pourra regarder indifféremment ou comme des *théorêmes*, puiſqu'on les démontre ; ou comme des *axiomes*, puiſqu'elles portent en elles-mêmes leur démonſtration & leur évidence. (*fig.* 13.)

304. AXIOME I. *On ne peut tirer qu'une ſeule ligne droite, d'un point à un autre ;* par exemple, du point A au point B. Car il eſt clair que les nouvelles lignes droites, qui paſſeroient par ces deux points A & B, auroient tous leurs points poſés ſur tous les points de la premiere ligne AB ; & ne feroient plus qu'une même ligne avec la ligne AB.

305. AXIOME II. *La ligne droite est la plus courte qu'on puisse mener d'un point à un autre.* Car toute autre ligne commence à s'alonger en se coudant ; & plus elle se coudera, plus elle s'alongera. La ligne ACB est plus courte que la ligne AEB, & que toute autre ligne possible AFB ou ADB, qui atteindra du point A au point B. (*fig.* 13.)

La *ligne droite menée d'un point ou d'un terme à un autre, est donc la mesure précise de la distance.* La ligne AB est la distance précise du point A au point B.

306. AXIOME III. *La position d'une ligne droite ne dépend que de deux points.* Ensorte que si on connoît deux points A & C d'une ligne droite, on connoîtra aussi la position de la ligne entiere ACB : puisque tous ses points vont nécessairement dans la direction des deux points connus A & C, fût-elle prolongée à l'infini de part & d'autre.

307. AXIOME IV. *Deux lignes droites ne peuvent avoir deux points communs.* Car si elles avoient deux points communs, elles auroient dès-lors la même position, & ne feroient plus qu'une seule & même ligne. Les deux lignes AB & AC, rapprochées tant qu'on voudra, n'ont de point commun que le point A, tant qu'elles sont deux lignes. (*fig.* 21.)

## DE LA LIGNE CIRCULAIRE.

308. HYPOTHESE. Si une ligne droite CA, immobile au point C & mobile au point A, est supposée faire une révolution autour du point C ; il est clair que *l'extrêmité* A *décrira une courbe dont tous les points seront également distans du point* C. (*fig.* 18.)

C'est *l'image du compas*, dont une pointe immobile est fixée sur un point, tandis que l'autre pointe mobile tourne autour de ce point. L'ouverture du compas représente la ligne CA, ou la ligne CD. De-là les définitions & les corollaires suivans.

## DÉFINITIONS GÉNÉRALES.

309. DÉFINITION I. La courbe décrite par la pointe mobile du compas, s'appelle *circonférence*. L'espace compris entre la circonférence, s'appelle *cercle*. Le point également éloigné de tous les points de la circonférence, se nomme *centre*. Une ligne droite tirée du centre à un point quelconque de la circonférence, s'appelle *rayon*. Une ligne droite qui passe par le centre, & qui aboutit à deux points opposés de la circonférence, se nomme *diametre*. (fig. 12 & 18.)

Si du même centre on décrit plusieurs circonférences MN, mn, elles sont appellées *concentriques* : si les circonférences décrites MM, NN ont des centres différens, elles sont appellées *excentriques*. (fig. 11. & 12.)

310. DÉFINITION II. Toute portion de la circonférence, comprise entre deux rayons, s'appelle *arc de la circonférence*. Toute portion de la surface du cercle, comprise entre deux rayons & terminée par un arc, s'appelle *secteur de cercle*. Toute ligne droite qui passe par les extrêmités d'un arc, s'appelle *corde*. Quand une corde divise la surface du cercle en deux parties inégales; la plus grande s'appelle le *grand segment* ; & la plus petite, le *petit segment*. (fig. 15.)

Ainsi EC ou AC est un *rayon* : ACB est un *diametre* : le point C est le *centre* : EGF est un *arc* : CEGFC est un *secteur* : EF est une *corde* : EGFE est le *petit segment* : EFHE est le *grand segment*.

311. DÉFINITION III. Toute circonférence se divise en 360 parties égales, qu'on appelle *degrés* : chaque degré en 60 parties égales, qu'on appelle *minutes* : chaque minute peut se diviser encore en 60 parties égales, qu'on appelle *secondes* : chaque seconde, en 60 parties égales, qu'on appelle *tierces* : & ainsi de suite.

Le *demi-cercle* est de 180 degrés (*fig.* 5) : le *quart de cercle*, de 90 degrés (*fig.* 3). Par *un degré*, il ne faut pas entendre une grandeur absolue, mais seulement la trois-cents-soixantieme partie de quelque circonférence que ce soit, grande ou petite.

## *Divers Corollaires.*

312. COROLLAIRE I. *Tous les rayons d'un cercle sont égaux :* puisqu'ils sont des lignes droites qui mesurent la distance du centre à la circonférence (305); laquelle distance est par-tout la même. Pareillement *tous les diametres d'un cercles sont égaux :* puisqu'ils sont chacun le double du rayon. (*fig.* 15 & 18.).

313. COROLLAIRE II. *Dans deux cercles égaux, les rayons & les diametres sont égaux* : puisqu'ils mesurent des grandeurs ou des distances égales ; savoir, dans l'un & dans l'autre cercle, la distance du centre à la circonférence, ou le double de cette distance.

314. COROLLAIRE II. *Une ligne droite ne peut pas couper une circonférence de cercle, en trois points.* Car trois points ont la même direction dans une ligne droite, & ne peuvent l'avoir dans une circonférence de cercle, ou chaque point s'écarte nécessairement de la direction des deux points qui le précedent. (308).

315. COROLLAIRE IV. *Deux points ne suffisent pas pour déterminer la position d'une circonférence :* puisqu'une circonférence peut avoir deux points communs, & avec une ligne droite, & avec une autre circonférence, qui la coupent. Les points A & B sont communs & à la ligne droite AB & aux deux circonférences excentriques MM & NN. (*fig.* 11.)

*Mais trois points suffisent pour déterminer la position d'une circonférence :* puisque dans une même circonférence, la courbure est la même dans tous les points ; & que tous les points sont également distans d'un centre commun. (*fig.* 15.)

Par exemple, dans le cercle AGBHC, on conçoit & on voit avec évidence, qu'il n'y a que le point C qui ſoit également diſtant de tous les points de la circonférence. Car le point *m* eſt plus près de A que de B; & le point *n* eſt plus près de H que de G; & ainſi du reſte.

Par conſéquent en connoiſſant dans cette circonférence, la poſition de trois points quelconques A, E, G, relativement au centre C; on connoîtra la poſition de tous les autres points de la même circonférence, leſquels s'infléchiſſent tous de la même maniere que les trois points connus; étant tous éloignés du centre C, autant préciſément que les trois points connus.

316. COROLLAIRE V. *Le diametre eſt la plus longue de toutes les cordes :* puiſque le diametre eſt égal à deux rayons, & qu'aucune autre corde n'eſt égale à deux rayons. (*fig.* 15.)

Soient tirés les deux rayons CE, CF : le diametre eſt égal à ces rayons pris enſemble (312). Or ces deux rayons ſont plus grands que la corde EF : puiſque EF eſt une ligne droite; & que ECF eſt une ligne coudée. La ligne coudée ECF eſt égale au diametre : donc la ligne droite EF, ou telle autre qu'on voudra prendre dans le cercle, eſt plus courte que le diametre (305). Donc le diametre eſt plus grand qu'aucune autre corde du même cercle.

317. COROLLAIRE VI. *Tous les diametres partagent & la ſurface & la circonférence du cercle, en deux parties égales.* Car le diametre étant la plus grande de toutes les cordes, il ſoutient le plus grand de tous les arcs, qui eſt la demi-circonférence; & le plus grand de tous les ſegmens, qui eſt le demi-cercle. Par exemple, la corde EF ſoutient l'arc EGF, & le ſegment EFG : mais le diametre AB ſoutient la demi-circonférence AGB, & le demi-cercle ACBGA.

Si l'on conçoit que la partie supérieure AGBCA de la circonférence & du cercle soit renversée sur la partie inférieure AHBCA ; il est clair que le point G tombera sur le point H ; que tous les autres points de la partie supérieure tomberont sur des poins correspondans de la partie inférieure ; & que ces deux parties, renversées l'une sur l'autre, quadreront entre elles dans tous leurs points correspondans : d'où il résulte que ces deux parties sont égales en tout. Cette maniere de démontrer l'égalité de deux figures, s'appelle la *preuve de superposition.* (10.)

318. COROLLAIRE VII. *Dans un cercle, les arcs égaux sont soutenus par des cordes égales.* Car placez par la pensée les deux arcs égaux EGF & MHN, l'un sur l'autre : les deux derniers points des arcs, deviennent les deux points qui terminent leurs cordes ; donc ces cordes sont égales. Donç si deux arcs quelconques d'un même cercle, sont égaux ; leurs cordes sont aussi égales. (*fig.* 15.)

319. COROLLAIRE VIII. *Dans un cercle, les cordes égales soutiennent des arcs égaux.* Car placez de même par la pensée les deux cordes égales EF & MN, l'une sur l'autre : les points qui les terminent sont les deux derniers points des arcs qu'elles soutiennent ; & tous les points suivans de l'un de ces arcs, sont nécessairement posés sur les points correspondans de l'autre arc ; puisque la courbure de la circonférence est partout la même. Donc les cordes étant égales, les arcs qu'elles soutiennent sont aussi égaux.

## PROBLÊME I.

320. *Trouver une ligne droite ; dont chaque point séparément pris, soit à égale distance de deux points donnés, tels que* A *&* B. (fig. 6.)

SOLUTION I. Des deux points donnés A & B, pris

pour centres, décrivez d'une même ouverture de compas, qui forme des cercles égaux, deux arcs DRC & DSC qui se coupent en deux points D & C. Le point D sera également éloigné de A & de B : puisqu'il en sera éloigné d'un rayon DA ou DB de deux cercles égaux. Le point C sera aussi également éloigné de A & de B ; par la même raison.

Maintenant tirez une ligne droite, du point D au point C. Chaque point de cette ligne, séparément pris, sera à égale distance de A & de B ; puisqu'il est évident que tous les autres points de cette ligne DMC, ont la même direction que les deux points connus D & C (306) ; & que si d'un point quelconque *m* ou *n* de cette ligne on porte une ouverture de compas en A, cette même ouverture de compas ira atteindre le point B.

SOLUTION II. Des deux points donnés A & B, pris pour centres, décrivez deux arcs H, qui se coupent en un point H : le point d'intersection H sera également éloigné de A & de B ; puisqu'il en sera éloigné de la longueur du rayon HA ou HB, qui sont des rayons de cercles égaux.

Ensuite, des deux mêmes points donnés A & B, décrivez d'une même ouverture de compas, égale ou inégale à la précédente, deux arcs F ou G, qui s'entrecoupent : le point d'intersection F ou G, sera également éloigné de A & de B ; puisqu'il en sera éloigné d'un rayon de deux cercles égaux.

Maintenant menez une ligne du point H au point F ou G : chaque point de cette ligne séparément pris, sera à égale distance de A & de B ; & *si elle étoit prolongée à l'infini, elle passeroit par tous les points également distans de* A *& de* B. (306.)

On voit par cette opération, qu'on peut prendre les deux points également distans de A & de B, & qui doivent donner la direction de la ligne indéfinie HDMCG, ou tous les deux du même côté FG, ou

l'un au-dessus & l'autre au-dessous des deux points donnés : pourvu que chacun des deux points D & C, ou D & H, ou H & F, soit pris avec une même ouverture de compas, qui puisse donner les rayons égaux HA = HB, DA = DB, CA = CB, GA = GB. Car alors chaque point particulier de la ligne DMCK, indéfiniment prolongée de part & d'autre, sera éloigné du point A & du point B, de la longueur d'un rayon de deux cercles égaux. C. Q. F. D.

On démontrera de la même maniere, que tous les points de la ligne *hmfgk*, sont chacun également éloignés des points *a* & *b*.

321. REMARQUE. La solution de ce problême apprend à *couper une ligne droite en deux parties égales.* La ligne AMB est coupée en deux parties égales au point M : puisque ce point M, en tant qu'appartenant à la ligne DC, est également distant & de l'extrêmité A & de l'extrêmité B de la ligne AMB ; comme on le voit par l'opération & par la démonstration précédente.

La solution du problême précédent, va servir à résoudre le problême suivant, qui est l'un des plus importans problêmes de toute la géométrie.

### PROBLÊME FONDAMENTAL.

322. *Faire passer une circonférence par trois points donnés qui ne soient pas en ligne droite, tels que sont les points* ABC. (fig. 17.)

SOLUTION. Par le problême précédent, tirez la ligne droite EF, dont chaque point séparément pris soit à égale distance des deux points A & B : tirez ensuite la ligne droite GH, dont chaque point séparément pris soit également distant des deux points B & C. *Le point* R, dans lequel ces deux lignes se couperont, *sera le centre du cercle :* ensorte que si du point R & de l'intervalle RA on décrit une circonférence, elle passera par les trois points donnés A, B, C.

DÉMONSTRATION. Le cercle n'ayant qu'un seul point également éloigné de tous les points de la circonférence (315); trouver ce point, c'est résoudre le problême. Or je démontre que le *point d'intersection* de ces deux lignes, est un point également éloigné des trois points donnés; & par-là même, également éloigné de tous les points de la circonférence. Car,

I°. Le point R, en tant qu'il appartient à la ligne EF, est également éloigné de A & de B : puisque par la construction, chaque point de cette ligne EF est également distant de A & de B.

II°. Le point R, en tant qu'il appartient à la ligne GH, est également distant de B & de C : puisque par la construction, chaque point de cette ligne GH est également distant de B & de C.

Maintenant, puisque la distance RA est égale à la *distance* RB; puisque la distance RC est égale à la même *distance* RB; donc RA = RC. Donc le point d'intersection R est le centre d'un cercle dont la circonférence passeroit par les trois points donnés A, B, C. Donc si une ligne RA ou RB ou RC, menée du point d'intersection à l'un des points donnés, est supposée faire une révolution sur le point R; l'extrêmité mobile A de cette ligne décrira une courbe (308) qui passera par les trois points donnés, & qui sera la circonférence d'un cercle. C. Q. F. D.

323. REMARQUE. Dans la solution & dans la démonstration de ce problême, nous supposons que les trois points donnés sont dans un plan, par exemple, sur une feuille de papier, ou dans une plaine. Nous ferons voir ailleurs que trois points quelconques, par exemple, les centres de la terre, du soleil & de la lune, sont toujours nécessairement dans un plan (530) : ainsi cette solution & cette démonstration sont générales.

Les trois centres de la terre, du soleil & de la lune

étant supposés dans un plan indéfini, en A, en B, en C; si on tire par la pensée les lignes EF, GH, leur point R d'intersection sera le centre d'un cercle dont la circonférence passeroit par les trois centres A, B, C, de la terre, du soleil, de la lune.

324. DÉFINITION. Si sur une ligne indéfinie AB, prolongée s'il le faut, on prend deux points quelconques A & B; & qu'on mene une ligne DM ou DC, dont tous les points séparément pris soient à égale distance des points A & B; cette ligne DM ou DC sera *une perpendiculaire à la ligne* AB. (*fig.* 6.)

325. COROLLAIRE. Etant donnés trois points M, N, R, qui ne soient pas en ligne droite; on pourra aussi *faire passer une circonférence circulaire par ces trois points*, en cette maniere. (*fig.* 14.)

Tirez une ligne droite, du point M au point N; & une autre ligne droite, du point N au point R. Après quoi, coupez en deux parties égales la ligne MN, par une perpendiculaire *a*C (321): coupez de même en deux parties égales la ligne NR, par une autre perpendiculaire *b*C. Ces deux lignes convergentes s'entre-couperont plus ou moins loin en un point C; *& ce point d'intersection sera le centre d'un cercle, dont la circonférence passeroit par les trois points donnés.*

C'est une suite évidente des deux problêmes que nous venons de résoudre & de démontrer. La ligne qui décrira cette circonférence, sera une ligne menée du point d'intersection C, à l'un des points donnés.

Souvent on connoît la circonférence d'un cercle, sans connoître où est le centre de cette circonférence: le problême suivant apprendra à le trouver.

## PROBLÊME III.

326. *Trouver le centre d'une circonférence ou d'un arc donnés.* (fig. 17.)

SOLUTION. Prenez sur cet arc ou sur cette circonférence, trois points quelconques, A, B, C. Cherchez par le problême précédent le centre d'un cercle, dont la circonférence passe par ces trois points, A, B, C: ce centre R sera le centre cherché, comme il conste par la démonstration du problême fondamental.

## ARTICLE SECOND.

### *POSITION RESPECTIVE DES LIGNES.*

327. OBSERVATION. DEUX lignes droites, comparées l'une avec l'autre, peuvent être ou *paralleles*, ou *perpendiculaires*, ou *obliques*. Quand on considere les lignes relativement au cercle, il y en a qu'on nomme *tangentes*, il y en a qu'on nomme *sécantes*. De-là l'objet des définitions suivantes.

### *DIVERSES DÉFINITIONS.*

328. DÉFINITION I. On appelle *lignes paralleles*, deux lignes droites qui sont également éloignées l'une de l'autre dans tous leurs points correspondans : ou deux lignes droites, qui posées sur un plan & prolongées à l'infini, ne se rencontreroient jamais. H*h*, D*d*, N*n*, sont trois lignes paralleles. (*fig.* 28.)

329. DÉFINITION II. On appelle *perpendiculaire*, une ligne droite qui tombe sur une autre sans pencher plus d'un côté que d'un autre ; ou plutôt, en ne penchant d'aucun côté (324). La ligne CD est perpendiculaire à la ligne AB. (*fig.* 24.)

330. DÉFINITION III. On appelle *oblique*, une ligne droite, qui en tombant sur une autre, penche plus

d'un côté que d'un autre. La ligne CA ou CN est oblique à la ligne AB. (*fig.* 24.)

331. DÉFINITION IV. On appelle *tangente*, une ligne droite qui touche une circonférence, & qui prolongée au-delà du point de contact, ne la couperoit pas. La ligne BA est tangente en A. (*fig.* 37.)

332. DEFINITION V. On appelle *sécante*, une ligne droite tirée ou d'un point pris hors de la circonférence, dans le cercle; ou d'un point pris dans le cercle, au-delà de la circonférence. La ligne N*n* est une sécante (*fig.* 28) : CNA est une autre sécante. (*fig.* 38.)

333. REMARQUE. Les lignes, par leur rencontre, forment des angles, qu'il faut connoître & mesurer. Or pour connoître & pour mesurer ces angles formés par les différentes lignes que nous venons de définir, il faut les considérer comme placés ou au centre ou à la circonférence d'un cercle : de-là les deux paragraphes suivans, qui vont diviser cet article.

## PARAGRAPHE PREMIER.

### *L'ANGLE AU CENTRE D'UN CERCLE.*

334. HYPOTHESE. SI le rayon CA, immobile au point C, est supposé décrire une circonférence par son extrêmité A, & laisser par-tout dans sa révolution des traces ou des lignes AC, BC, DC, FC; deux de ces traces ou de ces lignes intercepteront un *espace*; laisseront une *ouverture*, auront entre elles une *inclinaison*, que l'on peut évaluer & comparer. De-là l'objet des définitions & des observations suivantes. (*fig.* 18.)

### *DIVERSES DÉFINITIONS.*

335. DÉFINITION I. Cet *espace*, cette *ouverture*; cette

cette *inclinaiſon plus ou moins grande*, que laiſſent entre eux deux rayons ou deux lignes AC & BC, s'appelle *angle*. Les rayons AC & BC, s'appellent *côtés* de l'angle. Le point C où les côtés ſe rencontrent, s'appelle *ſommet* de l'angle. L'arc AB compris entre les côtés, & décrit du ſommet C pris pour centre, s'appelle la *meſure* de l'angle. (*fig.* 18.)

Quand un angle eſt iſolé (*fig.* 21), on le déſigne par une ſeule lettre A ou *a* placée au ſommet. Quand l'angle n'eſt pas iſolé, on le déſigne par trois lettres; & on place toujours au milieu la lettre qui eſt au ſommet de l'angle. (*fig.* 15.)

I°. L'angle ACG ou BCH, meſuré par un arc qui eſt le quart de la circonférence, s'appelle *angle droit*: ſa valeur eſt de 90 degrés.

II°. L'angle ACE ou ECG, meſuré par un arc moindre que le quart de la circonférence, s'appelle *angle aigu*: ſa valeur eſt au-deſſous de 90 degrés.

III°. L'angle ACF ou ECB, meſuré par un arc plus grand que le quart de la circonférence, s'appelle *angle obtus*: ſa valeur paſſe 90 degrés.

336. COROLLAIRE. *L'angle au centre d'un cercle, a pour meſure l'arc compris entre ſes côtés.* (fig. 18.)

DÉMONSTRATION. L'angle au centre d'un cercle étant formé par la révolution d'un rayon CA autour du centre immobile C; il eſt évident que l'angle quelconque ACB s'ouvre d'autant plus, que l'extrêmité A du rayon fait plus de chemin & décrit un plus grand arc AB: que pour que cet angle devienne plus grand ou plus petit, d'un trois-cents-ſoixantieme du cercle; il faut que l'extrêmité B du rayon qui le forme & le termine, avance ou recule d'un trois-cents-ſoixantieme ſur la circonférence: que ſi on diminue de moitié un angle quelconque BCD, on re-

tranchera néceſſairement la moitié préciſe de ſon arc BD : & ainſi du reſte.

On voit par-là, que *pour évaluer un angle, il faut le ſuppoſer placé au centre d'un cercle*, ou le comparer avec un angle placé au centre d'un cercle. Par exemple, pour évaluer l'angle CAB (*fig.* 21) il faut décrire à une diſtance quelconque du ſommet A, une circonférence ou un arc BC; & examiner quelle partie de la circonférence entiere eſt l'arc BC. Cette circonférence étant ſuppoſée de 360 parties égales, ſi l'arc BC en contient 12 & demi, l'angle BAC ſera un angle de 12 degrés 30 minutes. Tous les angles ſont ou droits, ou obtus, ou aigus. (*fig.* 15 & 18.)

I°. *Tous les angles droits ſont égaux* : puiſqu'ils ont tous pour meſure 90 degrés, ou le quart de la circonférence.

II°. *Mais les angles obtus ne ſont pas tous égaux* : un angle obtus de 179 degrés ſera plus grand qu'un angle obtus de 91 degrés.

III°. De même, *les angles aigus ne ſont pas tous égaux* : un angle aigu de 89 degrés ſera plus grand qu'un angle aigu de 2 degrés.

IV°. *Deux angles égaux, qui ont leur ſommet au centre d'un cercle, ſont appuyés ſur des arcs égaux* : puiſque ces angles BCF & ACE, par exemple (*fig.* 30), étant égaux, par l'hypotheſe, ils ont une même ouverture; & que cette ouverture priſe de part & d'autre à l'extrêmité des rayons qui forment leurs côtés, eſt meſurée par des cordes égales (305), qui ſoutiennent néceſſairement des arcs égaux. (319.).

A l'occaſion des angles obtus & des angles aigus; on diſtingue des complémens & des ſupplémens d'angles & d'arcs, qu'il faut auſſi connoître. (*fig.* 19.)

337. DÉFINITION II. Le *complément d'un angle aigu*, eſt ce qu'il faut ajouter à cet angle, afin que la ſomme ſoit égale à un angle droit. Le *complément d'un angle*

*obtus*, est ce qu'il lui faut retrancher, afin qu'il reste égal à un angle droit. L'angle CBE est le complément de l'angle aigu ABE. L'angle CBE est le complément de l'angle obtus DBE.

338. DÉFINITION III. Le *supplément d'un angle*, est ce qu'il faut ajouter à cet angle, afin que la somme soit égale à deux angles droits. L'angle EBA est le supplément de l'angle DBE. De même l'angle DBE est le supplément de l'angle EBA. (*fig.* 19.)

339. REMARQUE. Il en est de même des arcs. Le *complément d'un arc* correspondant à un angle aigu, est ce qu'il faut lui ajouter, pour qu'il soit égal au quart de la circonférence. Le complément d'un arc correspondant à un angle obtus, est ce qu'il lui faut retrancher, pour qu'il n'ait que le quart de la circonférence. De même le *supplément d'un arc* est ce qu'il faut lui ajouter pourqu'il soit égal à la demi-circonférence. L'arc AE est le complément de l'arc CE, & le supplément de l'arc DCE.

## THÉORÈME.

340. *Les arcs de différentes circonférences concentriques, compris entre les mêmes rayons, sont semblables & contiennent un même nombre de parties semblables de la circonférence.* (fig. 18.)

DÉMONSTRATION. C'est une suite de l'hypothese précédente (334). Car tandis que le rayon CA, dans sa révolution, décrit par le point A, l'arc AB; on conçoit que ce même rayon décrira par le point *a*, l'arc *ab*.

Il est donc évident que le point A & le point *a* du même rayon, doivent opérer les mêmes divisions dans les circonférences concentriques qu'ils décrivent. Il est donc évident que les arcs AB & *ab*, interceptés entre les mêmes rayons, renferment un même nombre de parties semblables de la circonférence, ou un

même nombre de degrés, de minutes, de ſecondes, de la circonférence. Donc ſi le grand rayon CA, dans une partie de ſa révolution, embraſſe des tiers, des quarts, des centiemes de la circonférence; le petit rayon C*a*, dans la même partie de ſa révolution, embraſſera des tiers, des quarts, des centiemes de ſa circonférence. C. Q. F. D.

341. COROLLAIRE. *Donc chacun de ces arcs, ſemblables* AB *ou* ab, *peut être indifféremment pris pour meſure de l'angle* ACB.

DÉMONSTRATION. Puiſque chacun de ces arcs contient un même nombre de degrés, de minutes, de ſecondes, de parties ſemblables; chacun d'eux eſt propre pour meſurer l'ouverture ou l'inclinaiſon des lignes CA, CB; laquelle ouverture ou inclinaiſon eſt la même dans toute la longueur de ces lignes. Donc pour meſurer l'angle ACB, on peut prendre indifféremment l'arc AB, ou l'arc *ab*.

Une grande circonférence a des degrés plus grands, une petite circonférence a des degrés plus petits: mais l'une & l'autre ont le même nombre de degrés. C'eſt ainſi que deux boules d'inégale grandeur, ont le même nombre de moitiés, de tiers, de quarts, de centiemes, de millioniemes: mais les moitiés de l'une ſont plus grandes que les moitiés de l'autre, & ainſi des autres parties ſemblables. C. Q. F. D.

## *PERPENDICULAIRES ET OBLIQUES.*

### THÉORÊME I.

342. *Une ligne droite tombant ſur une autre ligne droite, forme deux angles, qui pris enſemble ſont égaux à deux angles droits.* (fig. 10.)

DÉMONSTRATION. Soit la ligne AC, qui tombe ſur

la ligne DE. Les deux angles qu'elle forme ont pour mesure la demi-circonférence, & égalent deux angles droits. Car si du point C on décrit une circonférence, la ligne DE qui contient le centre, en sera le diametre; & par conséquent elle coupera la circonférence en deux parties égales (317). Or l'arc AD est la mesure de l'angle ACD : l'arc AE est la mesure de l'angle ACE : donc ces deux angles pris ensemble, sont égaux à deux angles droits; puisqu'ils embrassent la demi-circonférence. Par conséquent (*fig.* 19) :

I°. *La perpendiculaire, en tombant sur une autre ligne, forme deux angles droits* : puisque les deux angles CBD & CBA qu'elle forme, pris ensemble, sont égaux à deux angles droits; & que la perpendiculaire CB ne penchant pas plus d'un côté que de l'autre, il est clair que les deux angles qu'elle forme, sont nécessairement égaux entre eux.

II°. *Une ligne ne peut être perpendiculaire à une autre ligne, que cette seconde ne soit aussi perpendiculaire à la premiere.* Si la ligne AB est perpendiculaire sur la ligne CD; la ligne CD est aussi perpendiculaire sur la ligne AB. (*fig.* 24.) C. Q. F. D.

### THÉORÊME II.

343. *Les angles opposés au sommet, sont égaux.* (fig. 20.)

DÉMONSTRATION. Du point d'intersection des deux lignes qui forment ces angles, décrivez une circonférence : elle sera coupée en deux parties égales par les lignes AB, DE; puisqu'elles en sont les diametres.

I°. L'angle ACE, augmenté de l'angle ECB, vaut deux angles droits : puisque les deux ensemble embrassent un demi-cercle.

II°. L'angle DCB, augmenté du même angle ECB,

vaut aussi deux angles droits : puisque les deux ensemble embrassent aussi un demi-cercle.

III°. Maintenant retranchez à ces deux demi-cercles égaux, la partie qui leur est commune ; savoir, l'angle ECB : à des touts égaux, vous ôtez des parties égales ; donc les restes de ces touts sont égaux. Or les restes de ces touts, sont l'angle ACE, & l'angle DCB, opposés au sommet : donc les angles opposés au sommet sont égaux.

IV°. On peut démontrer de la même maniere que l'angle ACD & l'angle ECB, opposés au sommet, sont égaux ; donc il est évident que les angles opposés au sommet sont toujours & par-tout égaux. C. Q. F. D.

PROBLÊME I.

344. *Faire sur une ligne donnée* ab, *un angle égal à un autre donné, tel que* CAB. (fig. 21.)

SOLUTION. Du sommet de l'angle donné CAB, décrivez un arc CB entre ses deux côtés. Ensuite de l'extrêmité *a* de la ligne donnée, & de la même ouverture du compas, décrivez un arc indéfini, tel que *b*D ; sur lequel vous prendrez avec le compas la partie *bc*, égale à l'arc BC. Tirez ensuite une ligne du point *a* au point *c* : elle formera l'angle *cab*, égal à l'angle donné CAB.

Ces deux angles sont égaux : puisqu'ils ont pour mesure les arcs égaux BC & *bc* ; & que la grandeur des angles dépend de la grandeur des arcs qui mesurent leur ouverture dans un même cercle, ou dans des cercles égaux. C. Q. F. D.

345. REMARQUE. Les Géometres nomment *rapporteur*, un demi-cercle de cuivre ou de corne transparente, exactement divisé en degrés & en demi-degrés, qui se trouve dans les étuis de mathématique, & qui leur sert à prendre les ouvertures des angles, & à les rap-

porter du graphometre sur le papier. Voici comment on se sert de cet instrument, pour tracer sur le papier, des angles égaux à des angles donnés ou trouvés. (*fig.* 9.)

I°. Sur une feuille de papier ou sur un plan quelconque PPP, on tire une ligne indéfinie AB; & sur le point quelconque C de cette ligne, qu'on veut prendre pour sommet de l'angle, on place le centre de cette demi-circonférence ADB, dont la section en ligne droite doit être placée sur la ligne indéfinie qu'on vient de tirer.

II°. On prend ensuite sur cette demi-circonférence, un arc égal à l'arc de l'angle donné; & on marque sur le papier placé au-dessous, le point *m* ou *n* de la demi-circonférence, qui termine un arc égal à l'arc de l'angle donné.

III°. Enfin du point C de la ligne, pris pour centre, on mene une ligne droite au point trouvé *m* ou *n* par le moyen du rapporteur; & on a un angle *m*CB, égal à l'angle donné: puisque ces deux angles ont pour mesure des arcs égaux.

## PROBLÊME II.

346. *Couper un angle en deux parties égales.* (fig. 22.)

SOLUTION. Du point A, comme centre, décrivez l'arc BC. Ensuite des deux points B & C, pris pour centres, décrivez avec la même ouverture du compas, deux arcs qui se coupent en un point comme D. Enfin tirez une ligne droite, du point A au point D: elle coupera l'angle en deux parties égales. Car la ligne AD a chacun de ses points, séparément pris, également éloigné du point B & du point C (320): donc le point N de cette ligne qui passe dans l'arc coupé, est également éloigné du point C & du point B: donc

l'arc eſt coupé par cette ligne en deux parties égales : donc l'angle BAC, dont cet arc eſt la meſure, eſt auſſi coupé en deux parties égales.

## THÉORÊME III.

347. *On ne peut tirer qu'une ſeule perpendiculaire, d'un même point, ſur une ligne donnée.* (fig. 25.)

DÉMONSTRATION. Soit la ligne DC, perpendiculaire à la ligne AB. Si du point D, on pouvoit tirer une ſeconde perpendiculaire ſur la ligne AB; il faudroit que cette nouvelle perpendiculaire paſſât ou à droite ou à gauche de la perpendiculaire tirée DC : & alors elle tomberoit ſur la ligne AB, en penchant d'un côté ou de l'autre ſur cette ligne, ou en ne formant pas deux angles droits ſur cette ligne : ce qui eſt contre l'eſſence de la perpendiculaire (329 & 342). Donc d'un même point, on ne peut tirer qu'une ſeule perpendiculaire ſur une ligne donnée. C. Q. F. D.

## THÉORÊME IV.

348. *La perpendiculaire eſt plus courte que l'oblique tirée du même point ſur la même ligne.* (fig. 24.)

DÉMONSTRATION. Soit la ligne CD, perpendiculaire ſur la ligne AB : je dis que la ligne CD eſt plus courte que la ligne CB. Pour le démontrer, il faut prolonger la perpendiculaire juſqu'au point H, enſorte que HD ſoit égal à CD; & tirer l'oblique HB, égale à l'autre oblique CB.

Cela poſé, je raiſonne ainſi. La ligne droite CDH eſt plus courte que la ligne briſée CBH (305) : donc la moitié de la ligne droite, eſt plus courte que la moitié de la ligne briſée : donc la perpendiculaire eſt plus courte que l'oblique. Ce que nous avons dit de

l'oblique CB, on peut le dire de toute autre oblique CN plus ou moins éloignée de la perpendiculaire. C. Q. F. D.

349. Corollaire I. *La perpendiculaire est la ligne la plus courte qu'on puisse mener d'un point donné, sur une ligne, prolongée s'il le faut:* puisqu'elle est plus courte que toutes les obliques quelconques.

350. Corollaire II. *De toutes les obliques, tirées d'un même point sur une ligne donnée, la plus éloignée de la perpendiculaire, est la plus longue.* L'oblique CA est plus longue que l'oblique CN. (*fig.* 24.)

351. Définition. On nomme *éloignement de perpendicule*, la partie DN ou DA ou DB d'une ligne, qui se trouve comprise entre la perpendiculaire CD & une oblique.

352. Corollaire III. *Si deux obliques* CA *&* CB, *tirées d'un même point* C, *ont le même éloignement de perpendicule; elles sont également inclinées sur la ligne* AB: *& si elles sont également inclinées sur la ligne* AB, *elles ont le même éloignement de perpendicule.*

La raison en est évidente, par la preuve de superposition. Car renversez par la pensée, la ligne BD sur la ligne DA: Si BD = DA; le point B tombera sur le point A: tous les points de la ligne coudée DBC, tomberont sur les points correspondans de la ligne coudée DAC.

## Théorème V.

353. *Une droite est perpendiculaire à une autre droite, quand deux points quelconques de la premiere sont chacun également éloignés de deux points quelconques de la seconde.* (fig. 24.)

Démonstration. I°. Si la ligne CD a deux points quelconques C & D, qui soient chacun également

éloignés de A & de B; il eſt clair que les deux points C & D ne penchent pas plus vers A que vers B; & que comme deux points ſuffiſent pour déterminer la poſition d'une ligne droite (306), toute la droite CDH, indéfiniment prolongée, ne penche pas plus vers A que vers B : de ſorte que *ſi la droite* CD *étoit prolongée à l'infini, elle paſſeroit par tous les points également éloignés de* A *& de* B. (320.)

II°. Une ligne oblique quelconque CB ne peut jamais avoir deux points également éloignés de deux points quelconques de la ligne AB. Car il eſt évident par la ſeule inſpection de la figure, que ſi dans la ligne CB, le point C eſt également éloigné de A & de B, les points ſuivans *m* ne peuvent plus être dans le même cas. Donc une ligne droite, qui a deux de ſes points chacun également éloignés de deux points d'une autre ligne, n'eſt point oblique : donc elle eſt perpendiculaire. C. Q. F. D.

## PROBLÊME III.

354. *D'un point quelconque* C *donné dans une ligne, elever ou tirer une perpendiculaire ſur cette ligne.* (fig. 25.)

SOLUTION. Du point C, comme centre, décrivez une demi-circonférence qui coupe la ligne AB en deux points E & F; & de ces deux points pris pour centres, décrivez avec une même ouverture du compas, des arcs qui ſe coupent en un point tel que D. Enſuite tirez une ligne droite qui paſſe par le point donné C, & par le point d'interſection des deux arcs D : elle ſera perpendiculaire à la ligne donnée.

Il eſt évident que la ligne tirée DC, eſt perpendiculaire à la ligne donnée AB : puiſqu'elle a deux points (ſavoir le point donné & le point d'interſection), également diſtans des deux points E & F de la ligne

donnée. Par conséquent tous les autres points de la ligne tirée DC, sont également distans des deux points E & F de la ligne donnée (320) : par conséquent encore, la ligne CD est perpendiculaire à la ligne donnée AB. (353.)

### PROBLÊME IV.

355. *D'un point quelconque* C *donné hors d'une ligne, abaisser ou tirer une perpendiculaire sur cette ligne.* (fig. 26.)

SOLUTION. Du point C, comme centre, décrivez un arc qui coupe la ligne donnée en deux points, tels que E & F. Ensuite du point E & du point F, décrivez de la même ouverture du compas, deux arcs qui se coupent en un point tel que D. Enfin tirez une ligne droite DC, qui passe par le point donné & par le point d'intersection des deux arcs : elle sera perpendiculaire à la ligne donnée; puisqu'elle a deux points également éloignés du point E & du point F de la ligne donnée. (353.)

Si la ligne donnée NE étoit trop courte pour être coupée en deux points, par l'arc que nous avons dit de tirer ; il faut la prolonger de telle sorte qu'elle puisse être coupée en deux points E & F.

### *LIGNES PARALLELES.*

356. AXIOME. *Quand deux lignes sont paralleles entre elles ; si une troisieme ligne est parallele à l'une des deux, elle le sera aussi à l'autre.* Car cette troisieme ligne N*n* ne peut être par-tout également éloignée de l'une des deux paralleles H*h* & D*d*, qu'elle ne soit aussi par-tout également éloignée de l'autre. (*fig.* 28.)

357. REMARQUE. Nous appellerons ici *sécante*, une ligne soit perpendiculaire, soit oblique, qui coupe

des paralleles : EF eſt une ſécante. (*fig.* 27.)

La ſécante forme avec les paralleles, pluſieurs angles qu'il faut remarquer. Les uns ſont entre les paralleles ; on les nomme *angles internes :* tels ſont les angles A, B, C, D. Les autres ſont hors des paralleles ; on les nomme *angles externes :* tels ſont les angles G, H, au-deſſus ; & les angles O, P, au-deſſous des paralleles.

En comparant les angles ſoit internes, ſoit externes, deux à deux ; il y en a qu'on appelle *alternes :* ce ſont ceux dont l'un eſt dans la partie ſupérieure & l'autre dans l'inférieure, l'un à droite & l'autre à gauche de la ſécante. Par exemple, Les angles A, D, ſont *alternes-internes*, auſſi-bien que les deux autres B, C. Pareillement les deux angles H, O, ſont *alternes-externes*, de même que les deux autres G, P.

## THÉORÊME I.

358. *Deux angles formés par deux paralleles, dont l'un eſt externe & l'autre interne du même côté de la ſécante, & qui ſont ou tous les deux au-deſſus, ou tous les deux au-deſſous des paralleles, ſont égaux.* (fig. 27.)

DÉMONSTRATION. I°. La grandeur des angles dépend de leur l'ouverture ; & leur ouverture, de l'inclinaiſon des lignes qui les forment. Or il eſt clair que les lignes IL & MN ont néceſſairement dans le même ſens & du même côté, une même inclinaiſon ſur la ſécante EF : puiſqu'elles ſont paralleles. Donc l'ouverture ou l'inclinaiſon de ces lignes eſt égale en H & en D ; en G & en C ; en B & en P ; en A & en O. Mais ces ouvertures ſont les angles énoncés dans le théorême : donc ces angles ſont égaux.

II°. On peut encore démontrer & rendre ſenſible la vérité de ce théorême par la *preuve de ſuperpoſition* (10), en cette maniere. Concevez que la ligne MN,

reſtant toujours parallele à elle-même, coule le long de la ſécante, juſqu'à ce qu'elle ſe trouve placée toute entiere ſur ſa parallele IL. Alors l'angle D ſe confondra avec l'angle H; l'angle P, avec l'angle B; l'angle C, avec l'angle G; l'angle O, avec l'angle A. Donc ces angles ſont reſpectivement égaux avant la ſuperpoſition : puiſqu'ils le ſont dans la ſuperpoſition qui ne change en rien la poſition des lignes qui les forment. C. Q. F. D.

### THÉORÊME II.

359. *Si deux lignes paralleles ſont coupées par une ſécante : 1°. les angles alternes-internes ſont égaux. 2°. Les angles alternes-externes ſont égaux. 3°. Les deux angles internes du même côté de la ſécante, pris enſemble, valent deux angles droits.* (fig. 27.)

DÉMONSTRATION. Soient les deux paralleles IL, & MN, coupées par la ſécante EF.

I°. Les angles *alternes-internes* A & D, ſont égaux. Car l'angle A eſt égal à l'angle H : parce qu'ils ſont oppoſés au ſommet (343). L'angle D eſt auſſi égal à l'angle H : puiſqu'ils ont la même ouverture formée par l'égale inclinaiſon des deux paralleles ſur la ſécante (358). On démontre de même que les deux alternes-internes B, C, ſont égaux : parce que chacun d'eux eſt égal à l'angle G.

II°. Les angles *alternes-externes* G, P, ſont égaux. Car l'angle G, eſt égal à l'angle B : parce qu'ils ſont oppoſés au ſommet. L'angle P eſt auſſi égal à l'angle B : puiſqu'ils ſont formés l'un & l'autre par la même inclinaiſon des paralleles ſur la ſécante. On prouve de même que les deux angles alternes-externes H, O, ſont égaux : parce que chacun d'eux eſt égal à l'angle A.

III°. Les *deux angles internes* B & D, du même côté de la ſécante, valent enſemble deux angles droits.

Car les deux angles collatéraux H, B, pris ensemble valent deux angles droits (342) : donc si à la place de l'angle H, on prend l'angle D qui lui est égal ; la somme des angles B, D, vaudra aussi deux angles droits. On fait voir de la même maniere, que les deux angles internes A, C, valent ensemble deux angles droits : parce que les deux angles G, A, valent deux angles droits. C. Q. F. D.

## THÉORÊME III.

360. *Deux lignes sont paralleles, si les angles alternes-internes sont égaux.* (fig. 27.)

DÉMONSTRATION. Soit l'angle A, égal à l'angle D; par la supposition. Je démontre que les deux lignes IL, MN, sont paralleles. L'angle A est égal à l'angle H : puisqu'ils sont apposés au sommet. L'angle H & l'angle D sont égaux : puisqu'ils sont égaux chacun à un troisieme, qui est l'angle A.

Or l'angle D & l'angle H ne peuvent être égaux, sans que les lignes IL & MN soient paralleles. Car si l'une de ces deux lignes étoit plus ou moins inclinée que l'autre sur la sécante ; les angles D & H qu'elles forment sur cette sécante, du côté du point E, seroient nécessairement inégaux. Or, on vient de démontrer que l'angle H & l'angle D sont égaux : donc les deux lignes IL & MN sont également inclinées sur la sécante : donc elles sont paralleles. C. Q. F. D.

361. REMARQUE. On pourroit démontrer de même, que *si les angles alternes-externes sont égaux, ou si les deux angles internes du même côté de la sécante valent deux angles droits, les lignes sont paralleles.* La démonstration est précisément la même que la précédente.

## THÉORÊME IV.

362. *Lorsque deux ou plusieurs paralleles coupent ou*

*touchent une circonférence ; les arcs compris de part & d'autre entre les paralleles, sont égaux.* (fig. 28.)

DÉMONSTRATION. Les paralleles étant par-tout également éloignées l'une de l'autre ; l'arc qu'elles embrassent d'un côté, doit être nécessairement égal à l'ac qu'elles embrassent de l'autre. Pour mieux sentir cette vérité ; du centre du cercle, tirez sur les trois paralleles la perpendiculaire AB, qui passe par le centre : renversez ensuite par la pensée la partie des paralleles qui est à la droite, sur la partie des mêmes paralleles qui est à la gauche de la perpendiculaire. Vous concevez que les arcs AD & DN qui sont à la droite, seront placés sur les arcs A *d* & *dn* qui sont à la gauche : donc AD = A *d* ; donc DN = D *n* ; donc NB = N *b* ; & ainsi du reste. C. Q. F. D.

## PROBLÊME.

363. *Par un point quelconque donné* C, *tirer une parallele à une ligne donnée* AB. (fig. 29.)

SOLUTION. Du point C, & avec une ouverture du compas prise à discrétion, tirez l'arc indéfini BD. Ensuite du point B, & avec la même ouverture du compas, décrivez l'autre arc AC ; & prenez avec le compas, sur le premier arc qui est indéfini, une partie BD égale à AC. Enfin tirez une ligne droite CD, qui passe par les deux points C & D : elle sera parallele à AB.

La raison en est évidente. Car ayant tiré la ligne CB, vous trouverez que les angles alternes ABC & BCD sont égaux : puisqu'ils ont pour mesure les arcs égaux AC & BD. Or deux lignes sont paralleles, quand les angles alternes-internes sont égaux (360) : donc les deux lignes AB & CD sont paralleles. C. Q. F. D.

364. REMARQUE. L'*équerre est un instrument de*

l'étui de mathématiques, composé de deux regles perpendiculaires l'une à l'autre. Cet instrument ABC sert à tirer des perpendiculaires & des paralleles à une ligne donnée. (*fig.* 8.)

I°. Pour *tirer, par le moyen de l'équerre, une perpendiculaire sur une ligne donnée;* placez une des regles de l'équerre le long de tous les points de la ligne donnée BN; ensorte que l'autre regle aboutisse au point A, d'où vous voulez mener la perpendiculaire. Ensuite tirez une ligne BM dans la direction de la regle AB qui est perpendiculaire à la premiere : cette ligne sera la perpendiculaire cherchée, formant deux angles droits sur la ligne donnée BN.

II°. Pour *tirer une parallele à une ligne donnée;* élevez comme on vient de dire, une perpendiculaire sur cette ligne donnée BN. Ensuite placez une des regles de l'équerre le long de cette perpendiculaire BM; & tirez une ligne dans la direction AO de l'autre regle de l'équerre parallele à la ligne donnée : cette ligne AO sera la parallele cherchée; puisque ces deux lignes AO & BN forment sur leur perpendiculaire commune AB, deux angles droits.

## PARAGRAPHE SECOND.

### *L'ANGLE A LA CIRCONFÉRENCE.*

365. DÉFINITION. L'ANGLE qui a son sommet au centre d'une circonférence, & qui est formé par deux rayons du cercle, s'appelle *angle au centre :* il a pour mesure l'arc compris entre ses côtés. (336.)

L'angle qui a son sommet appuyé à la circonférence d'un cercle, & qui est formé par deux cordes, s'appelle *angle inscrit*, ou *angle du segment :* nous allons apprendre à le mesurer.

THÉORÈME

THÉORÊME FONDAMENTAL.

366. *L'angle inſcrit qui a ſon ſommet à la circonférence d'un cercle, & qui eſt formé par deux cordes, a pour meſure la moitié de l'arc compris entre ſes côtés.*

DÉMONSTRATION. Il peut arriver, ou qu'un des côtés de l'angle inſcrit paſſe par le centre; ou que le centre ſoit entre les deux côtés; ou que le centre ſoit hors des deux côtés. Dans tous ces trois cas, que nous allons démontrer ſéparément, l'angle inſcrit a pour meſure la moitié de l'arc compris entre ſes côtés. (*fig.* 30.)

I°. *Si le côté* AB *de l'angle inſcrit* BAD, *paſſe par le centre* C; tirez par ce centre, la ligne EF, parallele à l'autre côté AD (363). Vous aurez les deux angles BCF & BAD égaux: parce que les lignes EF & AD ſont paralleles; & que ces deux angles ſont du même côté de la ſécante AB, le premier extérieur & l'autre intérieur (358). Or l'angle BCF ayant ſon ſommet au centre, a pour meſure l'arc BF compris entre ſes côtés (336): donc l'angle BAD qui lui eſt égal, a auſſi pour meſure le même arc BF.

Il reſte à faire voir que cet arc BF, eſt la moitié de BFD; & voici comment je le démontre. L'arc BF eſt égal à l'arc AE: parce que ces deux arcs ſont la meſure de deux angles égaux BCF & ACE, qui ſont oppoſés au ſommet (336). Pareillement l'arc DF eſt égal au même arc AE: puiſqu'ils ſont compris entre deux paralleles EF, AD (362). Donc les deux arcs BF & DF ſont égaux: donc ils ſont chacun la moitié de l'arc entier BFD. Or on vient de démontrer que l'arc BF, eſt la meſure de l'angle BAD: donc cet angle BAD, a pour meſure la moitié de l'arc ſur lequel il eſt appuyé. Ainſi BAD $=$ CA$d$ $=$ BCF.

II°. (fig. 31.) *Si le centre eſt entre les deux côtés de l'angle* BAD; tirez du ſommet A, une ligne AF qui

passe par le centre C : elle divisera l'angle BAD en deux autres, savoir, BAF & FAD. Or le premier de ces angles, a pour mesure la moitié de l'arc BF : à cause de son côté AF, qui passe par le centre ; comme on vient de le démontrer dans le cas précédent. Par la même raison, l'autre angle FAD, a pour mesure la moitié de l'arc FD. Donc l'angle total BAD, a pour mesure la moitié de BF & la moitié de FD ; c'est-à-dire, la moitié de l'arc BD compris entre ses côtés.

III°. (fig. 32.) *Si le centre est hors de l'angle & des deux côtés ;* il faut tirer du sommet une ligne AF, qui passe par le centre. Cette ligne formera l'angle DAF, qui a pour mesure la moitié de l'arc FD ; ou la moitié de l'arc FB, avec la moitié de l'arc BD : comme il a été démontré dans le premier cas. Or l'angle FAB, qui est une partie de l'angle total DAF, a pour mesure la moitié de l'arc FB : à cause du côté AF qui passe par le centre. Par conséquent l'angle BAD, qui est l'autre partie de l'angle total, a pour mesure la moitié de BD : sans quoi l'angle total DAF n'auroit pas pour mesure la moitié de l'arc FB, plus la moitié de l'arc BD. Donc dans tous les cas possibles, l'angle inscrit a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés. C. Q. F. D.

### *Divers Corollaires.*

367. COROLLAIRE I. *L'angle au centre, appuyé sur le même arc que l'angle inscrit, est le double de cet angle inscrit.* (fig. 33.)

DÉMONSTRATION. La seule inspection de la figure fait voir & sentir que l'angle C est de beaucoup plus grand que l'angle A : puisque le premier a visiblement une beaucoup plus grande ouverture, que le second. L'angle BCD est deux fois plus grand que l'angle BAD : parce que l'angle qui a son sommet au

centre, a pour mesure l'arc entier BD, sur lequel il est appuyé; au lieu que l'angle qui a son sommet à la circonférence, n'a pour mesure que la moitié de ce même arc. C. Q. F. D.

368. COROLLAIRE II. *Un angle inscrit, qui est appuyé sur les deux extrémités du diametre, est droit.* (fig. 34.)

DÉMONSTRATION. L'angle BAD ne peut être appuyé sur le diametre BD, qu'il ne le soit aussi sur la demi-circonférence. Or, tout angle inscrit, appuyé sur la demi circonférence est droit: parce qu'il a pour mesure la moitié de la demi-circonférence, ou le quart de la circonférence. C. Q. F. D.

369. COROLLAIRE III. *L'angle inscrit* BAE, *appuyé sur un arc plus grand que la demi-circonférence, est obtus;* & au contraire, *l'angle* BAF, *appuyé sur un arc moindre que la demi circonférence, est aigu.* C'est une suite évidente de ce que nous venons de dire & de démontrer sur tout cet objet. (*fig.* 35.)

## *LA TANGENTE AU CERCLE.*

370. HYPOTHESE. Que la corde AB, restant toujours perpendiculaire au rayon CD, vienne à descendre parallélement à elle-même jusqu'à l'extrêmité D du rayon, & qu'elle devienne la ligne FE; ce sera une *tangente* DE, ou DF, ou FDE. Il en sera de même, si la tangente, au lieu d'être placée à l'extrêmité du rayon CD, est placée à l'extrêmité d'un autre rayon quelconque. (*fig.* 36.)

## *DIVERS COROLLAIRES.*

371. COROLLAIRE I. *La tangente est perpendiculaire à l'extrêmité du rayon:* puisque par l'hypothese, elle ne penche pas plus d'un côté que d'un autre sur le rayon.

372. COROLLAIRE II. *La tangente ne touche le cercle qu'en un seul point.* (*fig.* 36.)

DÉMONSTRATION. Soient menées du centre C, les deux lignes C*a*, C*b*: ces deux lignes seront obliques sur la tangente FE. Donc ces deux lignes seront plus longues que le rayon, qui est perpendiculaire sur la tangente (348). Donc ces deux obliques ont leur extrêmité *b* & *a* hors de la circonférence du cercle: puisqu'elles sont plus longues que le rayon, dont elles sont partie, & qui se termine à la circonférence. Donc la tangente, qui touche l'extrêmité de ces obliques C*a* & C*b*, ne touche point la circonférence; qui est au-delà de l'extrêmité de ces obliques, à quelque proximité du rayon qu'on les suppose.

On peut dire la même chose, de tout autre point de la circonférence, placé plus près du point D: donc la tangente ne touche la circonférence qu'au point B, & par conséquent qu'en un seul point. C. Q. F. D.

373. COROLLAIRE III. *Une sphere ne touche un plan que dans un point.* (fig. 86.)

DÉMONSTRATION. Comme une tangente ne touche un cercle que dans un point; si la tangente RO est supposée faire une révolution autour de l'axe PR, restant toujours tangente; elle décrira le plan RQR sur lequel porte le cercle PARB: & si ce même cercle est supposé faire une révolution sur son axe PR, axe toujours perpendiculaire au plan, il décrira *une sphere* qui ne touchera ce plan OQR qu'en un point; savoir, au point R, où le cercle mobile est touché par la tangente. C. Q. F. D.

374. COROLLAIRE IV. *La tangente n'entre point dans le cercle*: puisque par l'hypothese & selon la définition (370), elle touche le dernier point du rayon, sans pénétrer dans le cercle qui est terminé par ce dernier point D du rayon. (*fig.* 36.)

375. COROLLAIRE V. *Entre le cercle & la tangente à ce cercle, on peut faire passer une infinité de lignes courbes différentes.* (fig. 23.)

DÉMONSTRATION. I°. Soit le rayon CD, perpendiculaire à la tangente AB : cette tangente ne touche le cercle DMD, qu'au point D. Il y a donc un espace entre la tangente, & tout autre point quelconque qui termine ce cercle; par exemple, entre la tangente & les points *a* & *b*.

II°. Si d'un point M du rayon DC prolongé, avec un rayon MD, on décrit un nouveau cercle *m*D*m*; la ligne AB sera encore tangente à ce cercle, & ne le touchera qu'en un seul point D. Il y aura donc encore un espace entre la tangente AB, & tout autre point que le point D du cercle *m*D*m*.

III°. Si d'un autre point N du même rayon prolongé, avec un rayon ND, on décrit un nouveau cercle *n*D*n*; la ligne AB sera encore tangente à ce cercle, & ne le touchera qu'en un seul point D : tous les autres rayons de ce cercle étant trop courts pour atteindre cette tangente.

IV°. Si on prolonge à l'infini le rayon DC, & que de chaque point de la ligne DR infiniment prolongée, avec un rayon toujours terminé en D, on décrive une circonférence de cercle; chaque circonférence *r*D*r*, sera différente; puisqu'elle aura une différente courbure : chaque circonférence passera sur des points différens de l'espace; puisque le point qui la formera par sa révolution, aura une origine & une marche différente : chaque circonférence passera cependant entre la tangente AB & le cercle DMD; puisqu'elles auront toutes pour rayon, le rayon DC prolongé. Donc une infinité de circonférences passeront entre la tangente AB & le cercle DMD, sans se toucher entr'elles qu'en un seul point D qui leur est commun

à toutes ; tous leurs autres points $m$, $n$ $r$, étant nécessairement différens. Donc entre le cercle & la tangente à ce cercle, peuvent passer une infinité de courbes différentes. Donc entre le cercle & la tangente, il y a une infinité de points différens, capables de recevoir cette infinité de lignes différentes. C. Q. F. D.

## THÉORÊME.

376. *Un angle du segment, formé par une tangente & par une corde, a pour mesure la moitié de l'arc soutenu par cette corde.* (fig. 37.)

DÉMONSTRATION. I°. Soit l'angle BAD : tirez la ligne DE, parallele à la tangente AB (363). Je démontre que cet angle BAD, a pour mesure la moitié de l'arc AFD.

L'angle BAD est égal à l'angle ADE : puisqu'ils sont alternes-internes entre deux paralleles AB, DE (358). Or l'angle ADE a pour mesure la moitié de l'arc EHA, compris entre ses côtés : puisque c'est un angle inscrit (366). Donc l'angle BAD, qui est égal à l'angle ADE, a aussi pour mesure la moitié de cet arc EHA ; ou la moitié de l'arc AFD qui lui est égal, parce que l'un & l'autre sont compris entre deux paralleles. (362.)

II°. Si l'angle formé par la tangente & par la corde, étoit l'angle BAG, plus grand qu'un angle droit ; il faut d'abord tirer la ligne AD. L'angle BAD a pour mesure la moitié de l'arc AFD ; comme on vient de le démontrer. L'angle DAG a pour mesure la moitié de l'arc DG : puisque c'est un angle inscrit. Donc l'angle total BAG, égal à ses deux parties prises ensemble, a pour mesure la moitié de l'arc total AFDG. Donc un angle formé par une tangente & par une corde, a toujours pour mesure la moitié de l'arc que soutient cette corde. C. Q. F. D.

## PROBLÊME I.

377. *D'un point donné* B, *dans la circonférence, tirer une tangente.* (fig. 38.)

SOLUTION. Tirez un rayon CB, au point B : ensuite élevez sur l'extrêmité de ce rayon une perpendiculaire AB (354) : elle sera tangente au point B. (371.)

## PROBLÊME II.

378. *D'un point donné* A, *hors de la circonférence, tirer une tangente.* (fig. 38.)

SOLUTION. Du point A, tirez une ligne droite AC, au centre du cercle ; & coupez cette ligne par le milieu, que je suppose être le point N. Après quoi, du point N comme centre, & de l'intervalle AN, décrivez une circonférence : cette circonférence coupera la première en deux points B & *b*. Si du point A on tire une ligne droite à un des points d'intersection, telle que la ligne AB ; elle sera tangente au cercle donné.

La raison en est, que si on tire le rayon CB au point d'intersection ; on aura l'angle ABC, appuyé sur le diametre AC du cercle qu'on vient de décrire. Cet angle B est droit : puisque c'est un angle inscrit, appuyé sur le diametre (368). Donc la ligne AB est perpendiculaire sur l'extrêmité du rayon CB : donc elle est tangente (371). On peut dire la même chose de la ligne A*b*.

# ARTICLE TROISIEME.

## *RÉUNION DES LIGNES EN FIGURES.*

379. DÉFINITION. Les lignes, par leur réunion, forment les figures. On appelle *figure en général*, un espace renfermé de tout côté par des lignes droites ou courbes ; ou l'ensemble des lignes qui renferment & terminent un espace.

Une figure est formée au moins par trois lignes ; elle peut en avoir un nombre plus grand à l'infini. Le triangle rectiligne n'a que trois lignes ; le quadrilatere en a quatre ; le pentagone, cinq ; le dodécagone, douze ; le polygone en général, plusieurs ; le cercle, une infinité.

De toutes les figures géométriques, nous ne considérerons ici que le *triangle rectiligne :* parce que nous n'aurons besoin que de la connoissance de cette sorte de triangle, dans la Longimétrie. La nature & l'égalité des triangles rectilignes, tel est l'objet de cet article.

### *NATURE DES TRIANGLES.*

380. DÉFINITION I. Dans tout triangle, il y a trois côtés & trois angles, d'où dépend la connoissance du triangle. (*fig.* 39 & 44.)

I°. Un des côtés du triangle indifféremment, se nomme la *base du triangle.* Dans le triangle ABC, on peut prendre pour base, ou le côté AB, ou le côté AC, ou le côté BC : on prend ordinairement pour base le côté inférieur AB. L'espace compris entre les trois côtés du triangle, se nomme *aire du triangle.*

II°. La ligne perpendiculaire, qu'on mene de la pointe ou du *sommet* d'un angle sur la base opposée,

prolongée s'il le faut, se nomme la *hauteur du triangle.* Le sommet de l'angle opposé au côté que l'on prend pour base, est le *sommet du triangle.* Une perpendiculaire, menée du point C sur la base AB, sera la hauteur de ce triangle. Si on considere le côté BC comme base, une perpendiculaire menée du point A sur le côté BC, sera aussi la hauteur de ce triangle.

Quand cette perpendiculaire tombe hors de la base, on prolonge cette base jusqu'à la rencontre de la perpendiculaire. Par exemple, AD est la hauteur du triangle ACB. (*fig.* 52.)

III°. Le triangle peut être considéré, ou par rapport à ses côtés, ou par rapport à ses angles. De-là les définitions suivantes.

381. DÉFINITION II. Si on considere le triangle par rapport à ses côtés; il y en a de trois sortes. Car ou ses trois côtés sont égaux, & on l'appelle *triangle équilatéral:* ou il n'a que deux côtés égaux, & on l'appelle *triangle isoscele:* ou bien ses trois côtés sont inégaux, & on l'appelle *triangle scalene.*

382. DÉFINITION III. Lorsque le triangle est considéré par rapport aux angles; on en distingue encore de trois sortes: le *triangle rectangle*, qui a un angle droit: le *triangle obtus-angle*, qui a un angle obtus: le *triangle acut-angle*, qui a tous ses angles aigus. (*fig.* 16.)

383. DÉFINITION IV. On appelle *triangles semblables*, deux ou plusieurs triangles, dont les angles correspondans sont égaux chacun à chacun. (*fig.* 45.)

Soient les deux triangles ABC & *abc*, dont nous ne considérons ici que les angles correspondans. Parmi ces angles, si $A = a$, & $B = b$, & $C = c$; ces deux triangles sont semblables.

Si parmi ces angles correspondans, il s'en trouve quelqu'un qui soit plus grand ou plus petit que son correspondant, par exemple, si A est plus grand ou plus petit que *a*; ces deux triangles ne sont point

semblables, & ne peuvent pas être comparés l'un à l'autre.

## THÉORÊME FONDAMENTAL.

384. *Les trois angles d'un triangle quelconque, pris ensemble, sont égaux à deux angles droits, & ont pour mesure la demi-circonférence.* (fig. 39.)

DÉMONSTRATION I. Comme on peut faire passer une circonférence par trois points quelconques (322); tout triangle, comme ABC, peut être conçu inscrit dans un cercle. Alors l'angle A aura pour mesure la moitié de l'arc BC : l'angle B aura pour mesure la moitié de l'arc CA : l'angle C aura pour mesure la moitié de l'arc AB (366). Or ces trois arcs font la circonférence entiere : donc les trois moitiés de ces trois arcs, font la demi-circonférence. Par conséquent les trois angles du triangle, pris ensemble, ont pour mesure la demi-circonférence : ils sont donc égaux à deux angles droits. C. Q. F. D.

DÉMONSTRATION II. Tirez par le point C, une ligne DE, parallele à la base AB (*fig.* 40). Les deux angles alternes $a$ & A, formés par la sécante CA entre les paralleles, seront égaux : pareillement les deux angles alternes $b$ & B, formés par la sécante CB, seront aussi égaux (358). Or les trois angles $n$, $a$, $b$, pris ensemble, sont égaux à deux angles droits : puisqu'ils embrassent une demi-circonférence. Donc si à la place des deux angles $a$ & $b$, on prend les deux autres A & B qui leur sont égaux; les trois angles A, C, B, pris ensemble, valent aussi deux angles droits : puisque $A=a$, $B=b$, $n=C$. On peut faire les deux mêmes démonstrations sur tout triangle possible. C. Q. F. D.

## DIVERS COROLLAIRES.

385. COROLLAIRE I. *L'angle extérieur quelconque d'un triangle, est égal à la somme des deux angles intérieurs de ce même triangle, qui sont le plus éloignés de lui.* Par exemple, l'angle BCF est égal à la somme des angles BAC & ABC; ou $d=a+b$. (*fig.* 42.)

DÉMONSTRATION. Soit l'angle extérieur quelconque BCF, BAN, CBM d'un triangle. Du sommet de l'angle quelconque, décrivez une circonférence sur le côté prolongé. L'angle intérieur quelconque $c$, joint à l'angle extérieur $d$, vaut deux angles droits: puisqu'il a pour mesure une demi-circonférence. L'angle intérieur $c$, joint aux deux autres angles intérieurs $a$ & $b$, vaut aussi deux angles droits: selon le théorême fondamental. Donc l'angle $c$ étant commun à ces deux grandeurs égales; les restes $d$ d'une part, & $a+b$ de l'autre, sont égaux. On peut dire & démontrer la même chose, à l'égard de tout autre angle extérieur du triangle ABC, & de tout autre triangle possible. C. Q. F. D.

386. REMARQUE. On voit par ce corollaire, qu'en mesurant l'angle intérieur quelconque d'un triangle, on aura la mesure de son angle extérieur, lequel devient l'angle d'un autre triangle qu'on a souvent besoin de former ou de supposer tout formé à côté du premier triangle; & réciproquement, qu'en connoissant l'angle extérieur, on trouve l'angle intérieur.

387. COROLLAIRE II. *Dans tout triangle, dès que l'on connoît deux angles, l'on peut facilement connoître & trouver le troisieme angle:* puisque ce troisieme angle inconnu est le supplément à deux angles droits, qui font 180 degrés. Retranchez donc de 180 degrés, la somme des deux angles connus: le reste sera la valeur de l'angle inconnu. (*fig.* 16.)

Par exemple, si les deux angles connus sont l'un

de 25 degrés & 48 minutes, l'autre de 96 degrés & 26 minutes; je prends la ſomme de ces deux angles; & j'ai pour les deux angles connus 122 degrés & 14 minutes, qu'il faut retrancher de 180 degrés.

Comme 180 degrés ſont égaux à 179 degrés + 60 minutes; de 179 degrés + 60 minutes, je ſouſtrais les deux angles connus, dont la ſomme eſt 122 degrés + 14 minutes : le reſte 57 degrés + 46 minutes, eſt la valeur de l'angle inconnu.

| | |
|---|---|
| 179 + | 60. |
| 122 + | 14. |
| 57 + | 46. |

388. COROLLAIRE III. *Un triangle ne peut avoir ni plus d'un angle droit, ni plus d'un angle obtus :* parce que la ſomme de ſes trois angles, qui eſt toujours néceſſairement égale à deux angles droits, ne peut pas être plus grande que deux angles droits. De ſorte que ſi un angle eſt droit ou obtus, les deux autres ſont néceſſairement aigus. (*fig.* 16.)

## THÉORÊME II.

389. Dans un même triangle quelconque, quels que ſoient ſes angles & ſes côtés : (*fig.* 39 & 34.)

I°. *S'il y a des côtés égaux, les angles oppoſés à ces côtés ſont auſſi égaux.*

II°. *S'il y a des angles égaux, les côtés oppoſés à ces angles égaux, ſont auſſi égaux.*

III°. *Si les trois côtés ſont inégaux, le plus grand angle eſt oppoſé au plus grand côté; le plus petit angle eſt oppoſé au plus petit côté; & l'angle moyen eſt oppoſé au côté moyen.*

DÉMONSTRATION. Concevez ce triangle quelconque, inſcrit dans une circonférence; ce qui eſt toujours poſſible : puiſqu'on peut toujours faire paſſer une circonférence par trois points donnés (322). Il eſt évi-

dent que les trois côtés du triangle, seront trois cordes, qui soutiendront trois arcs. Les angles inscrits ayant pour mesure la moitié des arcs qu'ils embrassent; ces angles seront égaux ou inégaux, selon que les cordes qui mesurent ces arcs, seront égales ou inégales. (*fig.* 39.)

Donc, I°. Si le côté AC est égal au côté BC; *l'angle* B *& l'angle* A *sont égaux:* puisqu'ils ont pour mesure des moitiés d'arcs égaux. (366.)

Donc, II°. Si l'angle A & l'angle B sont égaux; *les côtés qui leur sont opposés sont aussi égaux:* puisque ces côtés BC & AC sont des cordes qui mesurent des arcs égaux, & qui par-là même sont égales. (319.)

Donc, III°. (*fig.* 34.) Si l'angle A est le plus grand angle; le côté BD qui lui est opposé, est *le plus grand côté:* puisque c'est une corde qui soutient le plus grand arc.

Si l'angle D est le plus petit angle; le côté AB qui lui est opposé, est *le plus petit côté:* puisque c'est une corde qui soutient le plus petit arc.

Si l'angle B est un angle moins grand que le plus grand, & plus petit que le plus petit; le côté AD qui lui est opposé, *tiendra le même milieu:* puisque ce sera une corde qui soutiendra un arc moins grand que le plus grand, moins petit que le plus petit. C. Q. F. D.

## *ÉGALITÉ DES TRIANGLES.*

390. **DÉFINITION.** Deux triangles sont *égaux en tout*, ou *égaux simplement*; quand les trois angles & les trois côtés du premier, sont égaux aux trois angles & aux trois côtés correspondans du second, chacun à chacun. (*fig.* 41.)

I°. Lorsque deux triangles son égaux en tout, c'est-à-dire, quant à leurs angles & quant à leurs côtés; si on place leurs côtés correspondans ou homologues l'un sur l'autre, on conçoit que ces deux triangles

doivent quadrer en tout, & se confondre l'un avec l'autre.

II°. Dans deux triangles semblables (383), les angles de l'un sont égaux aux angles correspondans de l'autre; aussi bien que dans les triangles égaux en tout; mais dans les triangles semblables, les côtés de l'un ne sont pas égaux aux côtés correspondans de l'autre; comme dans les triangles égaux en tout. (*fig.* 41 & 45.)

III°. Dans deux triangles qui sont égaux ou semblables, on nomme *côtés homologues*, les côtés qui sont opposés à des angles égaux. Par exemple, si les deux triangles ABC & *abc* sont égaux ou semblables; les côtés BC & *bc* sont homologues: les côtés AC & *ac* sont aussi homologues, aussi bien que les côtés AB & *ab*. Homologue; *ejusdem denominationis*: de ὁμός, similis; & de λόγος, sermo.

## THÉORÊME I.

391. *Si un côté quelconque* bc *du triangle* bca, *est égal au côté* BC *du triangle* BCA; *& que les deux angles* b & c *sur le premier côté, soient égaux aux angles* B & C *sur l'autre côté; les deux triangles seront égaux en tout.* (fig. 41.)

DÉMONSTRATION. Concevez le côté *bc*, appliqué sur le côté BC: ces deux côtés étant égaux, il est évident qu'on aura le point *b* sur le point B; le point *c* sur le point C. Or puisque les angles *b* & B sont égaux; le côté *ba* sera posé sur le côté BA. De même le côté *ca* sera appliqué sur le côté CA; parce que les angles *c* & C sont égaux.

Par conséquent les deux côtés *ba* & *ca*, iront se réunir au même point que les deux autres côtés BA & CA: donc les deux triangles conviendront entiérement. Ainsi ils seront parfaitement égaux, ou égaux en tout; c'est-à-dire, quant aux angles, aux côtés & aux espaces. C. Q. F. D.

### THÉORÈME II.

392. *Si deux côtés quelconques* ab *&* ac *d'un triangle, sont égaux aux deux côtés* AB *&* AC *d'un autre triangle ; & que de plus l'angle* a *compris entre les deux premiers côtés, soit égal à l'angle* A *compris entre les deux autres côtés ; les deux triangles seront égaux en tout.* (fig. 41.)

DÉMONSTRATION. Concevez le côté *ab* du premier triangle, appliqué sur le côté AB de l'autre ; ensorte que le point *a* soit sur le point A, & le point *b* sur le point B : il faut évidemment, à cause de l'égalité des deux angles *a* & A, que le côté *a* soit posé sur le côté AC. Dans cette hypothese, le point *c* tombera sur le point C : parce que, selon la supposition, les deux côtés *ab* & *ac* sont égaux aux côtés AB & AC. Par conséquent la base *bc* conviendra avec la base BC ; & les deux triangles conviendront entiérement : donc ils seront égaux en tout. C. Q. F. D.

## ARTICLE QUATRIEME.

### RAPPORT DES LIGNES.

393. OBSERVATION. Les lignes sont des grandeurs ou expriment des grandeurs, qui ont nécessairement des rapports entre elles, & qui peuvent être en proportion : il s'agit ici de la proportion géométrique. Quatre lignes sont en proportion, ou sont proportionnelles entre elles, quand la premiere est à la seconde, comme la troisieme est à la quatrieme. Il y a proportion entre quatre lignes, quand le produit des deux extrêmes est égal au produit des deux moyennes (172) ;

& quand il y a proportion entre quatre lignes, le produit des deux extrêmes eſt égal au produit des deux moyennes. (171.)

## PARAGRAPHE PREMIER.

### *LIGNES PROPORTIONNELLES.*

394. LEMME. SI deux lignes droites quelconques EF & GH, compriſes dans un eſpace parallele ou renfermées entre les paralleles EG & FH, ſont coupées par un nombre quelconque de paralleles MN, *mn* :

I°. *La premiere ſera toujours préciſément coupée en tout autant de parties, que la ſeconde.*

II°. *Si la premiere eſt coupée par la moitié ou par le quart, ou par telle autre partie qu'on voudra; la ſeconde ſera auſſi coupée par la moitié, ou par le quart, ou par telle autre partie correſpondante.* (fig. 43.)

DÉMONSTRATION. I°. Comme l'eſpace intercepté entre les deux paralleles EG, FH, eſt par-tout égal; il eſt évident que l'on ne peut tirer ni plus ni moins de paralleles ſur GH que ſur EF; & que le même nombre de lignes paralleles, d'une infiniment petite largeur égale dans toutes, qui couvriroit tous les points de la ligne EF, couvriroit auſſi tous les points de la ligne GH: puiſque ces deux lignes embraſſent tout l'eſpace intercepté entre les deux paralleles; & que cet eſpace par-tout égal dans ſa hauteur, ne peut pas contenir plus de lignes paralleles dans un endroit que dans un autre.

II°. Si je tire une parallele *mn*, qui prenne ou la moitié ou le quart ou le millieme ou telle autre partie déterminée de la ligne EF; je prendrai, ou la moitié, ou le quart, ou le millieme, ou telle autre partie déterminée de l'eſpace renfermé entre les paralleles EG & FH: puiſque la ligne EF embraſſe tout cet

eſpace;

espace ; & que les paralleles MN & *mn* interceptent essentiellement dans toute leur étendue, un égal espace. Or si je prends la moitié, ou le quart, ou le millieme, ou telle autre partie déterminée de l'espace ; je prendrai aussi la moitié, ou le quart, ou le millieme, ou telle autre partie déterminée de la ligne GH, qui est renfermée & par-tout également inclinée dans ce même espace. C. Q. F. D.

395. REMARQUE. On voit par-là que *si la ligne* EF *est partagée par des divisions égales, par exemple, en quatre parties égales entre elles ; la ligne* GH *sera aussi divisée en quatre parties égales entre elles.* Les divisions de ligne GH, seront chacune plus grandes que les divisions de la ligne EF : parce que GH est plus inclinée, & par-là même plus longue que EF. Mais il n'y aura pas plus de divisions sur l'une, que sur l'autre.

### THÉORÊME FONDAMENTAL.

396. *Lorsque deux lignes, comprises dans un espace parallele, sont autant inclinées que deux autres lignes renfermées dans un autre espace parallele ; les deux premieres sont proportionelles aux deux autres.* (fig. 43.)

DÉMONSTRATION. Soient les deux lignes AB & CD, autant inclinées dans leur espace parallele, que les deux lignes EF & GH dans le leur : ensorte que AB & EF soient également inclinées, & que CD & GH soient aussi également inclinées. Il faut démontrer que AB . EF :: CD . GH ; & *alternando*, que AB . CD :: EF . GH ; & je le démontre ainsi.

I°. La ligne EF & la ligne GH ont nécessairement un rapport entre elles : le rapport qui est entre ces deux lignes entieres, est aussi entre leurs moitiés, entre leurs quarts, entre leurs centiemes, entre leurs milliemes, entre toutes leurs parties semblables (163).

Les parties semblables de la ligne EF & de la ligne GH, sont donc proportionnelles aux deux lignes entieres.

II°. Or la ligne AB & la ligne CD, sont deux lignes égales à ces parties semblables des deux lignes EF & GH. Car placez, par la pensée, la ligne AB sur la ligne EF : ensorte que la base BD s'étende sur la base FH ; & que la parallele supérieure AC prolongée, coupe la ligne GH en un point N. Les deux lignes EF & GH seront coupées par la ligne AC en parties semblables ou proportionnelles. (395.)

III°. Cela posé, je dis : la ligne AB est égale à la partie de la ligne EF sur laquelle AB seroit placée. La ligne CD sera aussi égale à la partie NH qui lui répond ; puisque CD & NH sont renfermées & également inclinées dans le même espace terminé par deux paralleles. Donc les lignes AB & CD sont égales à des parties semblables MF & NH, des deux lignes EF & GH. Ces parties semblables MF & NH sont proportionnelles aux lignes entieres EF & GH : donc AB & CD sont aussi proportionnelles aux lignes entieres EF & GH. Donc AB . CD :: EF . GH ; ou *alternando*, AB . EF :: CD . GH : ce qui signifie que la premiere ligne AB, est à la seconde ligne CD ; comme la troisieme ligne EF est à la quatrieme ligne GH ; ainsi que l'annonce le théorême fondamental : & par conséquent, que trois de ces lignes étant connues, on trouvera l'autre quelconque par une simple regle de trois (177 & 180) ; quelle que soit l'étendue plus ou moins grande indéterminément de l'espace parallele qui renferme & les deux premieres & les deux dernieres lignes. C. Q. F. D.

397. REMARQUES. I°. On voit ici comment les démonstrations mathématiques ont communément la plus grande généralité. En comparant l'une à l'autre les deux lignes également inclinées CD & GH ; on conçoit ou l'on doit concevoir que la même démons-

tration aura lieu, si la premiere ligne CD est de 10 pouces ou de 100 toises, tandis que la seconde ligne GH est de 500 pouces ou de 1000 toises ou immensément plus grande. Quiconque ne voit une démonstration mathématique que dans la figure qui la lui montre gravée, doit renoncer pour toujours aux mathématiques.

II°. La démonstration qu'on vient de donner, a également lieu; soit que les deux lignes AB & EF, se trouvent perpendiculaires dans leurs espaces paralleles; soit qu'elles y soient obliques, pourvu qu'elles le soient également. Elles sont également obliques, quand leurs angles correspondans sont égaux, ou quand ABD = EFH : puisque la grandeur de ces angles égaux leur donne nécessairement une même position sur la ligne BDFH.

III°. Mais il faut avoir soin de comparer toujours deux lignes également inclinées, l'une avec l'autre : ensorte que l'une soit l'antécédent & l'autre le conséquent de la premiere raison; & que les deux autres lignes, qui sont aussi également inclinées, soient l'antécédent & le conséquent de la seconde raison. Dans le théorême, on a comparé la ligne AB à la ligne EF, & non pas à la ligne GH.

Comme ce théorême est la base & le fondement de toute la géométrie, nous en donnerons encore ailleurs une nouvelle démonstration. (495.)

### *DIVERS COROLLAIRES.*

398. COROLLAIRE I. *Si la ligne* AB *est la moitié, le quart, le centieme, le millieme, ou le millionieme de la ligne* EF; *la ligne* CD *sera aussi la moitié, le quart, le centieme, le millieme, ou le millionieme de la ligne* GH. On peut dire la même chose de toute autre partie semblable, de la billionieme, de la trillionieme, & ainsi de suite.

399. COROLLAIRE II. *Le produit des lignes* AB & GH, *est égal au produit des deux autres* EF & CD : parce que les deux premiers sont les extrêmes, & que les deux autres sont les moyens d'une proportion géométrique. (171.)

400. COROLLAIRE III. *Quand un triangle est coupé par une ligne parallele à la base, les deux côtés sont coupés proportionnellement.* (fig. 44.)

DÉMONSTRATION. Soit le triangle ABC : tirez DE parallele à la base. La parallele DE coupe ou le tiers, ou le quart, ou telle autre partie déterminée de l'espace CP, compris entre les deux paralleles AB & FG : donc elle coupe également, ou le tiers, ou le quart, ou telle autre partie déterminée des lignes CA & CB qui occupent cet espace. Par conséquent,

I°. On aura cette proportion, CD . DA :: CE . EB : & *alternando*, CD . CE :: DA . EB : ce qui signifie que la section CD, est à la section CE; comme la section DA est à la section EB.

II°. Puisque CD . DA :: CE . EB ; donc *componendo* (174), CD . CD + DA :: CE . CE + CB; donc en simplifiant, CD . CA :: CE . CB : ce qui signifie que la section CD, est au côté entier CA ; comme la section CE est au côté entier CB. Nous donnerons ailleurs une autre démonstration du même corollaire (496). C. Q. F. D.

## PARAGRAPHE SECOND.

### *TRIANGLES SEMBLABLES.*

401. OBSERVATION. DEUX triangles sont semblables, quand les angles du premier sont égaux aux angles correspondans du second, chacun à chacun : en

telle forte qu'en prenant un côté quelconque *ab* dans un triangle, & en le plaçant fur le côté correfpondant AB de l'autre triangle ; on ait l'angle à gauche égal à l'angle à gauche, & l'angle à droite égal à l'angle à droite. (*fig.* 45.)

Dans deux triangles, quand deux angles de l'un font égaux à deux angles correfpondans de l'autre ; le troifieme angle eft auffi égal dans l'un & dans l'autre triangle : puifque ce troifieme angle eft le fupplément à deux angles droits, ou ce qui manque à deux fommes égales pour faire 180 degrés (387). Ainfi ces deux triangles font femblables.

## THÉORÊME I.

402. *Si deux triangles d'inégale grandeur ont les deux angles fur leur bafe refpectivement égaux ; les deux triangles font femblables* : puifque le troifieme angle, fupplément à deux angles égaux, fera auffi égal dans l'un & dans l'autre triangle ; & que deux triangles font femblables, par la définition (383), quand les trois angles de l'un font égaux aux trois angles correfpondans de l'autre, chacun à chacun. C. Q. F. D.

## THÉORÊME II.

403. *Quand deux triangles font femblables, tous les côtés du premier font proportionnels aux côtés correfpondans du fecond.* (fig. 45.)

DÉMONSTRATION I. Soient les deux triangles femblables *abc* & ABC. Il faut démontrer que le côté *ca*, eft au côté CA ; comme le côté *ab*, eft au côté AB, comme le côté *cb*, eft au côté CB : ce qui donne entre les trois côtés, une proportion continue.

1°. Prenez les côtés *ab* & AB, pour bafes ; & du fommet de chacun des deux triangles, tirez les lignes

*cm* & CM, paralleles aux deux bases. Alors les deux côtés *ac* & *bc* du petit triangle, seront deux lignes autant inclinées dans leur espace parallele, que les deux côtés AC & BC du grand triangle, sont inclinés dans leur espace parallele : puisque la grandeur des angles détermine l'inclinaison des lignes qui les forment. Par conséquent, selon le théorême fondamental (396), on aura *ac*. AC : : *bc*. BC.

II°. Prenez maintenant les côtés *bc* & BC, pour bases; & du sommet de chacun des deux triangles, tirez les lignes *an* & AN, paralleles aux deux bases. Alors les deux côtés *ab* & *ac* du petit triangle, seront deux lignes autant inclinées dans leur espace parallele; que les deux côtés AB & AC sont inclinés dans leur espace parallele : & par le théorême fondamental, on aura *ab*. AB : : *ac*. AC.

III°. Prenez enfin pour bases les côtés *ca* & CA; & ayant tiré par les sommets *b* & B, des paralleles à ces bases, vous démontrerez de la même maniere que *ab*. AB : : *bc*. BC.

IV°. Observez que dans ces trois proportions, il y a toujours une raison commune. Car la premiere raison de la premiere proportion, est la seconde raison de la proportion suivante; & la premiere raison de la deuxieme proportion, est la premiere raison de la troisieme proportion. Donc ces trois raisons sont égales entre elles. (167.)

Par conséquent, on a cette proportion continue; ∺ *ab*. AB. *bc*. BC. *ca*. CA : ce qui signifie que *les trois côtés du petit triangle, sont proportionels aux trois côtés homologues ou correspondans du grand triangle.* On peut faire la même démonstration sur deux autres triangles semblables quelconques. C. Q. F. D.

404. REMARQUE. Ce théorême peut répandre la lumiere la plus sensible sur les rapports des triangles semblables. (*fig.* 45.)

I°. Suppofez d'abord la bafe AB, d'une grande étendue ; par exemple, de 2000 pouces ; & tirez par la penfée, à chaque diftance d'un pouce, des paralleles au côté CB : ces paralleles 1 2, 2 4, 3 6, 4 8, couperont chacune le côté CA, en différens points. De chacun de ces points du côté AC, où aboutiffent les paralleles ; tirez par la penfée d'autres paralleles à la bafe AB : ces nouvelles paralleles 2 3, 4 6, 6 9, 8 12, couperont le côté CB en différens points 3, 6, 9, 12.

II°. Suppofez enfuite pour le petit triangle, la bafe *ab* = 1 pouce, le côté *ca* = 2 pouces, le côté *cb* = 3 pouces : & placez par la penfée le petit triangle fur le grand triangle ; enforte que le point *a* tombe fur le point A, & le point *b* fur le point 1.

III°. Dans cette hypothefe générale ; il eft évident que tandis que la bafe *ab* occupera un pouce fur la bafe AB, le côté *ca* occupera deux pouces fur le côté CA ; & que la premiere parallele à la bafe AB, coupera trois pouces fur le côté CB.

Il eft évident que tandis que la bafe *ab*, portée une feconde fois fur la bafe AB, occupera deux pouces fur cette bafe ; la parallele au côté CB, ou la ligne 2 4, coupera quatre pouces fur le côté CA ; & que la parallele à la bafe, tirée de ce quatrieme pouce fur le côté CB, ou la ligne 4 6, coupera fix pouces fur le côté CB.

Il eft de même évident que tandis que la bafe *ab*, fucceffivement portée fur la bafe AB, occupera cent pouces fur cette bafe AB ; la parallele au côté CB, tirée de ce centieme pouce de la bafe, coupera deux cents pouces fur le côté CA ; & que la parallele à la bafe, tirée de ce deux-centieme pouce du côté CA fur le côté CB, coupera trois cents pouces fur le côté CB : & ainfi de fuite à l'infini. Donc en connoiffant la bafe du grand triangle proportionnel, on mefure & on connoît infailliblemement fes deux côtés.

## THÉORÊME III.

405. *Si les deux côtés d'un petit triangle, sont proportionnels aux deux côtés d'un grand triangle ; & que de plus l'angle compris entre les côtés du petit triangle, soit égal à l'angle compris entre les côtés du grand triangle ; les deux triangles sont semblables.* (fig. 44.)

DÉMONSTRATION. Soient les deux triangles *cde*, CAB. Que les angles *c* & C soient égaux ; & que les côtés qui interceptent ces angles, soient proportionnels. Je démontre que les angles *d* & A, *e* & B, formés sur leurs bases respectives, sont égaux ; & que ces bases sont aussi proportionnelles entre elles, ou que *de*. AB : : *cd*. CA : : *ce*. CB. Pour le démontrer,

I°. Sur la ligne CA je prends par la pensée ou avec le compas, la partie CD égale au côté *cd* du petit triangle ; & je tire la ligne DE, parallele à la base AB. L'angle CDE & l'angle CAB sont égaux (358) : par la même raison, l'angle CED & l'angle CBA sont aussi égaux ; & l'angle DCE est commun aux deux triangles. Donc le triangle CDE & le triangle CAB, dont les trois angles correspondans sont égaux, sont deux triangles semblables. On a par conséquent cette proportion : CD . CE : : CA . CB. (403.)

Donc si le petit triangle *cde* étoit égal en tout au triangle CDE ; le petit triangle *cde* seroit aussi semblable au grand triangle CAB : puisqu'à cause de l'égalité parfaite, on pourroit prendre indifféremment *cde* ou CDE. (11. III°.)

II°. Or je démontre que le triangle *cde* est égal en tout au triangle CDE. Car, . . . . . .

d'abord par l'hypothese . . . *cd* . *ce* : : CA . CB.

ensuite, par ce que l'on vient de démontrer . . . . . . CD . CE : : CA . CB.

Dans ces deux proportions, la seconde raison est la même. Donc les deux premieres raisons, qui sont égales chacune à cette seconde raison, sont égales entre elles (166) : ce qui donne cette nouvelle proportion . . . . . *cd* . *ce* : : CD . CE :
& *alternando*, . . . . . *cd* . CD : : *ce* . CE.

Or le premier antécédent *cd* de cette derniere proportion, a été pris égal à son conséquent CD : donc le second antécédent *ce* doit être aussi égal à son conséquent CE. Donc le côté *cd* étant égal au côté CD; il faut que le côté *ce* soit aussi égal au côté CE; sans quoi, la derniere proportion qu'on vient de démontrer, ne seroit plus une proportion. Donc les deux triangles *cde* & CDE, sont égaux en tout (392) : donc on peut mettre le triagle *cde*, à la place du triangle CDE.

III°. Mais nous avons d'abord démontré que le triangle CDE, est semblable au triangle CAB : donc le triangle *cde*, égal en tout au triangle CDE, est aussi semblable au triangle CAB. Donc le côté quelconque *cd* du petit triangle, est à sa base *de*; comme le côté homologue CA du grand triangle, est à sa base AB : donc les bases *de* & AB sont proportionnelles, aussi bien que les côtés. Donc en mesurant la base du petit triangle, on trouvera par une simple regle de Trois (180), la base du grand triangle; base que souvent on ne peut mesurer en elle-même, étant placée dans une espace inaccessible. C. Q. F. D.

REMARQUE. On peut observer ici, à l'occasion de ce théorême, que *si la ligne* DE, *parallele à la base* AB, *coupe par le milieu le triangle* ACB; *cette ligne* DE *sera la moitié de la base* AB : puisque les deux triangles DCE & ACB, étant semblables (401 & 405); il est clair que la base DE du petit triangle, est à la base AB du grand triangle; comme un côté quelconque CD du petit triangle, est au côté homologue quelconque CA du grand triangle (400 & 403.)

## PARAGRAPHE TROISIEME.

### SECTIONS DANS LE CERCLE.

406. OBSERVATION. Deux lignes peuvent s'entre-couper en différentes manieres dans un cercle; & en s'entre-coupant, elles ont des propriétés fondamentales, qu'il est important d'observer.

Quand une ligne est coupée en deux portions inégales; on nomme *grand segment*, la partie plus grande de la ligne; & *petit segment*, la partie plus petite de la même ligne.

### THÉORÊME I.

407. Dans un cercle quelconque (*fig.* 47):

I°. *Tout diametre ou rayon, qui est perpendiculaire à une corde, coupe cette corde & l'arc soutenu par cette corde, en deux parties égales.*

II°. *Tout diametre ou rayon, qui coupe une corde en deux parties égales, est perpendiculaire à cette corde.*

III°. *Toute ligne perpendiculaire à une corde, & qui la divise en deux parties égales, est diametre ou rayon.*

DÉMONSTRATION. Ce théorême renferme trois parties, dont chacune exige sa démonstration à part.

I°. Le diametre ou le rayon AMC passe par le centre M, qui est également distant des extrêmités D & E de la corde DBE. Donc si ce diametre ou ce rayon *est perpendiculaire à la corde* DE; il faut que tous les autres points de ce diametre ou rayon, soient, ainsi que le point M, également éloignés des points D & E (353). Donc le point B de ce diametre ou rayon, sera également éloigné des extrêmités D & E de la corde: donc on aura BD = BE: donc par la même raison, on aura aussi l'arc CD = CE. (317 & 319.)

II°. Si le diametre ou le rayon AMC *coupe en deux parties égales la corde* DE; le centre M & le point B sont chacun également éloignés des extrêmités D & E de cette corde : comme on vient de l'expliquer & de le démontrer. Donc le diametre ou le rayon AMC, qui a deux points M & B également distans chacun des extrêmités D & E de la corde, est perpendiculaire à cette corde. (353.)

III°. Si la ligne AMC *divise en deux parties égales la corde* DE, & si elle est *perpendiculaire* à cette corde; d'abord le point B est également éloigné des deux points D & E. Ensuite, étant perpendiculaire, elle passe toujours par des points également éloignés de D & de E : donc elle passe par le centre M. Or toute ligne qui passe par le centre d'un cercle, est rayon ou diametre : donc la ligne AMC est rayon ou diametre, C. Q. F. D.

## THÉORÊME II.

408. *Si deux cordes se coupent dans un cercle; les parties de l'une, seront réciproques aux parties de l'autre,* (fig. 46.)

EXPLICATION. En général, deux grandeurs quelconques *a* & *d*, sont réciproques à deux autres grandeurs quelconques *b* & *c*; quand ces quatre grandeurs sont telles, qu'elles peuvent former une proportion géométrique dont les deux premieres *a* & *d* soient, ou les extrêmes, ou les moyens; & dont les deux dernieres *b* & *c* soient, ou les moyens, ou les extrêmes. Ainsi le présent théorême signifie que, quand deux cordes se coupent en parties inégales dans un cercle, les quatre segments (406) donnent toujours une proportion géométrique; proportion dans laquelle les deux parties ou les deux segments d'une même corde quelconque indifféremment, sont, ou les ex-

trêmes, ou les moyens de la proportion. De sorte que les deux segmens d'une corde sont comparés avec les deux segmens d'une autre, non dans l'ordre naturel de leur grandeur, mais dans un ordre renversé : par exemple, le grand segment BE de la premiere corde, est au grand segment DE de la seconde corde ; comme le petit segment EA de la seconde corde, est au petit segment EC de la premiere : ou *a.b::c.d:* & *alternando*, *a.c::b.d;* ou bien, *d.c::b.a;* ou bien encore, *c.a::d.b.*

DÉMONSTRATION. I°. Soient deux cordes quelconques BC & AD, qui se coupent au point E dans un cercle. On aura dans ce cercle, deux triangles EBA, EDC, qui seront semblables (401). Car d'abord, les angles opposés au sommet sont égaux (343). De plus les angles D & B sont aussi égaux : parce qu'ils sont appuyés sur le même arc CA (366). Enfin les angles A & C sont égaux : parce qu'ils sont aussi appuyés sur le même arc DB. Donc les deux triangles sont semblables : donc les côtés homologues de ces triangles, sont proportionnels (403). Donc l'on aura cette proportion, BE.DE::AE.CE, ou *a.b::c.d:* dans laquelle proportion, les parties BE & EC d'une corde, sont réciproques, ou réciproquement proportionnelles, avec les parties DE & EA d'une autre corde.

II°. Soient deux autres cordes quelconques AC & DE, qui se coupent en un point quelconque B (*fig.* 47) :

On aura les deux triangles BEA & BCD, qu'on démontrera de la même maniere être semblables ; & on aura de même cette proportion : le moyen côté AB du premier triangle, est au moyen côté BD du second ; comme le petit côté BE du premier, est au petit côté BC du second ; ou AB.BD::BE.BC : ce qui exprime l'énoncé même du théorême. C.Q.F.D.

409. COROLLAIRE I. *Dans un cercle, si une corde quelconque coupe perpendiculairement le diametre; un segment quelconque de cette corde est une moyenne proportionnelle entre les deux segmens du diametre.* (fig 47.)

DÉMONSTRATION. Soit le diametre AMC, coupé perpendiculairement par une corde quelconque DBE: le segment DB ou EB de cette corde, sera une moyenne proportionnelle géométrique entre les deux segmens BA & BC du diametre. Car, par le théorême précédent, on a cette proportion : AB . BD : : BE . BC. Or la corde DE étant perpendiculaire au diametre, la partie BD est égale à la partie BE (407): donc on peut mettre BD, à la place de BE; & on aura cette proportion : AB . BD : : BD . BC.

410. COROLLAIRE II. *Dans un cercle, une ligne quelconque menée d'un point de la circonférence perpendiculairement sur le diametre, est moyenne proportionnelle entre les deux segmens du diametre.* (fig. 49.)

Car cette perpendiculaire quelconque EG, est la moitié d'une corde perpendiculaire au diametre. Donc, par le théorême & par le corollaire précédens, DG . GE : : GE . GF. C'est ici une propriété fondamentale du cercle, & qu'il faut bien remarquer pour la suite.

## PARAGRAPHE QUATRIEME.

### *PROBLÊMES SUR LES LIGNES.*

### PROBLÊME I.

411. EXPLIQUER *l'usage de la ligne des parties égales.* (fig. 10.)

SOLUTION. On nomme *ligne des parties égales*, ou

simplement *une échelle*, une ligne indéfinie AB, que l'on divise exactement en parties de même grandeur par le moyen du compas. Il y a une ligne des parties égales dans l'étui de mathématiques : les divisions d'un pied-droit peuvent aussi tenir lieu d'une ligne des parties égales. Mais le plus souvent on s'en fait une, selon l'exigence & le besoin.

Par exemple, si je divise exactement la ligne indéfinie AB en portions égales, plus ou moins grandes, 1, 2, 3, 4, 5, & ainsi de suite ; cette ligne AB sera une ligne des parties égales : c'est ce qu'on nomme *échelle*, dans les cartes géographiques. Cette ligne ou cette échelle sert, entre autres choses, pour tracer en petit, les figures qu'on a en grand ; ou pour tracer en grand, les figures qu'on a en petit. Par exemple (*fig.* 10 & 57) :

I°. Si je veux *tracer en petit* un quarré long ou un rectangle de 15 toises de longueur sur 7 toises de largeur ; je pose une pointe du compas sur le point A, & l'autre pointe sur le point 15 de la ligne des parties égales ; & je tire une ligne AD égale à cette ouverture de 15 parties. Je pose ensuite une pointe du compas sur le point A, & l'autre pointe sur le point 7 de la ligne des parties égales ; & je tire sur le papier où je veux construire mon quarré long, une perpendiculaire AB égale à cette ouverture de 7 parties. Ces deux lignes seront la longueur AD & la largeur AB d'un petit rectangle ADCB, semblable au rectangle qu'il falloit réduire en petit.

II°. Si je veux *rendre deux fois plus petites* les deux dimensions AD & AB de ce rectangle, ce qui rendra sa surface quatre fois plus petite, comme nous le ferons voir dans le traité suivant ; je fais de moitié plus petites les divisions de mon échelle 1, 2, 3, 4, 5, & ainsi de suite : & en opérant comme on vient de dire, on aura un rectangle semblable au rectangle ADBC ; mais dont les dimensions seront chacune

deux fois plus petites, & la surface quatre fois plus petite. (*fig.* 57.)

III°. Si je voulois *rendre trois fois plus grandes* les dimensions de ce rectangle, je ferois des divisions trois fois plus grandes dans l'échelle des parties égales; ou bien je prendrois par-tout trois divisions pour une : & en opérant comme auparavant, je formerois un rectangle semblable au rectangle ADCB, mais dont la longueur & la largeur seroient chacune trois fois plus grandes; & la surface, qui est le produit de ces deux dimensions, comme nous le démontrerons bientôt, neuf fois plus grande.

IV°. On peut réduire de même, de grand en petit, ou de petit en grand, toute autre figure qu'un rectangle; par exemple, un triangle, un cercle. Il ne s'agit que de construire des figures semblables : car nous démontrerons dans le traité suivant, que toutes les dimensions des figures semblables, sont proportionnelles. (499.)

Quand la longueur & la largeur des figures à tracer, ne renferme que des grandeurs incomplexes; par exemple, des toises sans pieds & sans pouces, des pieds sans pouces & sans lignes; l'échelle commune, dont nous venons de parler, suffit pour tracer proportionnellement ces figures.

V°. Mais quand l'une des dimensions, ou l'une & l'autre à la fois, renferme des grandeurs hétérogenes, comme des toises & des pieds, on a besoin pour tracer proportionnellement ces figures sans réduire leurs dimensions à la plus petite espece, d'une *échelle différente*; qui donne à la fois, toujours proportionnellement, & les grandeurs homogenes & les grandeurs hétérogenes : c'est ce qu'on nomme l'*échelle géométrique*, ou la *regle géométrique*, dont nous ferons connoître la construction & l'usage dans le cinquieme problême suivant. (*fig.* 50.)

Cette *échelle géométrique* est un instrument de l'étui de mathématiques, dont l'usage consiste à trouver un nombres de parties semblables & proportionnelles aux parties d'une étendue qu'on veut mesurer sur le terrein. Ainsi on doit regarder l'échelle géométrique, comme une regle divisée, par exemple, en 10, en 100, en 1000, en 10000, ou en tel autre nombre de parties; pour juger des plus grandes mesures, par exemple, des toises ou des lieues, avec lesquelles ces parties de l'échelle géométrique ont une proportion connue.

### PROBLÊME II.

412. *Trois lignes étant données, trouver une quatrieme ligne qui soit proportionnelle à ces trois lignes.* (fig. 48.)

EXPLICATION. Ce problême, l'un des problêmes fondamentaux de la géométrie, peut être résolu & en lignes & en nombres. Pour en faciliter & l'application & l'usage, nous allons le résoudre en l'une & en l'autre maniere.

SOLUTION I. Soient données trois lignes quelconques A, B, C: il s'agit de trouver une quatrieme ligne D, qui soit proportionnelle aux trois lignes données; & qui soit ou l'un des extrêmes ou l'un des moyens de la proportion. Pour cela,

I°. Si la *quatrieme proportionnelle* D que l'on cherche, doit être le quatrieme terme de la proportion géométrique; d'un point E, tirez deux lignes EM & EN, qui fassent entre elles tel angle plus ou moins grand qu'il vous plaira. Après quoi, prenez sur l'une de ces deux lignes indifféremment, la partie EF égale à la premiere ligne donnée A; & sur l'autre ligne, la partie EG égale à la seconde ligne donnée B: & menez du point F au point G, la ligne droite FG.

Prenez ensuite sur la ligne EFM prolongée indéfiniment,

ment tant qu'il ſera beſoin, la partie FH, égale à la troiſieme ligne donnée C; & tirez la ligne HK, parallele à la ligne FG (363): la ligne GK ſera la *quatrieme proportionnelle* cherchée D.

Car ſi on ſuppoſe au point E, une parallele aux deux lignes FG & HK; on aura cette proportion géométrique (400), EF . EG :: FH . GK : ou celle-ci qui lui eſt en tout parfaitement égale, A . B :: C . D; puiſque les quatre lignes de la premiere proportion, ſont égales chacune à la ligne correſpondante de la ſeconde proportion. (11 & 168.)

II°. Si parmi les quatre lignes A, B, C, D, la *ligne inconnue* étoit la premiere ligne A; on feroit changer de place aux deux extrêmes, & on auroit cette proportion D . B :: C . A (174). Après quoi, en opérant comme on vient de faire, on trouveroit la *quatrieme proportionnelle* inconnue A.

III°. Si dans la proportion donnée A . B :: C . D, la *ligne inconnue* étoit l'un des moyens, par exemple, la ligne B; on auroit d'abord par les changemens qu'on peut faire dans une proportion ſans la détruire, A . C :: B . D; & enſuite, C . A :: D . B (174). Après quoi, en opérant comme nous avons d'abord fait, on trouveroit *la quatrieme proportionnelle* auparavant inconnue B.

IV°. S'il n'y a que deux lignes données A & B, & que la ligne B ſoit moyenne proportionnelle & doive être miſe deux fois dans la proportion; on aura, A . B :: B . C ou *x*. (*fig.* 49.)

Il eſt clair qu'en opérant comme nous avons d'abord fait, on trouvera l'inconnue *x*, par le moyen des deux lignes données A, B, B; & alors cette inconnue s'appelle *troiſieme proportionnelle*, quoiqu'elle ſoit au fond la quatrieme proportionnelle ou le quatrieme terme de la proportion.

SOLUTION II. Voyez quelle proportion ont entre

elles les trois lignes données, soit en toises, soit en pouces, soit en portions de l'échelle des parties égales (411). Je suppose que la premiere ligne soit = 10 : la seconde = 17 : la troisieme = 24 : nommez la quatrieme inconnue $x$ ; & faites cette proportion : 10. 17 :: 24 . $x$. Multipliez les deux moyens l'un par l'autre, pour en avoir le produit : divisez ce produit par le premier extrême 10, pour en avoir le quotient. Ce quotient $30 + \frac{8}{10}$ exprimera la grandeur de la *quatrieme proportionnelle* qu'on cherchoit.

## PROBLÊME III.

413. *Diviser une ligne donnée en des parties proportionnelles à celles d'une autre ligne donnée.* (fig. 48.)

SOLUTION I. Soit une ligne donnée *en*, qu'il faille diviser en des parties proportionnelles aux divisions faites sur une autre ligne donnée *em*, plus grande ou plus petite que la précédente. Il s'agit de faire sur la *ligne à diviser*, des divisions semblables à celles qui sont données sur la ligne divisée *em* : en telle sorte que si la premiere division donnée est le tiers de la ligne divisée, la premiere division qu'on fera sur la ligne à diviser, soit le tiers de cette ligne ; & ainsi des divisions suivantes dans l'une & dans l'autre ligne. Pour cela,

I°. Posez les deux lignes données sur un plan, & joignez ces deux lignes en E, par leur extrêmité *ee* ; en telle sorte qu'elles forment un angle quelconque MEN : & par leurs deux autres extrêmités *mn*, ou MN, menez la ligne droite MN. Après quoi, par les points de division donnés sur la ligne *em*, menez des paralleles à la ligne MN : ces paralleles FG, HK, formeront sur la ligne à diviser *en*, des divisions semblables ou proportionnelles aux divisions 1 2 donnéés sur la ligne *em*. Car les triangles EFG, EHK, EMN,

étant semblables ; il est clair qu'on a les proportions suivantes, EF . EG : : FH . GK : : HM . KN ; & ainsi de suite. Or dans cette suite de proportions, les antécédens sont les portions de la ligne *em*, dont les divisions sont données ; & les conséquens sont les portions de la *ligne à diviser* : donc les dernieres sont proportionnelles aux premieres.

SOLUTION II. On peut aussi résoudre ce problême en cette autre maniere, qui pour le fond des choses revient à la précédente. Soit BC la ligne à diviser : soit *bc* la ligne donnée & divisée. (*fig.* 91.)

Ayant posé ou mené ces deux lignes parallélement (363) sur un plan ; menez par leurs extrêmités les lignes BA & CA, qui iront se réunir en un point plus ou moins éloigné A. Ensuite de ce point A, tirez des droites par les points de division donnés 1, 2, 3 : ces lignes iront couper proportionnellement la ligne à diviser en *m*, en *n*, en *r*. Car les triangles A*b* 1 & AB*m*, A 1 2 & A*mn*, A 2 3 & A*nr*, étant semblables ; on a d'abord A *b* . *b* 1 : : AB . B*m*. On a ensuite, A1 . 1 2 : : A*m* . *mn* : & ainsi du reste.

Il résulte de cette seconde solution, que *si du sommet d'un triangle quelconque, on mene une ligne droite sur un point quelconque de la base ; toutes les paralleles à la base, seront coupées en parties proportionnelles aux sections faites sur la base.* Par conséquent on aura *b* 1 . B*m* : : 1 2 . *mn* : : 2 *c* . *n*C ; & ainsi du reste des autres sections ou divisions qu'on peut faire.

## PROBLÊME IV.

414. *Deux lignes étant données, trouver une moyenne proportionnelle à ces deux lignes.* ( fig. 49. )

EXPLICATION. Il s'agit dans ce problême, l'un des problêmes fondamentaux de la géométrie, de trouver une grandeur inconnue ; qui étant multipliée par elle-

même, donne un produit égal au produit de deux autres grandeurs données & multipliées l'une par l'autre. Les deux grandeurs données forment les deux extrêmes d'une proportion géométrique : la grandeur inconnue en formera les deux moyens. Ce problême peut toujours se résoudre en lignes, & quelquefois en nombres : nous allons le résoudre en l'une & en l'autre maniere.

SOLUTION I. Soient les deux lignes données A & C : il s'agit de trouver une ligne inconnue B, qui soit *moyenne proportionnelle* entre les deux lignes données ; ensorte qu'on ait cette proportion, A . B :: B . C. Pour cela,

Tirez une ligne indéfinie DF, sur laquelle vous prendrez la partie DG, égale à la ligne donnée A ; & la partie GF, égale à l'autre ligne donnée C. Après quoi, divisez la somme DGF des deux lignes, en deux parties égales, au point M ; & de ce même point M comme centre, & de l'intervalle MD, décrivez un cercle. Ensuite du point G, élevez la perpendiculaire GE, jusqu'à la circonférence : elle sera la *moyenne proportionnelle* cherchée entre A & C ; & si l'on appelle B cette ligne trouvée, on aura A . B :: B . C. C'est une suite évidente du second corollaire précédent. (410.)

SOLUTION II. Après avoir déterminé, soit en toises, soit en pieds, soit en pouces, soit en lignes, la valeur des deux lignes données ; multipliez l'une par l'autre ces deux lignes, qui sont les extrêmes d'une proportion géométrique. Ensuite extrayez la racine quarrée du produit (129) : cette racine quarrée exprimera la ligne cherchée. Par exemple, soit la premiere ligne donnée = 4, la seconde ligne donnée = 25 : le produit de ces deux nombres sera 100, dont la racine quarrée sera 10. Cette racine $10 \times 10 = 100$, donne un produit égal au produit des extrêmes : donc la ligne

= 10 sera *moyenne proportionnelle* entre les deux lignes données.

Si le produit des extrêmes n'est pas un quarré parfait, la racine quarrée qu'on trouvera en nombres, ne sera pas la moyenne proportionnelle parfaitement exacte (130) : mais on approchera, tant qu'on voudra, de la vraie racine quarrée (135), qui est la vraie moyenne proportionnelle que l'on cherche. Dans la pratique, on se dispense de cette trop scrupuleuse précision ; & on se contente d'un à-peu-près, qui est presque toujours suffisant.

## PROBLÊME V.

415. *Construire la regle ou l'échelle géométrique.* (fig. 50.)

SOLUTION. Pour construire l'échelle géométrique, dont nous avons déjà donné ailleurs une idée (411) :

I°. Menez une ligne droite indéfinie ABN ; & prenez sur cette ligne, six parties égales A 6, 6 5, 5 4, 4 3, 3 2, 2 1, à volonté. Vous transporterez ensuite la distance AB, sur toute la longueur de la ligne ABN, autant de fois qu'il vous plaira.

II°. Elevez au point A une perpendiculaire AC, que vous diviserez en douze parties égales prises à volonté, A 1, 1 2, 2 3, 3 4, 4 5, 5 6 ; & ainsi de suite jusqu'à douze.

III°. De chaque point de division faite dans la perpendiculaire AC, menez des paralleles 1 M, 4 S, 9 Z, à la ligne ABN ; & sur la derniere parallele CDR, transportez de C en D, les six parties auxquelles on a divisé la ligne AB.

IV°. Joignez par des lignes droites, la premiere partie à gauche marquée A, avec la seconde à droite marquée 6 : ensuite 6 de la gauche, avec 5 de la droite, & ainsi de suite. Joignez toujours les divisions de la

gauche avec les divisions de la droite, par des *transversales* A 6, 6 5, 5 4, 4 3, 3 2, 2 1.

EXPLICATION. Il est évident que si AB est supposé être une longueur de six pieds ; les portions A 6, ou 6 5, ou 5 4, seront chacune la longueur d'un pied. Mais les portions 1 1, ou 2 2, ou 3 3, des paralleles 4 *x* ou *vr*, comprises entre la perpendiculaire AC & la transversale A *a*, exprimeront des pouces. La portion 1 1 exprimera un pouce : la portion 2 2 exprimera 2 pouces ; & ainsi de suite : de sorte que la derniere portion C 6 exprimera douze pouces ou un pied ; parce que C 6 = A 6, par la construction.

DÉMONSTRATION. Supposant que les six parties égales de la ligne AB, sont six pieds ; il faut démontrer que la portion 1 1, donne 1 pouce : que la portion 2 2, donne deux pouces : que la portion 6 6, donne six pouces ; & ainsi de suite : ce qui est évident. Car les triangles CA *a*, 1 A 1, sont semblables (401 & 413) : donc (403) on aura cette proportion ; A 1. AC :: 1 1. C 6 ou C *a*.

Or par la construction, la portion A 1, n'est que la douzieme partie de la ligne AC : donc le côté 1 1, sera la douzieme partie du côté C *a* : donc puisque le côté C *a* vaut douze pouces, le côté 1 1 vaudra un pouce. On démontre de la même maniere que le côté 2 2, vaut deux pouces ; que le côté 6 6, vaut 6 pouces ; & ainsi du reste. (413.)

416. REMARQUE. *L'usage de l'échelle géométrique*, ainsi divisée, est très-commode ; comme on va le voir. (*fig.* 50.)

1°. Voulez-vous prendre en petit, la valeur de 5 pieds 4 pouces ? Cherchez sur cette échelle, la rencontre *x* de la quatrieme parallele 4 *x* S, avec la sixieme transversale 2 *x* D : posez une jambe du compas sur *x*, qui est le point de rencontre ; & l'autre jambe du compas, sur l'extrémité 4 de la même parallele *x* S.

Cette ouverture du compas $x 4$, vous donnera une longueur correſpondante à 5 pieds 4 pouces.

II°. Voulez-vous prendre en petit, la valeur de 27 pieds 9 pouces? Prenez AM = 12 pieds; prenez encore une fois AM = 12 pieds; ce qui fait déjà 24 pieds : il vous manque encore 3 pieds 9 pouces. Pour les avoir,

Cherchez la rencontre $r$ de la neuvieme parallele $9rZ$, avec la quatrieme tranſverſale $3r4$ : poſez une jambe du compas ſur $r$, & l'autre ſur 9. Cette ouverture du compas vous donnera $rv = 3$ pieds, $+ v9 = 9$ pouces. En faiſant une ligne égale à tout cela, vous aurez $2$ AM $= 24$ pieds, $+ rv = 3$ pieds, $+ v9 = 9$ pouces.

III°. Si la ligne AB exprime 6 toiſes; alors les diviſions 11, 22, 33, 44, exprimeront des demi-pieds, ou des douziemes de toiſe.

IV°. Si la ligne AB exprime 6 lieues; alors les diviſions, dont on vient de parler, exprimeront des douziemes de lieue : & ainſi de toute autre meſure en longueur. Par-là, l'uſage de l'échelle géométrique devient général, & relatif à toute meſure quelconque de l'étendue en longueur.

## PARAGRAPHE CINQUIEME.

### *PROBLÊMES SUR LES TRIANGLES.*

### PROBLÊME I.

417. *CONNOISSANT deux angles, & un côté d'un triangle; trouver le troiſieme angle, & les deux autres côtés.* (fig. 45.)

SOLUTION. Soit le triangle ABC, dont on connoiſſe

les deux angles quelconques B & C, avec le côté CA que je ſuppoſe de 287 toiſes.

I°. Deux angles d'un triangle étant connus, on trouve toujours facilement le troiſieme, qui eſt le ſupplément à 180 degrés. Souſtrayez donc de 180, la ſomme des deux angles connus : le reſte ſera la valeur du troiſieme angle inconnu A. (387.)

II°. Conſidérez comme baſe du triangle, le côté connu CA. Pour trouver les deux autres côtés inconnus AB & BC; avec le compas, prenez ſur la ligne des parties égales (411), autant de parties que le côté connu contient de toiſes, c'eſt-à-dire ici, 287 parties égales; & tirez une ligne droite *ca*, égale à cette longueur. Enſuite, de l'extrêmité *c* de la ligne *ac* que vous venez de tirer; menez une ligne indéfinie *cb*, qui faſſe avec la ligne *ca*, un angle *c* égal à l'angle C. De l'autre extrêmité *a* de la premiere ligne tirée *ac*; menez une autre ligne indéfinie *ab*, qui faſſe avec la ligne *ca*, un angle *a* égal à l'angle A. Ces deux lignes *cb* & *ab*, indéfiniment prolongées, ſe réuniront en un point quelconque *b*; & formeront le triangle *abc*, ſemblable au triangle ABC : par conſéquent les côtés de l'un, ſont proportionnels aux côtés homologues de l'autre. (403.)

Ainſi CA . CB : : *ca* . *cb* : ainſi encore CA . AB : : *ca* . *ab*. D'où il ſuit que le côté CA, contient autant de parties égales du côté CB, ou du côté AB; que le côté *ca*, contient de parties égales du côté *cb*, ou du côté *ab*.

III°. Donc ſi, en prenant avec le compas la longueur du côté *cb*, & portant cette longueur ſur la ligne des parties égales, on trouve qu'elle contient 361 parties; on ſera aſſuré que le côté CB contient 361 toiſes. De même, ſi en prenant avec le compas la longueur du côté *ab*, & portant cette longueur ſur la ligne des parties égales, on trouve qu'elle contient 96 parties; on ſera aſſuré que le côté AB contient 96 toiſes.

## PROBLÊME II.

418. *Connoissant deux côtés d'un triangle, & l'angle compris entre ces deux côtés; trouver le troisieme côté, & les deux autres angles.* (fig. 52.)

SOLUTION. Soit le triangle BAC, dont on connoisse le côté AB, que je suppose de 495 toises; & le côté AC, de 257 toises; avec l'angle A compris entre ces deux côtés.

I°. Pour trouver le côté BC, il faut prendre sur l'échelle (411), la longueur de 495 parties égales; & tirer la ligne *ab*, égale à cette longueur. Il faut prendre aussi sur l'échelle 257 parties égales; & du point *a*, tirer la ligne *ac*, égale à cette autre longueur; & qui fasse sur la ligne *ab*, un angle *a* égal à l'angle A. Après cela menez une ligne droite, du point *b* au point *c*; & vous aurez le triangle *bac*, semblable au triangle BAC: puisque les deux côtés *ab* & *ac*, sont proportionnels aux côtés AB & AC; & que l'angle compris entre les côtés du premier, est égal à l'angle compris entre les côtés du second. (405.)

II°. Par conséquent, si en portant sur l'échelle, la longueur du côté *bc*, on voit combien cette longueur contient de parties égales de l'échelle; on saura que le côté BC contient tout autant de toises. Par exemple, si le côté *bc* répond à 204 parties de l'échelle; le côté inconnu BC du triangle semblable, sera de 204 toises.

III°. Pour trouver les angles inconnus B & C, du triangle proposé; il faut mesurer avec le rapporteur (339), les angles correspondans du petit triangle: l'angle *b* sera la mesure de l'angle B; & l'angle *c*, la mesure de l'angle C.

419. REMARQUE. On voit par la solution de ces deux problêmes, qu'il ne s'agit que de faire un petit triangle, semblable au grand triangle dont on veut

ouvertures circulaires qui restent invariables sur la partie saillante de l'alidade PD, & du diametre AB. On peut aussi, pour mieux saisir les objets éloignés, se servir, ou d'une lorgnette simple & à un seul verre, ou d'une petite lorgnette d'opéra, à deux verres, en fixant un objet R.

III°. On adapte quelquefois au graphometre, deux lunettes; l'une immobile & parallele au diametre AB, laquelle tient lieu des deux pinnules A & B; l'autre mobile & immobilemement fixée sur l'alidade ou sur le diametre roulant PD, laquelle tient lieu des pinnules P & D. Il faut, pour que les deux lunettes soient convenablement placées l'une au-dessus & l'autre au-dessous du plan gradué du graphometre, que dans chaque lunette la ligne droite menée par les centres de l'objectif & des oculaires, soit parallele au plan du graphometre; & que ces deux lignes droites se croisent dans une perpendiculaire, élevée sur le centre C du même graphometre.

IV°. Au milieu du plan gradué du graphometre, se trouve communément une grande aiguille aimantée *ab*, en équilibre & mobile sur un pivot élevé perpendiculairement dans le centre d'un cercle *abmn* divisé en degrés & en minutes: c'est la *boussole*, qui dans le graphometre est couverte d'un verre plan bien transparent & bien solide, & dont le plan se confond souvent avec le plan même du graphometre. Cette aiguille aimantée sert à donner la position du lieu où l'on opere, & des objets auxquels on vise, relativement au nord & au midi, à l'orient & à l'occident.

Pour cela, il faut chercher & déterminer avec précision, la déclinaison de l'aiguille aimantée, pour le lieu où est posé le graphometre: ce que l'on peut faire aisément, en mesurant l'angle que fait sur la méridienne de ce lieu (*Phy.* 1356), une semblable aiguille aimantée, posée sur un petit pivot perpendi-

culaire à cette méridienne. Supposons que cet angle *amn*, formé par la direction de la méridienne du lieu & par la direction de l'aiguille aimantée, soit de 19 degrés & 45 minutes ( *Phy*. 592 & 1101, V°.):

Quand l'aiguille aimantée *ab* fera un angle *amn* de 19 degrés & 45 minutes, la ligne CM sera dirigée du midi au nord; la ligne AB, du couchant au levant; la ligne PCDR déclinera de 60 degrés AD, du couchant CA vers le nord CM. Quand l'aiguille aimantée tombera sur la ligne nord *mn* du petit cercle; la ligne CM du graphometre, déclinera de 19 degrés & 45 minutes, du nord vers l'orient; & ainsi du reste. Mais pour que tout cela soit exact, il faut qu'il n'y ait aucun fer dans le graphometre, ni au voisinage du graphometre.

V°. Si sur l'alidade PCD d'un graphometre, on fixe parallélement à cette alidade, un petit tube de verre *rs*, parfaitement cylindrique, de sept à huit pouces de longueur, plein d'esprit de vin coloré, dans lequel se trouve une forte bulle d'air, quand l'alidade & le petit cylindre hermétiquement fermé par ses deux bouts seront dans une position horisontale, la bule d'air restera immobile vers le milieu du cylindre. Mais quand l'alidade & le cylindre, toujours paralleles entre eux, perdront la position horisontale, la bulle d'air montera vers le côté où l'alidade s'éleve. Ce petit cylindre *rs* est un *niveau d'eau*. Par ce moyen on trouvera aisément & assez exactement la ligne horisontale du lieu où l'on prend des angles sur le terrein. Mais il faut pour cela, que la capacité du tube soit par-tout exactement cylindrique; & que l'axe *rs* de cette capacité cylindrique, soit par-tout parallele à l'alidade & à la direction des angles visuels.

VI°. Comme nous venons de parler de la ligne

horisontale ; il est à propos d'en donner ici une notion anticipée.

La *ligne horisontale d'un lieu*, est une ligne qui menée dans une direction quelconque, du midi au nord ou du levant au couchant, seroit parallele à la surface d'un bassin d'eau tranquille, placée en ce lieu. Le niveau donne par-tout la ligne horisontale, dans une certaine étendue : nous traiterons ailleurs plus au long, & de l'horison & du niveau. (533.)

## *LE QUART DE CERCLE.*

421. DESCRIPTION. I°. Le *quart de cercle* est communément destiné à prendre des angles dans le ciel, avec la plus grande précision possible. (*fig.* 3.)

Cet instrument ABDCA est pour l'ordinaire un plan solide de cuivre, dont le milieu VV est vuide, ou qui n'a en matiere solide que l'arc ABD & les deux rayons CD & CA. Cet arc ABD, qui est précisément le quart d'une grande circonférence dont le rayon est communément de deux ou trois pieds de long, & quelquefois plus grand encore, est *divisé* avec tout le soin possible en degrés, en minutes, en secondes, & quelquefois même en tierces. Sur le centre C roule une *regle solide* MN, qui mésure la grandeur de l'arc BD & de l'angle DCB ; & qui porte une lunette d'approche MR, mobile comme elle, & parallele à elle-même. Au foyer *mn* de la lunette, est un micrometre objectif, dont nous parlerons bientôt. Un *fil à plomb* OP sert à donner à l'instrument une direction perpendiculaire à l'horison. (532.)

Pour se servir de cet instrument, on le fixe immobilement & avec la plus scrupuleuse exactitude, dans la direction qu'on veut lui donner. Par exemple, si la situation immobile du quart de cercle est telle ; que

la ligne CD soit horisontale; la ligne CA, verticale; le plan CABDC, dans le plan du méridien : alors la regle mobile MN ou CB, qui est un rayon roulant sur le centre C, se portera de B en D, de B en A; & mesurera tous les angles quelconques DCB, qu'on voudra prendre sur le quart correspondant de la circonférence du méridien céleste; & qui seront interceptés entre la ligne horisontale indéfinie CD, & la ligne verticale indéfinie CA qui aboutit au zénith. Si l'arc DB est de 46 degrés sur le quart de cercle; il sera de 46 degrés dans le quart de la circonférence du méridien céleste : puisque ce sont deux arcs de circonférences équivalemment concentriques, compris entre les mêmes rayons indéfinis CD & CB. (340.)

### *Le Micrometre, la Lunette.*

422. OBSERVATION. Les grands avantages qu'on tire du quart de cercle, tel que nous venons de le décrire, & tel qu'on l'emploie depuis près d'un siecle dans l'astronomie pratique, ont pour origine deux des plus heureuses inventions de l'astronomie moderne : l'une est l'invention du microscope objectif; l'autre est l'application du télescope astronomique au quart de cercle.

I°. Le *micrometre objectif*, dont la premiere idée est due au célebre Huygens, sert à mesurer avec la plus grande précision, la grandeur des espaces célestes; comme le pendule à secondes (7. III°) sert à mesurer avec la plus grande exactitude la durée précise du tems qui répond à certaines observations. (*fig.* 3.)

Tout le monde sait que le télescope astronomique MR est communément une lunette d'approche à deux verres convexes, tellement assortis que leurs foyers coincident en un même petit espace (*Phy.* 1001 & 1006). Au foyer *mn* de l'objectif R se forme une

*petite image* parfaitement semblable à l'objet, & proportionnée à l'angle optique sous lequel cet objet paroîtroit à l'œil nud; & cette image, placée au foyer de l'oculaire M, est conduite dans l'œil, apperçue distinctement, & tracée sous un angle optique qui l'amplifie proportionnellement dans toutes ses parties. De sorte que, par ce moyen, un objet paroît & plus éclairé & plus grand & plus près de l'œil qu'il ne paroîtroit à la vue simple (*Phy.* 1027); & que si le télescope grossit cinquante fois, par exemple, le diametre des objets placés devant lui; un objet dont le diametre apparent à l'œil nud ne seroit que d'une ou deux secondes, & seroit par-là même imperceptible (*Phys.* 921), se montrera à l'œil aidé du télescope astronomique, sous un diametre apparent de 50 ou 100 secondes, & deviendra visible. On conçoit parlà, comment on peut voir & saisir distinctement, à l'aide du télescope, un objet ou une distance qui seroit imperceptible à la vue simple, tel que le diametre d'une comete très-éloignée, qui est souvent insensible à l'œil nud; tel que la parallaxe du soleil, laquelle n'est que de 8 secondes & environ 42 tierces.

Cette image tracée au foyer *mn* de l'objectif, fournit à M. Huygens, un moyen pour connoître & pour mesurer la grandeur apparente de l'objet auquel elle répondoit; & voici comment il s'y prit. Au foyer commun *mn* de l'objectif R & de l'oculaire M, il plaça une ouverture circulaire *dvdrd*, dont il mesura la grandeur apparente : c'est-à-dire, qu'il mesura le nombre de minutes & de secondes qu'elle laissoit *découvrir* dans le ciel, par le tems qu'une *étoile* employoit à parcourir le diametre *dd* de cette ouverture circulaire (*). Après avoir déterminé avec toute l'e-

(*) Une étoile fait sa révolution diurne en 23 heures 56 minutes 4 secondes de tems moyen; & elle parcourt,

xactitude

xactitude requise, quelle grandeur apparente du ciel embrassoit l'ouverture circulaire fixée au foyer *mm* de son télescope astronomique; lorsqu'il s'agissoit de mesurer le disque d'une planette, ou la distance de deux corps célestes, il introduisoit par une fente latérale *mn* faite au télescope, une petite verge de métal *vr*, d'une largeur précisément suffisante pour couvrir cet intervalle; & cette largeur *c*, comparée par le moyen d'une échelle (411) à celle de l'ouverture totale *dd*, lui donnoit le diametre apparent de cet objet. Par exemple, si le diametre *dd* de l'ouverture circulaire répondoit à 70 minutes de degré; & que la largeur *c* de la verge *vr* qui ocultoit une planette, fût la soixante-dixieme partie de ce diametre; il concluoit que le diametre de cette planette étoit d'une minute; & ainsi du reste. Tel fut le micrometre qu'employa Huygens. Cet instrument a été perfectionné par MM. de Malvasia, Auzout, Bradley. (*fig.* 116 & 113.)

M. le marquis de Malvasia, noble Boulonois, plaça au foyer *mfn* du télescope, un réticule; c'est-à-dire, plusieurs fils se croisant à angles droits & formant plusieurs quarrés *drnd*, à chacun desquels devoit répondre un certain intervalle dans le ciel. Et comme il devoit souvent arriver que l'objet à mesurer ne comprendroit pas précisément un ou plusieurs de ces quarrés; il en divisa un en plusieurs autres beaucoup plus petits, comme il avoit divisé le champ entier de la lunette par les premiers. Par ce moyen, il déterminoit aisément combien d'intervalles entre les filets principaux,

---

en une seconde de tems, 15 secondes de degré, plus environ un vingt-sixieme de seconde de degré : ou plus exactement, elle parcourt en une seconde de tems, 15 secondes de degré $+ \frac{3540}{86164}$ d'une seconde de degré. Nous avons marqué ailleurs comment se mesurent exactement les secondes de tems; pages 9 & 12.

& combien de portions de ces intervalles, comprenoit l'objet qu'il vouloit mesurer; & par conséquent, quelle étoit sa grandeur apparente. (*fig.* 116.)

M. Auzout, l'un des premiers membres de l'Académie royale des Sciences, perfectionna encore cette invention, & la rendit plus propre à des déterminations extrêmement délicates. Il ne conserva que des filets paralleles *rr*, avec un transversal *dd* qui les coupoit à angles droits: & afin de renfermer toujours l'objet à mesurer entre des filets paralleles, il imagina d'en faire porter un *nn* par un chassis mobile *nnm*, glissant dans les rainures du chassis auquel les autres étoient fixés. On fait avancer ou reculer ce chassis mobile *nnm*, par le moyen d'une vis portant un index *v*, dont les révolutions marquent de combien le fil mobile *nn* se rapproche ou s'éloigne des filets fixes *rr*. Par exemple, supposons que les fils paralleles *rr* soient tous éloignés l'un de l'autre, d'un intervalle qui réponde exactement à une minute de degré; & qu'il faille 60 révolutions de la vis *v*, pour qu'elle se porte par des pas égaux, d'un fil au fil suivant: il est clair que chaque révolution de l'index, embrassera & mesurera une seconde de degré. Ce réticule *drdnd* est renfermé dans le tuyau de la lunette MR, & placé au foyer *mn*, parallélement à l'objectif R. La vis *v* est saillante en dehors, pour donner lieu aux évolutions du filet mobile *nn*; & au tuyau de la lunette MR, est pratiquée une petite ouverture convenable, par où l'on puisse éclairer les filets *nrrd* pendant la nuit par le moyen d'une lampe. (*fig.* 3, 113 & 116.)

Quand le télescope astronomique est ainsi arrangé, ayant son réticule *drdn* exactement placé au foyer *nfm* de l'objectif & de l'oculaire; il reste à déterminer la grandeur du champ ABA, ou la quantité de minutes & de degrés qu'embrasse son ouverture circulaire ABA. Pour cela, on dirige le télescope vers le

ciel; & on mesure la grandeur du champ & l'intervalle d'un fil à l'autre, par le passage d'une étoile, comme nous avons dit que faisoit Huygens; ou bien, on tourne le télescope vers un petit objet AB éloigné de quelques centaines de toises, dont on a calculé trigonométriquement la grandeur apparente; d'où l'on conclut celle qui répond à un des intervalles égaux *rr*, *rr*, des filets qui embrassent cet objet. Après ces préparations, le micromètre est construit; & l'on peut le tourner vers le ciel, pour y mesurer la grandeur apparente de quelque objet que ce soit. Veut-on, par exemple, déterminer le diametre apparent du soleil? On tourne l'instrument de maniere que cet astre paroisse pendant quelques momens suivre la direction d'un des fils paralleles *rr*; & en avançant ou en reculant le fil mobile *nn*, on fait ensorte que son disque soit précisément compris entre eux. Alors on examine, au moyen de l'index *v*, la distance du fil mobile *nn*, à un des fixes *rr*. D'où l'on conclud avec beaucoup de précision, le diametre apparent de l'astre, ou l'intervalle entre les deux astres, qu'on veut mesurer. Telle est l'idée sommaire qu'on doit se former du micrometre & de ses usages. On a imaginé dans la suite diverses nouvelles constructions de micrometres : mais la plus simple, la plus parfaite, & celle qui sert à un plus grand nombre d'usages, c'est celle que nous venons d'expliquer; & c'est aussi, à quelques changemens près, celle qu'ont adopté tous les Astronomes. (*fig.* 3 & 116.)

II°. *L'application du télescope astronomique au quart de cercle*, est encore une des plus heureuses inventions de l'astronomie moderne : elle est due à MM. Auzout & Picard en France, à MM. Gascoigne & Hook en Angleterre. Tant qu'à l'exemple des anciens, on se servit de pinnules simples, comme dans le graphometre (420); l'observateur n'ayant d'autre secours que celui de ses yeux, ne pouvoit jamais parvenir à

diſcerner & à déterminer parfaitement le bord de l'aſtre ou de l'objet auquel il miroit. D'ailleurs, les étoiles fixes paroiſſent à l'œil nud environnées d'une chevelure, qui leur donne un diametre apparent beaucoup plus conſidérable qu'il n'eſt dans la réalité; & qui induiſoit l'obſervateur en une erreur continuelle. Le téleſcope aſtronomique, adapté au quart de cercle, leve tous ces inconvéniens. Le diametre de l'aſtre, du ſoleil, par exemple, paroît diſtinctement terminé; & l'on peut juger avec préciſion, de l'inſtant auquel il arrive aux fils qui ſe croiſent au foyer de l'objectif. Les étoiles ſont dépouillées de cette chevelure incommode, qui en augmente l'apparence à l'œil nud; & elles ne paroiſſent que comme des points lumineux & preſque indiviſibles, qui ſouvent ſont éclipſés ou occultés par un ſimple fil de ſoie, de l'ombre duquel on les voit ſubitement ſortir comme un petit *éclair*: leur paſſage par ces fils eſt par-là beaucoup mieux déterminé; ce qui fournit un moyen commode & beaucoup plus exact que ceux qu'on pratiquoit autrefois, pour meſurer leur déclinaiſon & leur aſcenſion droite (*Phy*. 1153). Le quart de cercle enfin, garni d'un téleſcope & d'un micrometre, ſert à mille déterminations délicates, auxquelles l'inſtrument ancien ne pouvoit atteindre: auſſi cette invention fut-elle rapidement adoptée par tous les aſtronomes jaloux de l'exactitude.

Envain objecteroit-on contre l'uſage du téleſcope aſtronomique, que dans cette maniere d'obſerver les objets, il n'y a aucune *ligne de mire*, ou aucun axe de viſion: ce qui eſt cependant néceſſaire pour déterminer le lieu de l'objet (*Phy*. 912). Vaine objection; prétention frivole! On démontre facilement par les loix de la Dioptrique, que le rayon paſſant par le centre de l'objectif & de l'oculaire, forme une ligne invariable (*Phy*. 987 & 1006), qui eſt l'axe

de viſion, ou la ligne droite dans laquelle eſt vu l'objet : de ſorte que ce ne peut être que le point de l'objet, qui eſt dans la direction de cette ligne, ou qui en eſt éloigné d'un angle déterminé, qui puiſſe paroître au point où ſe croiſent ces fils. Il y a donc, lorſque l'inſtrument eſt vérifié, & que le téleſcope ne ſouffre aucun dérangement à l'égard du quart de cercle ; il y a, dis-je, une ligne équivalente à celle qui ſeroit menée par les deux ouvertures des pinnules ordinaires, & qui eſt le vrai rayon par lequel l'objet eſt apperçu : comme on peut s'en convaincre par l'expérience, en mirant d'abord par le moyen du téleſcope, un point fixe d'un objet placé à une diſtance de cent ou deux cents toiſes ; & en mirant enſuite le même point de l'objet par le moyen de deux pinnules placées aux deux bouts du tuyau du téleſcope : tuyau qu'on laiſſera dans la même poſition, en enlevant les deux verres, l'objectif & l'oculaire.

III°. Quelque perfection qu'ait acquis cet inſtrument depuis un ſiecle, il eſt certain qu'il eſt encore perfectible ; & ce qui peut lui manquer de perfection, lui vient de l'imperfection des lunettes ordinaires (*Phy.* 1027), qui ont beſoin d'être fort longues pour groſſir beaucoup ; ce qui les rend fort embarraſſantes : & qui manquent de clarté & de netteté, quand on n'enveloppe pas d'une zone opaque les bords de l'objectif ; ce qui fait que la majeure partie de cet objectif eſt en pure perte pour l'œil, auquel il ne donne de la lumiere que par un petit cercle découvert, pris autour de ſon centre (*Phy.* 1029). Le deſir de parer à ce double inconvénient a fait imaginer dans ces derniers tems, les lunettes achromatiques (*) ; c'eſt-à-dire des

(*) Les lunettes ordinaires, ſur-tout quand on laiſſe à découvert une trop grande partie de l'objectif, montrent les objets environnés ou enveloppés de pluſieurs cercles co-

connoître, ou quelque angle, ou quelque côté : comme nous avons enseigné à le faire dans la solution des deux problêmes précédens. Mais, pour avoir plus de précision dans la pratique, il faut faire le triangle semblable, le plus grand que l'on peut : parce qu'il est plus facile d'éviter les erreurs considérables, en opérant sur des arcs & sur des côtés plus grands & plus sensibles.

## *LE GRAPHOMETRE.*

420. DESCRIPTION. Pour mesurer les angles sur le terrein, on se sert communément d'un instrument qu'on nomme graphometre : nom qui lui vient, de ce qu'il sert à la fois à mesurer & à écrire ; de γραφω, *scribo* ; & de μετρεω, *metior*. (*fig.* 5.)

I°. Le *graphometre* est un assez grand demi-cercle AMBCA, exactement divisé en degrés, en minutes, en demi-minutes ; & en quarts de minutes ; & accompagné d'une alidade terminée par deux pinnules.

L'*alidade* est un diametre DP, roulant sur le centre C. Les *pinnules* D & P, qui terminent de part & d'autre l'alidade, sont deux petites platines de métal, perpendiculairement élevées sur ses deux extrêmités, & percées pour diriger le rayon visuel vers l'objet que l'on cherche. Quelquefois deux semblables pinnules sont fixées aux deux extrêmités A & B du diametre ACB.

Qu'un œil vise un objet à travers les pinnules B & A, tandis qu'un autre œil visera un autre objet à travers les pinnules P & D : les deux rayons visuels, qui s'entre-coupent nécessairement au centre commun C du cercle, formeront les deux côtés d'un angle ACD, qui sera mesuré par l'arc AD. Cet angle peut être, ou aigu, ou droit, ou obtus, selon que l'alidade DP s'écartera de A vers M, de M vers B ; tandis que le diametre AB reste immobile.

Le *plan du graphometre* porte sur un *genou* CIF, par

le moyen duquel ce plan peut ſe fixer dans une direction quelconque, horiſontale, verticale, inclinée à l'horiſon, vers le nord ou vers le midi, vers l'orient ou vers le couchant. La partie inférieure IF du genou, eſt un petit *cylindre creux*, qui embraſſe un petit cylindre de bois autour duquel il peut ſe mouvoir; & ce cylindre de bois qui ſoutient le genou, eſt adhérent à un ſoutien terminé par trois bâtons ſolides, d'environ trois pieds de hauteur.

IIº. A la place des fentes faites aux pinnules ABDP, on pourroit former quatre ouvertures circulaires *pbad*, d'environ ſept ou huit lignes de diametre; telles que les centres *c* de ces ouvertures euſſent une même hauteur préciſe au-deſſus du plan du graphometre, & que les lignes menées par ces quatre centres *c* s'entrecoupaſſent toujours dans un même point d'une perpendiculaire élevée ſur le centre C du graphometre. A chacune de ces quatre ouvertures circulaires s'adapteroient, par le moyen de certaines couliſſes pratiquées dans l'épaiſſeur des pinnules, des plaques de cuivre de deux eſpeces différentes: l'une de ces plaques n'auroit, en *b* ou en *p*, qu'une petite ouverture circulaire, égale à l'épaiſſeur d'une épingle, pour donner paſſage au rayon viſuel dans l'œil: l'autre plaque, en *a* ou en *d*, auroit une ouverture circulaire d'environ ſept à huit lignes de diametre, au centre de laquelle ſe croiſeroient perpendiculairement deux fils de ſoie, ou deux fils de laiton très-minces. Par ce moyen on ſaiſiroit plus diſtinctement le point de l'objet auquel on mire.

Telle eſt la conſtruction que nous avons donnée au graphometre, dont nous avons fait quelquefois uſage. Tout l'art conſiſte à faire enſorte que les centres des plaques poſtiches, qui s'enchâſſent à la partie ſaillante de l'alidade par deux couliſſes, quadrent exactement une fois pour toutes avec les centres des

piquets sur chacun des deux côtés de l'angle, par exemple au point C & au point B.

II°. Dirigez l'alidade A*b*, vers le piquet B, en regardant par les fentes des deux pinnules : faites ensuite tourner l'alidade en A*c*, pour la diriger vers le piquet ou jallon C. (*).

III°. Comptez ensuite sur le graphometre (420), les degrés & minutes *cdb* compris entre les deux directions AB & AC de l'alidade : ce nombre de degrés & de minutes sera la mesure de l'angle CAB qu'il falloit mesurer. On mesurera de même les angles DAB, DAC, ABD, CBD, CBA.

## PROBLÊME IV.

424. *Mesurer l'éloignement d'un objet inaccessible, par exemple l'éloignement* A *de la montagne* AM, *que l'on suppose inaccessible.* (fig. 53.)

SOLUTION. I°. Choisissez, à quelque distance de la montagne, sur un terrein en plaine & bien uni, deux lieux différens B & G, que l'on nomme *stations;* d'où vous puissiez appercevoir l'extrêmité A de la montagne, & les deux stations B & G. Plantez un piquet en B, & un autre piquet en G : après quoi, menez une ficelle bien tendue en ligne droite, de B en G; & mesurez exactement, avec une perche ou avec une toise, sur la ficelle tendue, la distance BG interceptée entre ces deux piquets ou entre ces deux stations.

II°. Placez un graphometre en B; & mesurez l'angle ABG $=$ *a*B*g*. placez un autre graphometre ou *le*

(*) On nomme *jallon*, un long bâton ou une longue perche, qu'on plante en terre, ou qu'on soutient sur la surface de la terre, dans une direction à peu près perpendiculaire à l'horison. On attache assez souvent au jallon, à une plus ou moins grande hauteur, un signal qu'on puisse aisément & nettement distinguer de loin.

même graphometre en G; & mesurez l'angle AGB. Le point A tient lieu de piquet ou de jallon, pour le côté GA. (423.)

III°. Les rayons visuels BA & GA, & la ligne GB qui est l'intervalle des stations, formeront le triangle BAG, dont on connoît l'angle B & l'angle G, & la base BG. Ces trois choses étant connues, on trouvera facilement le côté AB, ou AG, qui exprime l'éloignement du point A au point B ou au point G. (417.)

## PROBLÊME V.

425. *Mesurer une hauteur inaccessible, par exemple, la hauteur de la montagne* AM, *ou d'un nuage* AN. (fig. 53.)

SOLUTION. I°. Cherchez d'abord par le problême précédent, la distance BA, que vous prendrez pour base du triangle que vous voulez connoître.

II°. Ensuite disposez le plan du graphometre, ensorte qu'il soit perpendiculaire à l'horison: dirigez l'alidade au point A, & remarquez le degré & la minute *a*, qu'atteint l'alidade sur le graphometre.

III°. Enfin par le moyen du niveau (422), dirigez l'alidade parallélement à l'horison sous le point A; duquel vous tirerez par la pensée une ligne AM, qui aille couper la ligne horisontale que forme l'alidade; & remarquez sur le graphometre le degré & la minute *m*, qu'atteint l'alidade horisontale.

Après ces opérations vous aurez un triangle ABM, dont vous connoissez le côté AB, que vous avez mesuré; l'angle B, qui est mesuré sur le graphometre par l'arc *am*; l'angle M, qui est droit; & l'angle A qui est le supplément des deux autres angles connus: donc on connoîtra la hauteur AM de la montagne au-dessus de l'horison BM de celui qui mesure. (417.)

IV°. S'il faut mesurer la hauteur d'un nuage AN;

il peut arriver ou que le nuage soit immobile, ou qu'il soit mobile. Si le nuage AN est immobile, on mesurera sa hauteur AM précisément comme celle de la montagne AM.

Mais si le nuage est mobile, il faudra que deux observateurs, placés l'un au point A & l'autre au point G, chacun avec son graphometre, dirigent leurs alidades vers un même point du nuage, par exemple, vers le point le plus élevé & le plus occidental A; & qu'ils mesurent les angles du triangle ABGA, dans un même instant qui sera marqué par un signal de convention; par exemple, par un coup de pistolet tiré du milieu $x$ de la distance BG. Après quoi, on mesurera la hauteur AM du nuage, comme on vient de voir qu'on mesure la hauteur AM de la montagne inabordable & inaccessible AM.

Nous donnerons dans la trigonométrie, une autre méthode plus scientifique & moins sujette à erreur, pour résoudre ce problême, & celui qui le précede, & celui qui va le suivre. (703, 705.)

## PROBLÊME VI.

426. *Trouver la distance de deux objets inaccessibles, tels que les sommets des deux montagnes* C & D. (*fig.* 51.)

SOLUTION. Prenez deux stations comme A & B, desquelles on puisse appercevoir les deux extrêmités de ces deux montagnes; & mesurez, la perche à la main, la distance AB qui doit vous servir de *base*. Ensuite, du point A, mesurez l'angle DAB & l'angle CAB formés tous les deux par des rayons visuels. Du point B, mesurez aussi les angles CBA & DBA, formés pareillement par des rayons visuels.

I°. Dans le triangle BDA, on connoîtra les deux angles DAB & DBA, & le côté AB qui est l'inter-

vale des ſtations que vous aurez meſuré : par conſéquent on trouvera le côté AD. (417.)

II°. De même dans le triangle ACB, on connoît les deux angles CBA & CAB, & le côté AB : par conſéquent on trouvera auſſi le côté AC.

III°. Enfin on conſidérera un troiſieme triangle CAD, dont on connoît déjà les deux côtés AD & AC. Ainſi ſi l'on meſure l'angle compris DAC, on trouvera le côté inconnu CD, qui eſt la diſtance cherchée. (418.)

Par le moyen des deux premiers triangles BDA & ACB, on peut trouver auſſi la diſtance de l'autre ſtation B, aux deux objets inacceſſibles C & D.

## PROBLÊME VII.

427. *Meſurer la hauteur d'un objet acceſſible & perpendiculaire à l'horiſon, par exemple, la hauteur d'un clocher ou d'une tour, par le moyen de l'ombre.* (fig. 55.)

SOLUTION. Plantez en terre un piquet *am*, qui ſoit perpendiculaire à l'horiſon, & par conſéquent parallele à la tour AC. Après quoi, meſurez l'ombre *a*B du piquet; la hauteur *am* du piquet, ſans y comprendre la partie enfoncée en terre; l'ombre MB de la tour, priſe ſur un plan horiſontal, ainſi que l'ombre du piquet. Enfin faites cette regle de trois : l'ombre du piquet, eſt à la hauteur du piquet; comme l'ombre de la tour eſt à la hauteur de la tour : les trois premiers termes étant connus, on trouvera facilement le quatrieme. (175.)

Il eſt évident que les deux triangles *a*B*m*, ABM, ſont ſemblables : puiſqu'ils ont leurs trois angles homologues égaux. L'angle *m* ou M formé ſur l'horiſon par le pied du clocher & le pied du piquet, eſt droit. L'angle *a* ou A, formé ſur la pointe du clocher &

ſur celle du piquet par le rayon ſolaire AB ou par un autre rayon parallele au rayon AB, eſt auſſi égal dans l'un & l'autre triangle. Le troiſieme angle qui eſt le ſupplément à deux angles droits dans l'un & l'autre triangle, ſera donc auſſi égal dans les deux triangles.

Pour avoir la longueur de l'ombre d'un clocher terminé en pointe, il ne ſuffit pas de prendre la diſtance depuis la fin de l'ombre juſqu'au clocher : il faut y ajouter la moitié du diametre du clocher ; parce que l'extrêmité d'un clocher qui forme l'ombre, répond dans ſa diſtance, au milieu du diametre. Le piquet *ab* peut avoir ſon ombre & ſon triangle à part, hors de l'ombre & du triangle de la tour.

## PROBLÊME VIII.

428. *Meſurer une hauteur acceſſible par le pied, par exemple, la hauteur de la tour* AC, *ſans le ſecours de l'ombre & du graphometre.* (fig. 55.)

SOLUTION. Plantez en terre un piquet *a*G, qui ſoit perpendiculaire à l'horiſon, & par conſéquent parallele à la tour. Eloignez-vous de ce piquet à quelque diſtance, par exemple en BH : afin que vous puiſſiez voir l'extrêmité A de la tour, par un rayon viſuel B*a*A qui raſe l'extrêmité du piquet. Enfin regardez auſſi un point de la tour tel que M, par un rayon horiſontal BM ; & remarquez le point *m* du piquet, par lequel paſſe le rayon horiſontal BM.

Tout cela poſé, on aura deux triangles équiangles ou ſemblables ; ſavoir, B*am* & BAM. Donc (403) dans le *petit triangle*, le côté B*m* qu'on meſure, eſt au côté *ma* qu'on meſure ; comme dans le *grand triangle*, le côté BM qu'on meſure, eſt au côté MA qu'on ne pourroit meſurer.

Au côté trouvé AM, ajoutez la partie MC inférieure à votre horiſon : vous aurez la hauteur AC de

la tour, ou de tout autre objet semblable, perpendiculaire à l'horison.

## PROBLÊME IX.

429. *Mesurer sans graphometre, la largeur inaccessible* AD *d'une riviere.* (fig. 56.)

SOLUTION. I°. Plantez en terre un piquet A, sur lequel vous placerez à peu près horisontalement une grande perche droite CB de sept à huit pieds de longueur. Aux deux extrêmités C & B de cette grande perche fixez deux petites regles à pinnules, mobiles sur leur centre, que vous dirigerez vers un point remarquable D, à l'autre bord de la riviere : vous aurez le triangle BCD.

II°. Cela posé, sans toucher à la perche & à ses deux regles, faites tourner votre piquet vers la direction accessible du rivage où vous mesurez ; & regardez en quel point *d* du rivage, les deux petites regles croisent leurs directions. La distance accessible du point A au point *d*, sera égale à la distance inaccessible du point A au point D : puisque les deux triangles qui ont leur pointe terminée au point D & au point *d*, sont égaux en tout, ou plutôt sont le même triangle placé sur deux différentes parties du terrein ou de l'étendue. (391.)

III°. Il est évident qu'on peut mesurer par la même méthode, toute autre distance semblable à la largeur de la riviere ; par exemple, la distance d'un point quelconque où sera planté le piquet qui soutient la perche & ses deux regles, au sommet d'un clocher, d'un arbre, d'un monticule. Il n'est peut-être point de méthode moins sujette à l'erreur, plus sûre & plus infaillible, pour mesurer de petites distances inaccessibles.

430. REMARQUE. On peut se proposer & résoudre

par les mêmes principes que nous venons de donner, d'expliquer & de démontrer, une foule d'autres problêmes de longimétrie, semblables à ceux que nous avons proposés & résolus.

Mais il faut observer ici en premier lieu, que cette méthode de résoudre les triangles en construisant des triangles semblables, ne donne jamais que des à-peu-près qui suffisent souvent, mais qui ne suffisent pas toujours dans la pratique : en second lieu, que cette méthode de résoudre les triangles, est souvent impossible ; savoir, quand le triangle à résoudre a quelque côté extrêmement grand ou extrêmement petit, par rapport aux autres côtés ; parce qu'alors il est comme impossible de faire un petit triangle qui soit assez exactement semblable au grand ; & que les résultats que l'on trouve, s'éloignent presque toujours très-considérablement du vrai résultat, tantôt en plus & tantôt en moins.

La Trigonométrie nous apprendra à résoudre les mêmes problêmes & une infinité d'autres, par le simple calcul arithmétique, avec la plus rigoureuse précision, & sans crainte d'aucune autre erreur, que celle qui peut se trouver dans quelqu'un des angles ou des côtés donnés ; quelle que soit l'inégalité des côtés & des angles, dans les triangles à résoudre & qu'on résout immédiatement en eux-mêmes.

# PRINCIPES
## *DU CALCUL*
## ET DE LA GÉOMÉTRIE,
OU
## *ÉLÉMENS DE MATHÉMATIQUES,*
## GÉOMÉTRIE.

### SECOND TRAITÉ.

#### *Les Surfaces, ou la Planimétrie.*

431. Définition. Les surfaces sont ou planes ou courbes. Une *surface plane* est une figure qui n'a ni enfoncement, ni élévation, entre ses côtés; ou une figure qui seroit touchée dans tous les points par une ligne droite indéfinie, laquelle feroit une révolution autour d'un des points de la surface pris pour centre: telle est sensiblement la surface des miroirs ordinaires, ou d'un bassin d'eau tranquille. Une *surface courbe* est une figure dont l'aire (380) est formée d'une infinité de points inégalement élevés ou enfoncés: telle est la surface convexe d'une boule, ou la surface concave d'une bombe ou d'un globe de verre creux.

La planimétrie a pour objet & les surfaces planes qu'elle mesure en elles-mêmes, & les surfaces courbes qu'elle mesure par leur rapport avec les surfaces planes.

La *planimétrie* est proprement l'art de mesurer les surfaces planes : elle les mesure en elles-mêmes. Quant aux surfaces courbes, elles se mesurent par leur rapport avec certaines surfaces planes, dont la mesure est connue. Ainsi la planimétrie a pour objet, ou directement ou indirectement, la mesure de toutes les surfaces. Nous traiterons des surfaces courbes dans la stéréométrie : il ne sera ici question que des surfaces planes.

Les surfaces planes peuvent être envisagées ou dans *leur égalité*, ou dans *leur rapport*, ou dans *leurs sections :* nous allons les considérer sous ce triple point de vue.

## ARTICLE PREMIER.

### *ÉGALITÉ DES SURFACES.*

Nous traiterons d'abord du quadrilatere, & ensuite des polygones. Les triangles trouveront leur place dans ce que nous avons à dire & sur le quadrilatere, & sur les polygones.

## PARAGRAPHE PREMIER.

### *DU QUADRILATERE.*

432. DÉFINITION. LE *quadrilatere* est une figure ou surface plane, terminée par quatre lignes droites. Le quadrilatere prend différens noms, selon la qualité de ses angles & de ses côtés.

I°. On le nomme *parallélogramme*; lorſque ſes côtés oppoſés ſont paralleles. ABCD eſt un parallélogramme, auſſi bien que BEFC. (*fig.* 58.)

II°. On le nomme *quarré*; s'il a tous ſes côtés & tous ſes angles égaux. ABFG eſt un quarré. (*fig.* 1.)

III°. On le nomme *rectangle*; s'il a tous ſes angles droits, & ſeulement ſes côtés oppoſés égaux. ABCD eſt un rectangle. (*fig.* 57.)

IV°. On le nomme *trapeze*; s'il n'a aucun de ſes côtés paralleles, ou s'il n'en a que deux. ABCD eſt un trapeze. (*fig.* 51.)

V°. On le nomme *lozange* ou *rhombe*; s'il a tous ſes côtés égaux, & ſeulement ſes angles oppoſés égaux. ABCD eſt un lozange. (*fig.* 60.)

VI°. On le nomme *rhomboïde*; lorſque ſes angles ne ſont point droits, & que ſes ſeuls côtés oppoſés ſont égaux. ABCD eſt un rhomboïde. (*fig.* 59.)

433. REMARQUE. Il ſuit de ces définitions que le terme de *quadrilatere*, eſt un nom générique par rapport à toutes les figures terminées par quatre lignes droites, & par conſéquent par rapport au parallélogramme & au trapeze : que le nom de *parallélogramme*, eſt auſſi un nom générique, par rapport au quarré, au rectangle, au lozange, au rhomboïde.

434. DÉFINITION. Une ligne droite, tirée d'un angle d'un quadrilatere quelconque, à l'angle oppoſé, s'appelle *diagonale*. Par exemple, dans le quadrilatere ABDCA, les lignes AD & BC, ſont deux diagonales (*fig.* 51). De même, AC & BC, ſont deux autres diagonales. (*fig.* 57, 59.)

Un quadrilatere quelconque ſe déſigne & ſe marque indifféremment, ou par quatre lettres, placées aux ſommets des angles; ou ſeulement par deux lettres AD, qu'on place au ſommet de deux angles oppoſés. (*fig.* 59.)

Aa

## THÉORÊME I.

435. *Dans tout quadrilatere, la somme des quatre angles, est égale à quatre angles droits.* (fig. 51.)

DÉMONSTRATION. Soit le quadrilatere ABCD. Si on tire la diagonale AD, elle divisera le quadrilatere en deux triangles, dont les angles seront formés des angles même du quadrilatere.

Or dans tout triangle, les trois angles sont égaux à deux angles droits (384): donc la somme des angles des deux triangles ADB & ADC, vaudra quatre angles droits: donc la somme des quatre angles du quadrilatere, égale aux angles de ces deux triangles, vaut aussi quatre angles droits. C. Q. F. D.

## THÉORÊME II.

436. *La diagonale divise un parallélogramme quelconque, en deux parties égales, ou en deux triangles égaux en tout.* (fig. 59.)

DÉMONSTRATION. Soit un parallélogramme quelconque ABCD. La diagonale BC divise ce parallélogramme en deux triangles, dont les trois angles & les trois côtés sont égaux en tout. Car,

1°. Par l'hypothese, & par la définition du parallélogramme, le côté AB du premier triangle est égal au côté CD du second: le côté AC est égal au côté BD: le côté BC est commun aux deux triangles.

De même par l'hypothese (432), l'angle A du premier triangle, est égal à l'angle D du second. Ensuite l'angle ABC du premier est égal à l'angle BCD du second: puisqu'ils sont alternes-internes (359). Par la même raison, l'angle ACB du premier triangle est égal à l'angle DCB du second: donc les deux triangles ABC & DBC sont égaux en tout.

III°. On peut démontrer aussi la même proposition, par la *preuve de superposition* (10). Placez par la pensée, D sur A, DC sur AB : alors (392) DB tombera sur AC, & BC sera commun aux deux triangles ; donc ces deux triangles ABC & DBC sont égaux en tout. C. Q. F. D.

## PROBLÊME.

437. *Faire un parallélogramme qui ait ses côtés égaux aux lignes données* M & N ; *& un angle égal à l'angle donné* O. (fig. 59.)

SOLUTION. I°. Sur un point quelconque A, menez une ligne indéfinie AC ; & sur cette ligne, faites l'angle A égal à l'angle donné O (344). Après quoi, sur les côtés indéfinis AC & AB de l'angle A, prenez AC égal à la ligne donnée M ; & AB égal à l'autre ligne donnée N.

II°. Ensuite du point C, tirez la ligne indéfinie CD, parallele au côté AB (363) ; & sur cette parallele indéfinie, prenez CD=AB : vous aurez le troisieme côté CD du parallélogramme. Après quoi, du point B menez au point D, la droite BD : elle sera le quatrieme côté du parallélogramme à construire.

## *ÉLÉMENS DES SURFACES.*

438. OBSERVATION. Comme la ligne est composée de points contigus ; de même la surface est composée de lignes posées les unes à côté des autres. Or comme on ne peut concevoir que des points sans aucune étendue quelconque, forment une longueur ; de même on ne peut concevoir que des lignes sans aucune largeur quelconque, forment une surface (*Phys.* 47 & 65). C'est pourquoi il faut considérer ces lignes contiguës, qui forment une surface, comme ayant

une largeur extrêmement petite, qui soit la même dans chacune.

Ainsi le *point mathématique* doit être considéré ou comme un petit quarré ou comme un petit cercle, moindres que tout ce qu'on peut imaginer de plus petit; & la *ligne mathématique*, comme une suite de petits cercles ou de petits quarrés, égaux chacun au point mathématique. Si les quarrés de la ligne AB sont infiniment petits; ce sera une ligne mathématique, composée d'une infinité de points mathématiques. (*fig.* 10.)

I°. Les *élémens des surfaces* en général, sont des lignes d'une largeur infiniment petite & égale dans chacune de ces lignes; en telle sorte que cent millions de ces lignes contiguës dans une surface quelconque X, forment une largeur précisément égale à la largeur que forment cent millions d'autres lignes contiguës dans une autre surface quelconque Y. L'inégale densité des corps, leur plus ou moins de pores, ne change en rien la nature de ces lignes géométriques: parce qu'on fait ici abstraction de ces inégalités; & que l'on considere tous les corps comme sans pores, & leurs lignes élémentaires, comme non interrompues par des vuides.

Ces lignes, élémens des surfaces, sont considérées par les géometres, comme des *élémens indivisibles*: parce que n'ayant qu'une largeur infiniment petite, dont on fait abstraction, on les regarde comme indivisibles selon leur largeur; quoique dans le fond elles puissent absolument être divisées même selon cette dimension.

II°. Les *élémens d'un parallélogramme*, sont une infinité de lignes paralleles & égales à la base, lesquelles remplissent l'espace compris entre ses côtés. Cet espace s'appelle surface, superficie, ou aire. Le nombre de ces élémens se mesure dans les parallélogrammes, par une *perpendiculaire à la base*, qui est la *hauteur* du pa-

rallélogramme. De ſorte que ſi la hauteur d'un parallélogramme, eſt double de la hauteur d'un autre parallélogramme ; le nombre des élémens du premier, eſt double du nombre des élémens du ſecond : ſi la hauteur eſt triple, le nombre des élémens eſt triple, & ainſi du reſte. La ligne AB meſure le nombre des élémens du parallélogramme ABCD. (*fig.* 57.)

III°. Les *élémens d'un triangle*, ſont une infinité de lignes paralleles à la baſe, qui ſont d'autant plus courtes, qu'elles ſont plus éloignées de la baſe. Le nombre de ces élémens ſe meſure dans le triangle, comme dans le parallélogramme, par une *perpendiculaire* tirée du ſommet du triangle ſur la baſe, prolongée s'il le faut. La ligne AB meſure le nombre des élémens du triangle ACB. (*fig.* 57.)

IV°. Les *élémens d'un cercle* ſont une infinité de circonférences concentriques ; c'eſt-à-dire, qui ont le même centre que le cercle. Dans le cercle, le nombre des circonférences concentriques qui en ſont les élémens, eſt meſuré par le *rayon :* parce que le cercle étant rempli de circonférences, il eſt clair que le nombre des circonférences eſt égal au nombre des points du rayon. La ligne CA meſure le nombre des élémens du cercle ADA. (*fig.* 54.)

V°. Les *élémens des autres ſurfaces*, comme des trapeſes, des polygones, des ſecteurs de cercle, ſont une infinité de lignes que l'on peut réduire à celles des figures précédentes : ainſi qu'on le verra par la ſuite de cet ouvrage.

Comme nous ferons aſſez fréquemment uſage de cette *méthode des indiviſibles ;* il eſt à propos d'en donner ici une idée ſuffiſamment développée. Cette méthode doit ſon origine & ſon ſuccès à un célebre géometre du dernier ſiecle, à Bonaventure Cavalleri, natif de Milan, de l'ordre des Hiéronimites, qui la publia en 1635 dans un ouvrage latin, ſous un titre

qui répond à celui de géométrie des indivisibles dans le continu. Cavalleri imagine *le continu* (Phy. 44.) comme composé d'un nombre infini de parties qui sont ses derniers élémens, ou qui sont les derniers termes de la décomposition qu'on peut en faire, en le divisant continuellement en tranches paralleles entre elles. Ce sont ces derniers élémens qu'il appelle *indivisibles*; & c'est dans le rapport selon lequel ils croissent ou décroissent, qu'il cherche la mesure des figures, ou leur rapport entre elles. Voici comment nous concevons ces élémens des surfaces, que nous envisagerons aussi dans la suite comme élémens des solides. (*fig.* 57.)

VI°. Si dans le rectangle ABCD, par exemple, on conçoit que les deux lignes BC, *bc*, soient paralleles & infiniment près l'une de l'autre, sans être contiguës; l'infiniment petit espace compris entre ces deux lignes, ou une ligne d'une infiniment petite largeur qui couvriroit cet espace, sera un *élément du rectangle* ABCD ou du triangle ACB. Or il est clair qu'un nombre indéterminé d'élémens semblables, tous égaux & tous contigus, formera la surface du rectangle ABCD. (*fig.* 57.)

Quoiqu'on ne puisse pas déterminer le *nombre absolu* de ces élémens infiniment petits, dont la somme forme une surface quelconque ABCD : en supposant que la hauteur AB du rectangle soit d'un pouce, & que cette hauteur embrasse un million d'élémens tous égaux à celui dont nous venons de parler; il est clair qu'un autre rectangle de même base & d'une hauteur double, ayant sa surface formée de semblables élémens, en contiendra le double ou deux millions; & qu'un troisieme rectangle qui auroit la hauteur du premier & une base double, auroit le double de surface : puisqu'il auroit le même nombre d'élémens, & que chacun de ces élémens seroit double en longueur; & ainsi du reste. De même (*fig.* 4),

Si dans le quarré ABCDA, on conçoit que les deux lignes *mn*, *rs*, soient paralleles & infiniment près l'une de l'autre ; l'infiniment petite largeur comprise entre ces deux paralleles, ou une ligne d'une infiniment petite largeur qui couvriroit cet espace, sera un *élément de la surface quarrée* ABCDA.

Et si on connoît que l'infiniment petite largeur comprise entre ces deux lignes soit la hauteur infiniment petite d'une tranche plane & infiniment mince *mmxrr* formée dans le cube BF ; cette tranche infiniment mince & considérée comme indivisible dans son infiniment petite hauteur ou épaisseur, sera un *élément du cube* AF. En supposant que la hauteur totale AB du cube, égale à une toise, renferme un billion d'élémens égaux à la tranche *mmxrr* ; il est clair qu'un cube double en hauteur renfermera un nombre double d'élémens semblables, & que chacun de ces élémens sera double en longueur & double en profondeur, ou quadruple en surface ; & que les deux cubes feront entre eux en solidité, comme 1 est à $4 \times 2 = 8$. De même encore (*fig.* 68),

Si dans le triangle ACB, les deux lignes AB, *mn*, sont paralleles & infiniment proches sans être contiguës ; l'infiniment petite surface comprise entre ces deux lignes, ou une ligne d'une infiniment petite largeur qui couvriroit cette infiniment petite surface, sera un *élément de ce triangle*. Et si dans le cercle ADA, les deux circonférences ADA, *mrm*, sont de même infiniment proches sans être contiguës ; l'infiniment petite surface circulaire comprise entre ces deux circonférences, ou une ligne circulaire d'une infiniment petite largeur qui couvriroit cette infiniment petite surface, sera un *élément de la surface circulaire* ; élément qui en se développant, ou en se convertissant en surface rectiligne infiniment peu large, deviendra l'infiniment petit trapese A*mn*B.

VII°. Les oreilles accoutumées à l'ancien langage d'Euclide & d'Archimede, se révolterent contre le langage nouveau de Cavalleri, qui, mal conçu, leur parut peu géométrique. Mais Cavalleri montra & fit sentir que sa méthode ne s'écartoit en rien de la rigueur géométrique; & qu'elle n'étoit au fond que *la méthode d'exhaustion* des anciens simplifiée. En effet, dit l'auteur de l'histoire des Mathématiques, ces surfaces, ces lignes, dont Cavalleri examine les rapports & les sommes, ne sont autre chose que les petits solides, ou les triangles inscrits & circonscrits d'Archimede, poussés à un si grand nombre, que leur différence avec la figure qu'ils environnent, soit moindre que toute grandeur donnée. Mais tandis qu'Archimede, à chaque fois qu'il entreprend de démontrer le rapport d'une figure curviligne avec une autre connue, emploie un long circuit de paroles & un tour indirect de démonstration; le géometre moderne, s'élançant en quelque sorte dans l'infini (238), va saisir par l'esprit le dernier terme de ces divisions & sous-divisions continuelles, qui doivent enfin anéantir *la différence* des figures rectilignes inscrites ou circonscrites, avec la figure curviligne qu'elles renferment.

C'est à peu près ainsi que, quand on détermine la somme d'une progression géométriquement décroissante (295), on suppose le dernier terme égal à zero. Car quoiqu'on ne puisse jamais atteindre à ce dernier terme; l'esprit voit cependant avec évidence, qu'il est plus petit qu'aucune grandeur assignable, quelque petite qu'elle soit: par conséquent, il ne peut le désigner que par zero; puisqu'il n'y a que le rien, qui soit moindre que toute grandeur possible. De même, on doit concevoir les lignes & les surfaces dont Cavalleri fait les élémens des figures ou des solides, comme les dernieres divisions dont nous avons

parlé : ce qui suffit pour corriger ce que son expression peut avoir de dur & de contraire à la rigoureuse géométrie. D'ailleurs il n'est aucun cas dans la méthode des indivisibles, qu'on ne puisse facilement réduire à la forme ancienne de démonstration : ainsi c'est s'arrêter à l'écorce, que de chicanner sur le mot d'indivisibles. Il est impropre, si l'on veut ( *Phys.* 68 ) : mais il n'en résulte aucun danger pour la géométrie ; & loin de conduire à l'erreur, cette méthode a servi à atteindre à des vérités qui avoient échappé jusques-là aux efforts de tous les géometres.

On peut faire contre cette *méthode des indivisibles*, quelques frivoles objections, qui lui sont communes avec toute géométrique théorie de l'infini, théorie adoptée avec tant de succès par les modernes géometres, soit dans la géométrie élémentaire, soit dans la géométrie transcendante ; théorie dans laquelle on regarde & on doit avec raison toujours regarder comme nulle, *toute différence* qui n'est qu'une infiniment petite partie de deux grandeurs que l'on compare entre elles ( 241 ). On verra dans plusieurs articles de ce traité & du traité suivant, quelle élégance & qu'elle facilité cette méthode met dans les démonstrations d'une foule d'objets de la géométrie.

De l'observation que nous venons de faire, & de l'explication simple & lumineuse qui en fixe & l'idée & l'objet, découle la proposition suivante ; dont l'évidence se fait sentir par elle-même, & qu'on peut mettre au rang des axiomes.

439. AXIOME. *Deux figures ou surfaces sont égales entre elles, lorsque les élémens de l'une sont égaux aux élémens de l'autre, & que le nombre de ces élémens est égal dans l'une & dans l'autre :* soit que ces deux figures ou surfaces soient semblables, soit qu'elles soient dissemblables. Par exemple, un triangle & un cercle sont égaux en surface ; si le triangle a le même

nombre de lignes élémentaires, que le cercle; & si toutes les lignes du triangle, sont égales à toutes les lignes correspondantes du cercle.

## THÉORÊME FONDAMENTAL.

440. *Un rectangle, & un parallélogramme obliqu'angle, de même base & de même hauteur, sont égaux en surface.* (fig. 58.)

DÉMONSTRATION. Soit le rectangle ABCD, & le parallélogramme obliqu'angle BCFE: ils ont une même base BC : ils ont aussi une même hauteur; puisqu'ils sont compris entre les mêmes paralleles BCK & ADF.

I°. D'abord le rectangle & le parallélogramme obliqu'angle ont en commun, le triangle ou la partie BOC. Il n'y a donc plus qu'à faire voir que l'autre partie ABOD du rectangle, est égale à la partie EOCF du parallélogramme : ce que je démontre ainsi.

II°. Le triangle ABE, est égal en tout au triangle DCF. Car en premier lieu, la perpendiculaire AB du premier, est égale à la perpendiculaire DC du second : puisque ce sont des côtés opposés d'un rectangle. *En* second lieu, les deux obliques BE & CF, sont aussi égales : puisque ce sont des côtés opposés d'un parallélogramme; & que ces côtés opposés sont nécessairement égaux. En troisieme lieu, les lignes AE & DF, sont encore égales. Car d'abord elles ont une partie commune DE : les deux autres parties AD & EF, sont égales entre elles; puisqu'elles sont égales chacune à la base BC. Par conséquent les trois côtés du premier triangle ABE, sont égaux aux trois côtés du second DCF. Ainsi ces deux triangles sont égaux en tout. (392 & 432.)

III°. Otez donc la partie DOE, qui est commune aux deux triangles : le reste ABOD du premier triangle, sera égal au reste EOCF du second. Or ces restes

ſont les deux parties du rectangle & du parallélogramme obliqu'angle, qu'il falloit démontrer égales : par conſéquent le rectangle & le parallélogramme obliqu'angle ſont égaux. C. Q. F. D.

441. REMARQUE. I°. Si on prend pour élémens du parallélogramme obliqu'angle BCFE, des élémens paralleles à la baſe BC; *les élémens du rectangle & du parallélogramme ſeront évidemment égaux en nombre & en longueur.*

II°. Si on prend pour élémens du parallélogramme obliqu'angle, des élémens paralleles au côté CF, qu'on peut conſidérer comme baſe; *le parallélogramme aura moins d'élémens que le rectangle, mais il les aura plus grands;* & l'excès en grandeur compenſera le défaut en nombre. La hauteur du rectangle ſera toujours AB : la hauteur du parallélogramme obliqu'angle, ſi on prend CF pour baſe, ſera OH. Le parallélogramme obliqu'angle aura donc moins de hauteur, s'il a plus de longueur : l'une peut donc compenſer l'autre. Par exemple,

Que le rectangle ait un pouce de long ſur un pouce de large; & le parallélogramme obliqu'angle, cent pouces de long ſur un centieme de pouce de large. Dans le rectangle, on aura, $1 \times 1 = 1$. Dans le parallélogramme, on aura $100 \times \frac{1}{100} = 1$. (67.)

### THÉORÊME II.

442. *Un triangle quelconque eſt à la moitié d'un parallélogramme de même baſe & de même hauteur.* (fig. 57.)

DÉMONSTRATION. I°. Soit le triangle ABC. Qu'il me ſoit permis de rendre tous les élémens qui le compoſent, égaux en longueur à la baſe BC : j'aurai le parallélogramme ABCD, diviſé en deux parties égales par la diagonale AD (436). Or une de ces parties

égales du parallélogramme, eſt le triangle ABC : donc le triangle eſt la moitié du parallélogramme.

II°. Il eſt clair qu'on peut faire la même démonſtration ſur un triangle quelconque, rectangle, obtusangle, acutangle. Car ſoit le triangle ABC (*fig.* 59). Tirez la ligne CD, égale & parallele au côté AB ; & formez le parallélogramme ABDC. Enſuite tirez par la penſée, des lignes paralleles à la baſe AC, autant qu'il en faudra pour remplir la ſurface du parallélogramme. La diagonale BC diviſera la ſurface de ce parallélogramme en deux parties égales, dont l'une ſera la ſurface du triangle. C. Q. F. D.

## THÉORÊME III.

443. *Un triangle, qui a même baſe qu'un parallélogramme, & qui a une hauteur double, eſt égal en ſurface au parallélogramme.* (fig. 61.)

DÉMONSTRATION. Soit le parallélogramme quelconque ABDC ; & le triangle CED, dont la baſe CD eſt la même que celle du parallélogramme, & dont la hauteur EH eſt double. Il s'agit de démontrer que le triangle & le parallélogramme ſont égaux en ſurface. Pour cela,

I°. Suppoſons un autre parallélogramme CGFD, formé entre les côtés prolongés du premier, & qui ait même baſe & même hauteur que le triangle CED. Ce ſecond parallélogramme CGFD, ſera double du premier CABD : puiſqu'il a évidemment un nombre double d'élémens de même longueur ; ou parce qu'ayant une même longueur CD, il a une hauteur double *EH*.

II°. Cela poſé, je raiſonne ainſi. Le *parallélogramme* ABCD, eſt égal à la moitié du parallélogramme CG FD : comme on vient de le démontrer. Le *triangle* CED, eſt auſſi égal à la moitié du même parallélogramme CGFD ; ſelon le théorême précédent. Donc

le parallélogramme ABDC, & le triangle CED, sont égaux entre eux : puisqu'ils sont égaux chacun en surface, à la *moitié* du parallélogramme CGFD.

III°. On conçoit aisément que la même démonstration auroit lieu, si le triangle ayant toujours la même base CD, portoit son sommet E, en F, ou en G, ou en M, en conservant toujours la même hauteur, ou en aboutissant toujours aux deux mêmes paralleles CD & MF; puisqu'il seroit toujours la moitié du parallélogramme CGFD de même base & de même hauteur (442). Donc dans toute position & sous toute figure possible, un triangle, qui a même base qu'un parallélogramme, & qui a une hauteur double, est égal en surface à ce parallélogramme. C. Q. F. D.

## THÉORÈME IV.

444. *La surface d'un trapese, dont les bases supérieure & inférieure sont paralleles, est égale à un parallélogramme de même hauteur; dont la base seroit égale à une ligne qui couperoit le trapese par le milieu, parallélement à ses deux bases.* (fig. 62.)

DÉMONSTRATION. Soit le trapese CABD, dont les deux bases AB & CD soient paralleles. Tirez la ligne LH, parallele aux deux bases, & également éloignée de l'une & de l'autre base. Du point H, tirez encore la ligne PE, parallele au côté AC (363). Je dis que le trapese CABD est égal en surface, au parallélogramme CAEP.

I°. D'abord le pentagone ACPHB est commun au parallélogramme & au trapese : il reste donc à démontrer que la partie PHD du trapese, est égale à la partie BHE du parallélogramme.

II°. La partie PHD du trapese, est égale à la partie BHE du parallélogramme. Car ces deux triangles sont

égaux en tout, dans leurs angles & dans leurs côtés. D'abord l'angle H, est égal dans l'un & dans l'autre ; puisque ce sont deux angles opposés au sommet. L'angle D & l'angle B sont aussi égaux : puisqu'ils sont alternes-internes. L'angle P & l'angle E sont aussi égaux ; pour la même raison. (359). Ensuite la ligne DH est égale à la ligne BH : puisqu'elles occupent l'une & l'autre, avec le même degré d'inclinaison, la moitié de l'espace compris entre les deux bases parallèles AB & CD. Donc, en donnant pour bases à ces deux triangles, les côtés égaux DH & BH ; on trouvera que les deux triangles BHE & PHD sont égaux en tout. (391.)

III°. Ainsi le trapese & le parallélogramme ont pour partie commune le pentagone ACPHB. Le trapese a de plus le triangle PHD : le parallélogramme a de plus le triangle BHE. Ces deux triangles sont égaux : donc en les ajoutant au pentagone commun, on aura deux touts égaux, qui sont le trapese & le parallélogramme. C. Q. F. D.

## *Mesures des Surfaces.*

445. Observation. *Mesurer une ligne*, ou une étendue en simple longueur, c'est porter sur cette étendue, des mesures connues de même dimension ; par exemple, des pouces, des pieds, des toises, des lieues. *Mesurer une surface*, ou une étendue en longueur & en largeur, c'est porter sur cette étendue, des mesures connues de même dimension, ou des mesures qui aient à la fois & une longueur & une largeur ; par exemple, des pouces quarrés, des pieds quarrés, des toises quarrées, des lieues quarrées.

446. Définition. On nomme *toise quarrée*, une étendue qui a une toise de longueur & une toise de largeur, & dont la figure est un quarré. De même un *pied quarré* est une figure égale à un quarré d'un pied

de longueur & d'un pied de hauteur ou de largeur. (*fig.* 4.)

I°. Si la surface quarrée BADC répréſente une *toiſe quarrée* de ſix pieds de longueur BC, ſur ſix pieds de largeur BA; elle renfermera 36 quarrés, égaux chacun à un pied quarré. Chaque *pied quarré* A, de douze pouces de longueur ſur douze pouces de largeur, contiendra 144 pouces quarrés. Chaque *pouce quarré*, de douze lignes de longueur ſur douze lignes de largeur, contiendra 144 lignes quarrées. On conçoit par-là ce qu'on doit entendre par une *lieue quarrée*, qui eſt un quarré d'une lieue de longueur ſur une lieue de largeur; & ainſi du reſte.

II°. Comme la meſure d'un quarré eſt très-facile à ſaiſir, on tâche de réduire toutes les ſurfaces à des quarrés; & *une ſurface eſt cenſé meſurée, quand on a trouvé & démontré qu'elle eſt égale à un quarré connu*, ou à une figure qu'on réduit facilement en quarré ou dont on connoît le rapport avec un quarré; telle qu'eſt un rectangle: comme on va le voir dans le théorême ſuivant, qui apprenant à évaluer en meſures connues la ſurface d'un rectangle, apprend par conſéquent à évaluer toute ſurface qui ſera égale à ce rectangle, ou à la moitié de ce rectangle; & ainſi du reſte.

## THÉORÊME FONDAMENTAL.

447. *La ſurface d'un rectangle quelconque, eſt égale au produit de ſa baſe par ſa hauteur.* (fig. 63.)

DÉMONSTRATION. I°. Soit le rectangle ABCD, dont la baſe BC contienne quatre toiſes; & dont la hauteur AB en contienne trois. Si on multiplie la baſe $= 4$, par la hauteur $= 3$; le produit ſera 12: il faut faire voir que la ſurface de ce rectangle contient 12 toiſes quarrées.

Pour cela, diviſez le côté ou la hauteur AB en trois toiſes, & la baſe BC, en quatre. Enſuite par les points

de division du côté AB, menez des paralleles à la base; & par les points de division de la base, tirez des paralleles au côté AB. Toutes ces paralleles, en s'entre-coupant, formeront des toises quarrées, disposées en rangs paralleles à la base. Chacun de ces rangs contiendra autant de toises quarrées qu'il y a de toises en longueur dans la base; c'est-à-dire, quatre.

Mais d'ailleurs, il y aura autant de rangs de ces toises quarrées, qu'il y a de toises en longueur dans le côté ou dans la hauteur AB du rectangle; c'est-à-dire, trois. Donc la somme des toises quarrées du rectangle, est égale à 3 fois 4, ou à $4 \times 3$; qui est le nombre des toises de la base, multiplié par le nombre des toises de la hauteur AB.

II°. Si la base BC, au lieu de quatre toises de longueur, en avoit mille, la hauteur AB du rectangle restant la même; on conçoit que cette surface auroit trois rangs de toises quarrées, qui contiendroient chacun mille toises quarrées : ce qui feroit 3000 toises quarrées, produit de la base 1000 par la hauteur 3.

III°. Si la base BC ayant mille toises de longueur, la hauteur AB du rectangle en avoit cent; on conçoit que cette surface auroit cent rangs de mille toises quarrées chacun, ou cent fois mille toises quarrées : ce qui donneroit 100000 toises quarrées, produit de la base 1000 par la hauteur 100; & ainsi de suite à l'infini. C. Q. F. D.

448. COROLLAIRE I. La surface d'un rectangle étant le produit de la base, par la hauteur; il est évident que *ce même produit exprimera la surface de toute figure, égale en surface au rectangle.* Par exemple, quand on aura démontré que tel parallélogramme obliqu'angle, ou que tel triangle, a la même surface que le rectangle; en prenant la mesure du rectangle, on aura celle du parallélogramme ou du triangle, qui lui est égale. D'où il résulte :

I°.

I°. Que *la surface d'un parallélogramme obliqu'angle est le produit de sa base, par sa hauteur*; c'est-à-dire, par une perpendiculaire menée du côté parallele à la base, sur la base : puisque ce parallélogramme est égal en surface à un rectangle de même base & de même hauteur. (440.)

II°. Que *la surface d'un triangle quelconque est le produit de sa base, par la moitié de sa hauteur*; c'est-à-dire, par la moitié d'une perpendiculaire menée du sommet du triangle sur la base, prolongée s'il le faut : puisque ce triangle est la moitié d'un parallélogramme, & par là même d'un rectangle, de même base & de même hauteur. (442.)

III°. Que *la surface d'un trapese dont les deux bases sont paralleles, est le produit d'une moyenne proportionnelle arithmétique entre les deux bases, par sa hauteur.*: puisque ce trapese CABD, est égal en surface au parallélogramme CAEP (444), lequel est égal en surface à un rectangle de même base & de même hauteur. (*fig.* 62.)

La ligne LH, égale à la base CP du parallélogramme, est moyenne proportionnelle arithmétique entre la base supérieure & la base inférieure du trapese : c'est-à-dire, que la base CD, surpasse la ligne LH; autant que la ligne LH, surpasse la base AB : de sorte que la somme des deux bases AB & CD est égale à la moyenne proportionnelle arithmétique LH, prise deux fois; & qu'en prenant la moitié de la somme des deux bases, on a la moyenne proportionnelle arithmétique LH. (185.)

IV°. Que *si aucun des côtés du trapese* ABDCA, *n'est parallele au côté opposé*; il faut tirer une diagonale d'un angle quelconque à l'angle opposé. La diagonale AD ou BC divisera la surface du trapese en deux triangles égaux ou inégaux, qu'on mesurera chacun séparément pour en avoir la surface. La somme

des deux surfaces de ces deux triangles ACB & CBD, sera la surface totale du trapese. (*fig.* 51.)

449. Corollaire II. *Si on a plusieurs rectangles, ou plusieurs parallélogrammes obliqu'angles de même hauteur; on trouve la somme de leurs surfaces, en multipliant la somme des bases par une seule hauteur.* (fig. 63.)

Démonstration. I°. Soient plusieurs rectangles égaux ou inégaux AB*nn*, *nnrr*, *rr*DC, renfermés entre les paralleles AD & BC : ils auront la même hauteur AB ou *nn*. Multipliez la base totale BC, par la hauteur d'un de ces rectangles, par exemple, par la hauteur *nn* : vous aurez la surface de tous ces rectangles; selon le théorême précédent.

II°. Plusieurs parallélogrammes obliqu'angles, de même base & de même hauteur que ces rectangles, leur seroient égaux en surface, chacun à chacun (440) : donc en multipliant la base totale de tous ces parallélogrammes obliqu'angles par la hauteur commune d'un d'entre eux, on aura la surface totale de tous ces parallélogrammes obliqua'ngles.

III°. Il est indifférent que ces parallélogrammes, rectangles ou obliqu'angles, soient contigus ou séparés : puisqu'il est évident qu'en séparant les rectangles AB*nn*, *nnrr*, *rr*CD, on ne leur donne ni plus ni moins de surface. Par exemple (*fig.* 16) :

Soient les rectangles séparés *a* AB*b*, *m*MNH, T*r*S*x*, renfermés entre les mêmes paralleles CT & AR. Il est évident qu'en multipliant AB + MN + *r*S, par une hauteur *a*A ou *m*M, on aura la surface totale de ces trois rectangles; & qu'on auroit de même la surface totale de trois parallélogrammes obliqu'angles, tels que TRV*x*, qui auroient même base & même hauteur que chacun de ces rectangles. C. Q. F. D.

450. COROLLAIRE III. *Si on a plusieurs triangles de même base & de même hauteur ; on trouve la somme de leurs surfaces en multipliant la somme des bases par la moitié d'une hauteur.* (fig. 16.)

DÉMONSTRATION. Soient les triangles ACB, MHN, RTS, qui ont une même hauteur, étant renfermés entre les mêmes paralleles CT & AS. Ces triangles sont chacun respectivement la moitié d'un parallélogramme de même base & de même hauteur (442), lequel est égal en surface au rectangle de même base & de même hauteur *ab* BA, ou *m* HNM, ou T *r* S *x* (440) : donc ces triangles sont la moitié de ces rectangles. Or en multipliant toutes les bases de ces rectangles, par une seule hauteur, on a la somme des surfaces de ces rectangles (449) : donc en multipliant toutes ces mêmes bases, par la moitié d'une hauteur ; on aura un produit de moitié plus petit (221), qui exprimera la surface de tous ces triangles. C. Q. F. D.

451. REMARQUE. Quand on a, en nombres ronds & en grandeurs homogenes, la base & la hauteur d'un rectangle, d'un parallélogramme obliqu'angle, d'un triangle ; il est facile de trouver la surface de ces figures : puisqu'il ne s'agit que de multiplier le nombre qui exprime la base, par le nombre qui exprime la hauteur ou la moitié de la hauteur ; comme on vient de l'expliquer & de le démontrer.

Mais il arrive très-fréquemment que les deux dimensions, la base & la hauteur, ne sont pas des mesures ou des grandeurs en tout homogenes : par exemple, la base sera de 18 toises & 4 pieds ; & la hauteur, de 7 toises & 5 pouces. Alors, pour trouver la surface de ces figures ; il faut chercher le produit de la base par la hauteur, ou par la voie des parties aliquotes (70) ; ou par une autre méthode que nous donnerons bientôt, & qui a beaucoup de rapport avec les parties aliquotes. (462.)

## PROBLÈME I.

452. *Mesurer la surface d'une petite étendue de pays, par exemple, d'un pré ou d'un champ.*

SOLUTION. I°, Si le terrein à mesurer, est un parallélogramme rectangle ou obliqu'angle, dont on puisse prendre tout d'un coup, & la longueur qui sera la base, & la largeur qui sera la hauteur; il est facile d'en trouver la surface. Par exemple (*fig.* 57),

Soit ABCD le terrein à mesurer. D'abord prenez le côté BC pour base; & ayant tendu une ficelle de B en C, mesurez, la perche à la main, la longueur ou la base BC, sur la ficelle en ligne droite. Ensuite, d'un point quelconque C de cette base, menez perpendiculairement sur le côté opposé AD du parallélogramme, une autre ficelle CD; & avec la même perche, mesurez la longueur de la perpendiculaire CD, qui sera la hauteur du parallélogramme ABCD. Le produit de la base BC, par la hauteur CD, sera la surface du terrein à mesurer ABCD. (448.)

II°. Si le terrein à mesurer est irrégulier, en telle sorte que sa figure ne soit ni un parallélogramme, ni un trapese, ni un triangle; observez qu'il n'y a aucun terrein que vous ne puissiez réduire en triangles, en le divisant en parties égales ou inégales. Par exemple (*fig.* 64),

Soit le terrein à mesurer, l'espace ou la figure ABFGKIECDA. En plantant des piquets ou des jallons dans tous ces points; vous aurez votre terrein divisé en huit triangles, que vous mesurerez chacun séparément; comme vous avez mesuré le parallélogramme précédent.

Menez donc une ficelle tendue en ligne droite, de A en B; & mesurez exactement, la perche à la main, cette ligne AB que vous prendrez pour base.

Ensuite du point ou du piquet C, menez une autre ficelle perpendiculairement sur la base AB, prolongée s'il le faut; & mesurez, la perche à la main, cette perpendiculaire, qui sera la hauteur du triangle ABC. Après quoi multipliez la base AB, par la moitié de la perpendiculaire menée du point C sur la base AB: le produit sera la surface du triangle ABC. (448. II°.)

En opérant de la même maniere sur le triangle BDF, & sur chacun des autres triangles; vous trouverez la surface de chacun des huit triangles: la somme de ces huit surfaces, est la surface du terrein à mesurer.

III°. Ce problême est, comme on voit, la regle & le fondement de l'*arpentage*, qui n'est autre chose que l'art géométrique de mesurer & d'évaluer en arpens quarrés, la superficie d'un terrein renfermé entre certains points donnés, & entre certaines lignes droites menées par ces points. La dénomination d'arpentage a été donnée en France, à cette petite partie de la géométrie pratique: parce que l'*arpent* (7. V°.) y est la mesure la plus usitée dans les dimensions des terreins un peu considérables.

Les problêmes suivans seront de même la regle & le fondement de la *topographie*, qui n'est autre chose qu'un arpentage plus en grand, ou que l'art géométrique de prendre & de tracer les dimensions d'un pays plus ou moins étendu, tel qu'une province ou un royaume. Topographie: de τοπός, *locus*, *regio*; & de γράφω, *scribo*.

## PROBLÊME II.

453. *Mesurer la surface d'une Province ou d'un Royaume.* (fig. 64.)

SOLUTION. Pour mesurer la surface d'une province ou d'un royaume, il faut diviser cette surface en plusieurs triangles, comme dans l'exemple

précédent, par le moyen de certains signaux placés en des lieux élevés, par exemple, au sommet des collines, des montagnes, de certains édifices remarquables ; & trouver la surface de chaque triangle à part. Ces triangles ABC, KID, seront formés par des rayons visuels dirigés d'un signal à l'autre, par le moyen des graphometres. Par exemple, un graphometre étant placé en A, & un autre graphometre en B (420) ; du point A, on dirigera à travers les pinnules, un rayon visuel vers le signal de la montagne B, & un autre rayon visuel vers le signal de la montagne C : ensuite du point B, on dirigera de même un rayon visuel vers le signal de la montagne A, & un autre rayon visuel vers le signal de la montagne C. En prenant sur le graphometre la mesure des angles A & B (423), on aura un triangle ABC, dont on connoît les trois angles. On peut mesurer de la même maniere les angles de tout autre triangle CDE, FKD. Ainsi,

I°. Il faut d'abord trouver la distance d'un signal à l'autre : afin que cette distance quelconque AB puisse servir de base connue dans le triangle ABC. Pour trouver cette distance AB, choisissez dans un terrein bien uni, deux stations *a* & *b* ; dont vous mesurerez la distance *ab*, la perche à la main, avec toute la précision possible. Après quoi vous placerez un graphometre en *a*, & un autre graphometre en *b* ; & par le moyen du triangle A*a*B, vous trouverez la distance AB. (426.)

II°. La distance AB étant connue, vous irez en A & en B, mesurer avec le graphometre, les angles ABC & BAC. Dans le triangle ABC, vous connoissez la base AB, & les deux angles formés sur cette base : vous connoîtrez donc tout le triangle. (417.)

III°. Par le moyen d'un graphometre placé en B, dirigez un rayon visuel en C, & un autre rayon visuel

en D; & mesurez sur le graphometre l'angle CBD. Par le moyen d'un autre graphometre ou du même graphometre placé en C, dirigez un rayon visuel en B, & un autre rayon visuel en D, où vous aurez fait placer auparavant un signal; & mesurez l'angle BCD. Vous aurez le triangle CDB, dont vous connoissez la base CB, qui est un côté du triangle précédent, & les deux angles sur cette base: vous connoîtrez donc encore tout le triangle; & le côté BD deviendra la base connue du triangle BDF que vous mesurerez de même. Le côté DF étant connu, il servira de base à son tour au triangle suivant DKF; & ainsi de suite à l'infini.

IV°. Par ce moyen vous connoîtrez tous les triangles qu'on peut former sur la surface d'une province ou d'un royaume; & en multipliant la base de chaque triangle par la moitié de sa hauteur, vous aurez la surface de chaque triangle (448). En prenant ensuite la somme des surfaces de tous ces triangles, vous aurez la surface de toute la province ou de tout le royaume à mesurer: puisque cette surface n'est point distinguée de celle de tous les triangles que vous avez formé sur elle, & qui l'embrassent toute entiere.

On verra dans la Trigonométrie, comment on peut trouver par le calcul, & sans le secours d'un triangle semblable en petit, la surface de chaque triangle mesuré en grand sur le terrein. (704.)

454. REMARQUE. Nous supposons ici que toutes les stations A, B, C, D, I, & ainsi du reste, sont de niveau, ou à égale distance du centre de la terre. Nous montrerons ailleurs comment il faut s'y prendre, pour éviter les erreurs plus ou moins notables, que peut occasionner l'inégalité de hauteur dans les points que l'on prend pour stations. (538.)

## PROBLÊME III.

455. *Lever la carte d'un pays.* (fig. 65.)

SOLUTION. I°. Prenez & mesurez exactement une grande base AB, d'où vous puissiez appercevoir les objets les plus remarquables de ce pays, tels que les villes, les bourgs, les villages, les principaux côteaux; que l'on suppose désignés par les lettres C, D, E, F, G, H. On peut mesurer cette base AB, ou la perche à la main, si le terrein est uni & accessible; ou par le secours de la longimétrie (424), si on ne peut pas aller en ligne droite du point C au point D. Ces deux points doivent être marqués par des jallons & par des signaux.

II°. Au point A placez un graphometre, dont deux pinnules soient persévéramment dirigées vers le point B; & tandis que l'alidade se dirigera avec ses deux autres pinnules vers tous les objets visibles; prenez & marquez exactement la grandeur des angles que forment sur ce graphometre A les rayons visuels qui passent par les pinnules, savoir les angles CAB, *DAB*, EAB, FAB, GAB, HAB; & ainsi du reste.

III°. Au point B placez le même graphometre ou un autre graphometre, dont deux pinnules soient persévéramment dirigées vers le point A; & tandis que les deux autres pinnules de l'alidade mobile se portent vers les objets remarquables & déjà remarqués, prenez exactement sur ce graphometre B les angles CBA, DBA, EBA, FBA, GBA, HBA. Vous aurez dans tous ces triangles, une base AB, que vous avez mesurée sur le terrein; & deux angles, que vous avez mesurés sur le graphometre: donc vous connoîtrez tout dans ces triangles. (417.)

IV°. Il ne reste donc plus qu'à *rapporter ces trian-*

*gles* sur une plus ou moins grande feuille de papier, en les traçant en petit; & en donnant à tous les objets qui les terminent, la même position respective qu'ils ont sur le terrein. Pour cela, ayez une échelle exactement divisée en parties égales, plus ou moins grandes (411); & tirez sur le papier où vous voulez tracer la carte, une ligne AB, qui ait autant de parties égales, que la base mesurée sur le terrein, a de toises.

Après quoi, tracez au point A, en lignes indéfinies, par le moyen du rapporteur, les mêmes angles CAB, DAB, que vous avez trouvés sur le terrein: tracez de même au point B, les mêmes angles CBA, DBA, &c, que vous avez trouvés sur le terrein. Ces lignes indéfinies, AC & BC, AD & BD, & ainsi du reste, vont s'entre-couper en C, en D, en E, en F, en G, en H, en C; & l'intersection de ces lignes vous donnera la position respective de tous les objets qu'il falloit tracer sur la carte: puisque cette carte renferme une foule de triangles respectivement semblables aux triangles qu'on a mesuré sur le terrein. On aura de la même maniere, la position respective des objets placés dans les intersections *a*, *b*, *c*, *d*.

V°. On conçoit que si on fait la même opération sur toutes les lignes de la figure 64, en prenant pour base la ligne quelconque AB; on aura la position respective de tous les objets remarquables qui sont placés dans l'enceinte de tous les triangles qui forment cette province ou ce royaume. En rapportant & ces triangles & tous les objets remarquables qu'ils contiennent, sur la toile ou sur le papier, avec leurs angles respectifs; on aura la carte géographique de cette province ou de ce royaume.

*LA PLANCHETTE, LA BOUSSOLE.*

456. REMARQUE. Il y a une autre maniere de lever

des plans, qui est d'autant plus commode qu'elle exige peu d'appareil, & qu'en même tems qu'on observe les différens points dont on veut avoir les positions, on les trace sur le plan sans les perdre de vue.

I°. L'instrument qu'on emploie pour cet effet, est une planche d'environ un pied & demi de longueur & de largeur, portée sur un pied, comme le graphometre. Sur cette planche on étend une feuille de papier, qu'on arrête par le moyen d'un chassis qui entoure la planche. Sur ce papier & sur la planche, on fixe par le moyen d'une vis, une grande regle ou alidade, garnie de pinnules, qui puisse en roulant sur son centre, se diriger vers les objets qu'on veut tracer sur le papier. Cet instrument s'appelle *planchette*. Une simple table ordinaire peut tenir lieu de la planche dont nous venons de parler. (*fig.* 55.)

Pour lever un plan par le moyen de cet instrument; après avoir mesuré une base AB, placez la planchette en A, & élevez un piquet ou un jallon en B. Donnez d'abord à l'alidade A, la direction AB; & tracez sur le papier une ligne indéfinie AB, à laquelle vous donnerez autant de parties AB de l'échelle du plan (411), que vous avez trouvé de mesures, de toises, par exemple, dans la base AB sur le terrein. Ensuite laissant la planchette ou la table dans sa même position, faites tourner sur son centre l'alidade A vers C, vers D, vers E, vers F, vers G, vers H; & tracez sur le papier & le long de l'alidade, les lignes AC, AD, AE, AF, AG, AH, A*a*, A*b*, A*c*, A*d*.

Après cela, prenez avec un fil à plomb, le point précis A du plan; & ôtant votre planchette, élevez un jallon dans ce point. Portez ensuite votre planchette ou votre table en B; & faites ensorte que la ligne AB de votre plan, soit placée dans la direction AB des jallons BA. Fixez la regle mobile au point B; & la dirigeant vers les mêmes objets que ci-dessus,

menez successivement les lignes BC, BD, BE, BF, BG, BH, B*a*, B*b*, B*c*, B*d*: les intersections de ces lignes vous donneront sur le papier, la position respective de tous les objets observés sur le terrein.

II°. Pour *orienter le plan* ainsi levé & tracé, ou pour trouver quelle est la direction d'une ligne quelconque AB de ce plan vers le nord & le midi, vers l'orient & vers l'occident; on se sert communément d'une *boussole*, dont l'aiguille aimantée se dirige vers le nord & le midi sous un angle de déclinaison qu'on connoît ou qu'on trouvera aisément. (*Phy.* 592.)

Quand on leve un plan par le moyen du graphometre; la position de l'aiguille aimantée *ab*, fait voir aisément (420) quelle est la direction de la ligne AB ou CM. (*fig.* 5.)

Quand on leve un plan par le moyen de la planchette; on se sert, pour l'orienter, d'une boussole de figure rectangulaire MN (*fig.* 9) qu'on pose sur la planchette même, au tems où on le leve. On pose le point M de la boussole, sur un point de la ligne du plan qui joint les deux stations; & on fait tourner la boussole sur ce point fixe M, jusqu'à ce que l'aiguille aimantée fasse l'angle précis *acs* de déclinaison qu'elle doit former en ce lieu sur la méridienne *sv*. Après quoi on tire sur le plan parallélement au côté MN, une ligne indéfinie MNX: cette ligne oriente le plan, & en marque le nord & le midi. Une perpendiculaire à cette ligne, en marquera l'orient & l'occident.

On peut aussi & plus sûrement encore orienter un plan, par le moyen du seul graphometre & sans le secours de la boussole; en dirigeant le soir l'alidade vers le pole arctique, & en mesurant l'angle que fait l'axe ou la direction du graphometre sur la ligne des deux stations. (*Phy.* 1355.)

## PROBLÊME IV.

457. *Mesurer la surface d'une province ou d'un royaume, sur la carte géographique.* (fig. 64 & 65.)

SOLUTION. Divisez cette carte en parallélogrammes ou en triangles ; & remarquez combien chaque parallélogramme ou chaque triangle contient dans sa base & dans sa hauteur, de parties égales de l'échelle. Si la carte est exacte, le pays qu'elle représente doit avoir autant de lieues quarrées, que la carte contient de mesures quarrées marquées par l'échelle, supposé que l'échelle marque des lieues.

Ainsi en multipliant la base de chaque parallélogramme par sa hauteur, vous aurez la surface de chaque parallélogramme. En multipliant aussi la base de chaque triangle par la moitié de sa hauteur, vous aurez la surface de chaque triangle. En prenant enfin la somme de tous ces produits, vous aurez la surface de la province ou du royaume que représente la carte.

## PROBLÊME V.

458. *Faire un quarré égal en surface à un parallélogramme donné.*

SOLUTION. La surface d'un parallélogramme étant le produit de la base multipliée par la hauteur ; il faut chercher une moyenne proportionnelle à ces deux lignes (414) : cette moyenne proportionnelle, multipliée par elle-même, donnera un produit qui *sera* un quarré égal au produit des deux autres lignes, qui sont les deux extrêmes de la proportion.

## PROBLÊME VI.

459. *Faire un quarré égal en surface à un triangle donné.*

SOLUTION. La surface d'un triangle étant la base multipliée par la moitié de la hauteur (448); il faut chercher une *moyennne proportionnelle* à ces deux lignes (414) : cette moyenne proportionnelle multipliée par elle-même, donnera un produit qui sera un quarré égal en surface au produit des deux autres lignes.

Le quarré est la mesure la plus simple des surfaces : une figure ou une surface est censé mesurée, quand elle est réduite à un quarré dont on connoît une dimension.

## *TOISÉ DES SURFACES.*

460. DÉFINITION. Le *toisé des surfaces* est l'art géométrique d'évaluer en toises quarrées & en portions de toises quarrées, une surface plane dont les deux dimensions, la longueur & la largeur, sont trouvées ou données en toises ou en portions de toises.

I°. Quand une surface, qu'il faut évaluer, ne contient dans ses deux dimensions que des grandeurs homogenes, par exemple, des toises; on l'évalue aisément en prenant le produit de la base par la hauteur : ce produit exprime en toises la valeur de la surface. Il en seroit de même si la surface ne contenoit que des pieds, ou que des lieues, dans ses deux dimensions : en multipliant les deux dimensions indifféremment l'une par l'autre, on auroit un produit qui exprimeroit en pieds, ou en lieues, la valeur de la surface.

II°. Mais il est fort rare que les deux dimensions d'une surface soient en tout homogenes. Par exemple, dans un rectangle qu'il faut évaluer, la base sera de 24 toises 2 pieds 8 pouces : la hauteur sera de 16 toises 10 pouces : & alors cette évaluation devient plus compliquée & plus difficile.

On peut évaluer cette surface, en réduisant à la

plus petite espece les deux dimensions, qu'on multiplie l'une par l'autre, & en divisant le produit par le quarré du nombre qui exprime combien de fois la plus grande espece contient la plus petite en laquelle ont été réduites les deux dimensions. (58.)

Mais comme la méthode de réduire les deux dimensions à la plus petite espece, est fort embarrassante pour le calcul; en voici une autre qu'on lui a substituée: elle est fondée sur une maniere de diviser la toise quarrée, qui ne differe point de la toise courante.

461. EXPLICATION. Soit la toise quarrée ABCDA. (*fig.* 4.)

I°. Je divise le côté AB en six parties égales, qui valent chacune un pied; & des points de division, je mene des paralleles à la base, sur l'autre côté DC: ce qui divise la toise quarrée en six rectangles égaux, que l'on nomme *pieds de toises quarrée;* parce qu'ils ont chacun un pied de hauteur, & une toise de base.

II°. Je divise de même la hauteur *mn* de chaque pied de toise quarrée, en douze rectangles *mm*, *rr*, *nn*, que l'on nomme *pouces de toises quarrée:* parce qu'ils ont chacun un pouce de hauteur, & une toise de base.

III°. Je divise de même encore chaque pouce *mr* de toise quarrée, en douze rectangles, qui seront des *lignes de toise quarrée:* parce qu'ils ont une ligne de hauteur, & une toise de base.

Cette division de la *toise courante*, ou de la toise en longueur, convient très-bien, non-seulement au calcul, mais encore à la nature des choses. Car *il est* visible que lorsqu'on multiplie une toise de *longueur*, par un pied de hauteur; par exemple, le produit n'est ni un pied, ni une toise, mais un rectangle AD d'une toise de base & d'un pied de hauteur, ou un sixieme de la toise quarrée. De même, si on multiplie une toise par quatre pouces; il est évident que le produit

n'eſt ni une toiſe ni quatre pouces, mais un rectangle *mm* d'une toiſe de baſe & de quatre pouces de hauteur, ou le tiers d'un pied de toiſe quarrée : & ainſi du reſte.

Sur ces principes, dont l'évidence ſe fait ſentir par elle-même, eſt fondée la méthode que nous allons employer dans la ſolution des deux problêmes ſuivans.

### PROBLÊME I.

462. *Trouver le contenu d'une ſurface plane, qui a* 360 *toiſes &* 4 *pieds de largeur ou de baſe, ſur* 4 *toiſes &* 8 *pouces de hauteur.*

SOLUTION. Il faut entendre ici par largeur & par hauteur, deux dimenſions qui donnent un rectangle. Par exemple, ſi la ſurface dont on cherche le contenu eſt un triangle, après avoir meſuré ſa baſe & ſa hauteur, on prendra toute la baſe pour une dimenſion, & la moitié de la hauteur pour l'autre dimenſion : parce que dans une ſurface triangulaire, la dimenſion qui répond à la hauteur, n'eſt pas toute la hauteur du triangle, mais ſimplement la moitié de cette hauteur (448). Pour trouver la ſurface propoſée,

I°. Je multiplie d'abord les toiſes par les toiſes ; & j'ai pour produit 1440 toiſes quarrées. J'ai déjà multiplié les toiſes du multiplicande, par les toiſes du multiplicateur : il me reſte à multiplier les mêmes toiſes du multiplicande, par les 8 pouces du multiplicateur.

II°. Je fais ici une *fauſſe ſuppoſition*, dont on verra l'utilité. Je ſuppoſe que le multiplicateur, au lieu de 0 pieds, ait 1 pied. Après quoi je multiplie les toiſes du multiplicande par un pied, en diſant : ſi je multipliois 360 toiſes par une toiſe, le produit ſeroit 360 toiſes. Mais je multiplie ſeulement par un pied, qui eſt le ſixieme de la toiſe : donc le produit doit

n'être que le sixieme de 360 toises (66). Je prends donc le sixieme de 360, & j'ai 60 toises quarrées que j'écris sous les toises, en les effaçant par un trait, pour me rappeller que ce produit 60 doit simplement me servir de *partie aliquote* entre les toises & les pouces, sans entrer dans la somme des toises.

| Toises. | Pieds. | Pouces. | Lignes. |
|---|---|---|---|
| 360. | 4. | 0. | . |
| × 4. | 0. | 8. | . |
| 1440. | . | . | . |
| ~~60~~. | . | . | . |
| 40. | . | . | . |
| 2. | 4. | 4. | 16. |
| 1482. | 4. | 5. | 4. |
| Toises quarrées. | Pieds de toise quarrée. | Pouces de toise quarrée. | Lignes de toise quarrée. |

III°. Je passe aux 8 pouces, & je dis : 8 pouces sont les deux tiers d'un pied : donc ils doivent me donner les deux tiers de 60 toises quarrées que donneroit un pied. J'écris donc 40 sous les toises. J'ai donc déjà le produit des toises du multiplicande, par tout le multiplicateur. Il me reste encore à trouver le produit des 4 pieds du multiplicande, par tout le multiplicateur. Ainsi,

IV°. Je viens maintenant aux 4 pieds du *multiplicande*, & je dis : si j'avois à multiplier 4 toises 8 pouces par 1 toise, le produit seroit 4 toises 8 pouces. Mais je ne multiplie 4 toises 8 pouces que par 4 pieds, qui sont les deux tiers de la toise : le produit ne sera donc que les deux tiers de 4 toises 8 pouces, qui font 2 toises quarrées, 4 pieds de toise quarrée, 2 pouces & 16 lignes de toise quarrée.

V°. Après cela j'ajoute tous les produits ensemble (28); & la somme ou le produit total 1482 toises quarrées, plus 4 pieds de toise quarrée qui font les deux tiers de cette toise ou 24 pieds quarrés, plus

5 pouces

5 pouces & 4 lignes de toise quarrée, sont le *contenu* de la surface proposée.

### PROBLÊME II.

463. *Trouver le contenu d'une surface plane qui a 34 toises 2 pieds 9 pouces 8 lignes de base ou de largeur ; sur 23 toises 4 pieds 6 pouces 8 lignes de hauteur.*

SOLUTION. I°. Je multiplie les nombres des toises l'un par l'autre, 34 par 23 : les deux multiplicateurs donnent chacun leur produit, & ces deux produits 102 & 68 seront rangés l'un sous l'autre ; comme on voit dans le cadre.

II°. Je multiplie ensuite les 34 toises par 4 pieds ; en disant : si je multipliois 34 toises par 1 toise, le produit seroit 34 toises. Mais je multiplie seulement par 4 pieds, qui sont les deux tiers de la toise : donc le produit doit n'être que les deux tiers de 34 toises (66). Je prends donc le tiers de 34, & j'ai 11 toises 2 pieds que j'écris deux fois.

| Toises. | Pieds. | Pouces. | Lignes. |
|---|---|---|---|
| 34. | 2. | 9. | 8. |
| × 23. | 4. | 6. | 8. |
| 202. | . | . | . |
| 68 | . | . | . |
| 11 | 2 | . | . |
| 11. | 2 | . | . |
| 2 | 5 | . | . |
| . | 1 | 10. | 8 |
| 7 | 5 | 6 | 2 + $\frac{2}{3}$. |
| 1 | 5 | 10 | 6 + $\frac{2}{3}$. |
| . | 5 | 11 | 3 + $\frac{1}{3}$. |
| . | . | 11 | 10 + $\frac{1}{9}$. |
| . | . | 3 | 11 + $\frac{1}{2}$. |
| 818. | 5. | 6. | 6. + $\frac{2}{3}$. |

III°. Je passe aux 6 pouces, & je dis : six pouces sont le quart de 2 pieds ou de 24 pouces : prenant donc le quart de ce que deux pieds m'ont rendu, c'est-à-dire, le quart

de 11 toises 2 pieds qui font 68 pieds, j'ai 2 toises 5 pieds.

IV°. Huit lignes font la neuvieme partie de 6 pouces ou de 72 lignes : ainsi prenant le neuvieme de ce que m'ont produit 6 pouces, c'est-à-dire, le neuvieme de 2 toises 5 pieds ; j'ai 0 toises 1 pied 10 pouces 8 lignes.

V°. Je viens maintenant aux 2 pieds 9 pouces 8 lignes du *multiplicande* (93) ; & commençant par les 2 pieds, je dis : si j'avois à multiplier 23 toises 4 pieds 6 pouces 8 lignes, par 1 toise, le produit seroit 23 toises 4 pieds 6 pouces 8 lignes. Mais je n'ai à multiplier que par 2 pieds, qui font le tiers d'une toise : donc je ne dois avoir que le tiers de ce produit ; & ce tiers est 7 toises 5 pieds 6 pouces 2 lignes $\frac{2}{3}$.

VI°. Je passe aux 9 pouces du *multiplicande*, & je dis : 9 pouces ne font pas exactement contenus dans deux pieds : c'est pourquoi je partage 9 en deux parties 6 & 3, dont l'une 6 est le quart de 2 pieds ou de 24 pouces ; & l'autre 3 est la moitié de la précédente 6.

Or puisque 6 pouces font le quart de 2 pieds ; en prenant le quart de ce que 2 pieds ont produit, c'est-à-dire, le quart de 7 toises 5 pieds 6 pouces 2 lignes $\frac{2}{3}$ ; j'ai 1 toise 5 pieds 10 pouces 6 lignes $\frac{2}{3}$. Ensuite pour 3 pouces, je prends la moitié de ce dernier produit : ce qui donne 5 pieds 11 pouces 3 lignes $\frac{1}{3}$. (650.)

VII°. Je passe ensuite aux huit lignes du *multiplicande* ; & voyant que huit lignes ne font pas exactement contenues dans trois pouces ou 36 lignes, je partage 8 en deux parties 6 & 2 ; dont la premiere 6 est le sixieme de trois pouces, & l'autre 2 est le tiers de 6. Ainsi prenant le sixieme de ce que 3 pouces ont produit ; j'ai 11 pouces 10 lignes $\frac{1}{9}$ ; & prenant le tiers de ce dernier produit, j'ai 3 pouces 11 lignes $\frac{1}{2}$.

VIII°. Enfin je fais l'addition de tous ces produits (28) ; & la somme ou le produit total 818 toises 5

pieds 6 pouces 6 lignes $\frac{2}{3}$, est le *contenu* de la surface proposée, exprimé en dimensions de toise quarrée : comme dans le problême précédent.

464. REMARQUE I. Pour faciliter le calcul, il est quelquefois nécessaire de faire de fausses suppositions : par exemple, si le second nombre donné eût été 23 toises o pieds 6 pouces 8 lignes; j'aurois supposé un pied à la place de o pieds, & j'aurois eu pour produit un sixieme de 34 toises, ou 5 toises 4 pieds que j'aurois écrit pour me servir d'*aliquote intermédiaire* entre les toises & les pouces, & que j'aurois effacé par un trait oblique; pour me rappeller de ne point mettre dans la somme ce produit supposé, en faisant l'addition. On en a vu un exemple dans le problême précédent.

465. REMARQUE II. On peut aussi évaluer les surfaces, par le calcul des *fractions décimales* : mais comme ce calcul, appliqué à des toises, à des pieds, à des pouces, à des lignes, qui ne sont point des dixiemes de la grandeur précédente, nous paroît plus difficile & plus long que celui que nous employons ici; nous nous abstiendrons d'en parler. Il est inutile de fatiguer l'attention du lecteur par des méthodes plus longues & plus difficiles, quand on lui en a présenté de plus courtes & de plus aisées. Il nous suffira donc d'observer ici,

I°. Qu'on nomme *fractions décimales*, des quantités fractionnaires dont le dénominateur est toujours un nombre décimal; c'est-à-dire, l'unité suivie d'un ou de deux ou de tant de zeros qu'on veut; lesquels augmentent toujours l'unité du dénominateur, en raison décuple (18). Par exemple, si on suppose le rayon terrestre divisé en dix parties; $\frac{10}{10} = 1$ seront le rayon; $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ seront la moitié du rayon; $\frac{20}{10} = 2$ seront le double du rayon. Si on suppose ce même rayon divisé en cent parties; $\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$ seront la dixieme partie de ce rayon; $\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$ en seront la moitié. Si on suppose le

même rayon divisé en mille parties; $\frac{10}{1000}$ seront la centieme partie de ce rayon: $\frac{100}{1000}$ en seront la dixieme partie; & ainsi de suite à l'infini.

De même, si on suppose une somme quelconque, grande ou petite, divisée en 10 parties; ces dix parties seront le dénominateur décimal, & l'expression de la somme totale, dont le numérateur marquera le nombre de parties qu'il faut prendre dans cette somme. Ainsi on aura $\frac{10}{10}$, égal à toute la somme; $\frac{2}{10}$, égal au cinquieme de la somme. Mais si cette somme étoit supposé divisée en mille parties; la fraction auroit pour dénominateur le nombre 1000; & alors on auroit, $\frac{1000}{1000} = 1$, ou égal à la somme totale; $\frac{500}{1000} = \frac{1}{2}$, ou égal à la moitié de la somme; & ainsi du reste. (188 & 190.)

II°. Que les fractions décimales s'expriment de différentes manieres abrégées, chez les différens auteurs qui en traitent. La maniere la plus commune de les exprimer & de les écrire par abréviation, c'est de n'écrire que le numérateur suivi d'un point; & de mettre après le point, autant de zeros qu'en a le dénominateur décimal sous-entendu. Ainsi on aura $\frac{5}{10} = 5.0$: on aura de même $\frac{37}{100} = 37.00$: on aura de même encore $\frac{304}{1000} = 304.000$; & ainsi du reste.

## PARAGRAPHE SECOND.

### *Des Polygones.*

466. Définition. On appelle *polygone*, toute figure terminée par plus de quatre lignes droites, qui sont ses côtés. Le polygone prend différens noms selon le nombre de ses côtés: on l'appelle *pentagone*, s'il en a cinq; *exagone*, s'il en a six; *eptagone*, s'il en a sept; *octogone*, s'il en a huit; *ennéagone*, s'il en a

neuf; *décagone*, s'il en a dix; *endécagone*, s'il en a onze; *dodécagone*, s'il en a douze; *chiliogone*, s'il en a mille.

I°. Le *polygone est régulier*, quand tous ses angles & tous ses côtés sont égaux. (*fig. 66.*)

II°. Le *polygone est irrégulier*, quand ses angles & ses côtés ne sont pas tous égaux.

III°. Deux *polygones réguliers sont semblables*, quand ils ont le même nombre de côtés. Ainsi deux pentagones, deux dodécagones, deux chiliogones réguliers de différente grandeur, sont semblables.

467. COROLLAIRE. *On peut concevoir le cercle, comme un polygone régulier d'une infinité de côtés.*

EXPLICATION. Un point quelconque d'une circonférence, joint au point immédiatement suivant, fait nécessairement une ligne droite. (*fig.* 18.)

Du centre du cercle, tirez par la pensée deux rayons qui aboutissent à ces deux points contigus : vous aurez un triangle isocele. Faites la même chose pour tous les points suivans de la circonférence : vous aurez dans le cercle autant de triangles isoceles, qu'il y a de points infiniment petits à la circonférence, c'est-à-dire une infinité. C. Q. F. D.

468. DÉFINITION II. On appelle *périmetre d'un polygone*, la somme de toutes les lignes qui forment ses côtés. Les lignes AB, BC, CD, DE, EF, FA, font le périmetre de l'exagone ABCDEF. (*fig. 66.*)

Deux polygones, par exemple, un pentagone & un octogone, sont *isopérimetres*; quand le périmetre de l'un est précisément égal au périmetre de l'autre.

L'étymologie de ces dénominations est toute grecque. Elle vient de περὶ, *circum*, à l'entour; de μετρέω, *metior*, je mesure; & de ἴσος, *æqualis*, égal. Ces dénominations s'appliquent aussi à d'autres figures, différentes des polygones. Polygone : de πολὺς, *multus*; & de γωνία, *angulus*.

469. DÉFINITION III. On distingue dans un polygone, deux sortes de rayons, un rayon oblique & un rayon droit qu'on nomme aussi apothême. (*fig.* 66.)

I°. On appelle *rayon oblique* d'un polygone, une ligne droite, tirée du centre du polygone à l'angle formé par deux côtés du périmetre. Par exemple, MA ou MB ou MD, est un rayon oblique.

II°. On appelle *rayon droit* ou *apothême* d'un polygone, une ligne droite, tirée du centre perpendiculairement sur un côté quelconque AB du polygone. Par exemple, MK est un rayon droit ou un apothême de ce polygone.

III°. On distingue aussi dans les polygones, des angles saillans & des angles rentrans. L'*angle saillant* est celui qui a son sommet hors de la figure; l'*angle rentrant* est celui dont le sommet entre dans la figure. Si ACDHEA est un polygone; l'angle DHE est un angle rentrant: tous les autres sont des angles saillants. (*fig.* 62.)

470. COROLLAIRE. *Plus le polygone a de côtés, plus le rayon droit approche du rayon oblique.* (fig. 69.)

DÉMONSTRATION. Il est évident que si du centre C, on mene un rayon droit sur le côté MN d'un exagone, & un autre rayon droit sur le côté MB d'un dodécagone; le dernier rayon sera plus grand que le premier. L'apothême C*x* du dodécagone approchera donc plus du rayon oblique CM, que l'apothême C*b* de l'exagone.

Il est évident de même, que plus l'arc MB deviendra petit, plus sa corde se rapprochera de la circonférence; & plus l'apothême C*x* de cette corde deviendra grand, en approchant toujours de plus en plus à l'infini, de l'égalité avec le rayon oblique CM. D'où il résulte que *dans le cercle, le rayon droit differe infiniment peu du rayon oblique.* C. Q. F. D.

## THÉORÊME I.

471. *Tous les angles d'un polygone quelconque, régulier ou irrégulier, sont égaux à deux fois autant d'angles droits moins quatre, que le polygone a de côtés.* (fig. 66.)

DÉMONSTRATION. Soit un polygone de tant de côtés que vous voudrez, par exemple, de cent côtés. Tirez par la pensée, du centre du polygone des lignes qui aboutissent à tous les angles formés par les côtés. Vous aurez autant de triangles qu'il y a de côtés. Tous ces triangles sont égaux chacun à deux angles droits (384) : cent triangles vous donneront donc 200 angles droits. Retranchez de la somme de tous ces triangles, la somme de tous les angles au centre, que vous avez ajoutée aux angles du périmetre, par exemple, les angles AMB, BMC, CMD, & ainsi du reste. Vous retrancherez quatre angles droits : puisque tous les angles au centre embrassent précisément une circonférence, & par conséquent valent quatre angles droits. Donc la somme des angles de ce polygone, est égale à deux fois autant d'angles droits moins quatre, que le polygone a de côtés. C. Q. F. D.

472. PROBLÊME. *Trouver l'angle au centre d'un polygone régulier, ou l'angle opposé à un côté.* (fig. 69.)

SOLUTION. La somme de tous les angles au centre, formés par des rayons obliques, vaut quatre angles droits, ou 360 degrés : puisqu'elle répond à toute la circonférence d'un cercle circonscrit au polygone. Mais il y a dans le polygone régulier, autant d'angles au centre tous égaux entre eux, que le polygone régulier a de côtés, tous égaux entre eux. Divisez donc 360 degrés, par le nombre de côtés qu'a le polygone régulier : par exemple, si c'est un exagone, divisez 360

par 6; si c'est un dodécagone, divisez 360 par 12 : le quotient exprimera la valeur de l'angle au centre MCN ou NCB; & ainsi du reste.

## THÉORÊME II.

473. *Les périmetres des polygones réguliers de même nombre de côtés, sont entre eux comme les rayons droits ou obliques.* (fig. 66.)

DÉMONSTRATION. Soit le petit polygone *abcdef*, placé sur le grand polygone semblable ABCDEF. Il faut démontrer que le périmetre ou le contour du petit, est au périmetre du grand; comme le rayon droit ou oblique du petit, est au rayon droit ou oblique du grand.

I°. Quand deux triangles sont semblables ou équiangles, les côtés homologues sont proportionnels (403) : or les polygones réguliers d'un même nombre de côtés, sont évidemment une suite de triangles équiangles ou semblables : donc chaque côté *ab* d'un polygone régulier, est au côté homologue AB d'un autre polygone régulier de même nombre de côtés; comme le rayon *a*M ou *k*M du premier, qui peut être considéré comme base, est au rayon AM ou KM du second, qui peut être aussi considéré comme base.

II°. Chaque côté du premier polygone est proportionnel à chaque côté du second : donc la somme de tous les côtés du premier est proportionnelle à la somme de tous les côtés du second (222) : donc tous les côtés du premier sont à tous les côtés du second, comme le rayon du premier est au rayon du second. Donc les périmetres des polygones réguliers d'un même nombre de côtés, sont entre eux comme leurs rayons droits ou obliques. C. Q. F. D.

474. COROLLAIRE. *Les circonférences des cercles inégaux, sont entre elles comme les rayons.*

DÉMONSTRATION. On vient de démontrer que dans les polygones réguliers d'inégale grandeur & de même nombre de côtés, les périmetres sont entre eux comme les rayons. Or les cercles peuvent être considérés comme des polygones réguliers d'une infinité de côtés (467) : donc leurs périmetres, qui sont leurs circonférences, sont entre eux comme leurs rayons. Donc si le rayon d'un cercle est la moitié ou le quart ou le centieme du rayon d'un autre cercle; la circonférence du premier sera la moitié, ou le quart, ou le centieme de la circonférence du second : & réciproquement.

475. COROLLAIRE II. Les rayons de deux cercles étant entre eux comme les circonférences; *ils sont aussi comme les demi-circonférences, comme les quarts, comme les dixiemes, comme les centiemes*, *comme les milliemes des circonférences, & généralement, comme tous les arcs semblables* ou d'un même nombre de degrés : ensorte que si l'on a deux cercles d'inégale grandeur; le rayon du premier est au rayon du second, comme un arc de 30 degrés du premier, est à un arc de 30 degrés du second; & ainsi du reste.

476. COROLLAIRE III. Les rayons étant moitié des diametres; *les diametres de deux cercles sont entre eux comme leurs rayons :* parce que la raison qui est entre deux grandeurs, est égale à celle qui est entre leurs deux moitiés, & réciproquement (163). Par conséquent, *dans deux cercles, les diametres sont entre eux, comme les circonférences, comme les demi-circonférences, comme tous les arcs semblales.*

## THÉORÊME III.

477. *Le côté de l'exagone régulier, inscrit dans un cercle, est égal au rayon de ce cercle.* (fig. 66.)

DÉMONSTRATION. Soit l'exagone régulier ABCDEF, inscrit dans un cercle. Les six côtés de l'exagone

font fix cordes égales, qui foutiennent fix arcs égaux, dont la fomme eft toute la circonférence.

Du centre M, tirez les rayons MA & MB fur les extrêmités d'un des côtés AB de l'exagone : ce côté AB eft égal au rayon MA ou MB. Car dans le triangle AMB, l'angle M a pour mefure l'arc AB (336); & cet arc AB eft de 60 degrés : puifque cet arc eft la fixieme partie de la circonférence. Par conféquent l'angle AMB eft un angle de 60 degrés.

L'angle M valant 60 degrés, il faut néceffairement que les deux autres angles A & B pris enfemble, vaillent 120 degrés (384). Or ces deux angles A & B font égaux : puifqu'ils font oppofés à deux côtés égaux, qui font deux rayons du cercle circonfcrit (389). Donc chacun de ces angles A & B vaut la moitié de 120 degrés, ou 60 degrés.

Par conféquent, dans le triangle AMB, les trois angles font égaux : donc les trois côtés, oppofés à ces angles égaux, font auffi égaux entre eux (389). Or le côté AM ou BM eft le rayon du cercle circonfcrit : donc le côté AB, qui eft égal au côté AM ou BM du triangle AMB, eft auffi égal au rayon du cercle circonfcrit à l'exagone régulier. C. Q. F. D.

478. COROLLAIRE I. *Le périmetre de l'exagone régulier, infcrit dans un cercle, contient fix fois précifément le rayon du cercle circonfcrit :* puifque le côté AB eft égal au rayon MA; & que le périmetre de l'exagone régulier contient néceffairement fix côtés égaux au côté AB. (*fig.66.*)

Ce périmetre contenant fix fois précifément le rayon, il eft évident qu'*il contient auffi trois fois précifément le diametre, double du rayon.*

478. COROLLAIRE II. La circonférence du cercle circonfcrit, eft évidemment plus grande, que le périmetre de l'exagone infcrit : *donc la circonférence contient plus de trois fois le diametre. Donc le rapport de la*

*circonférence au diametre, est plus grand que le rapport de 3 à 1, ou de 21 à 7.* Mais quel est ce rapport exact & précis?

### *Rapport du diametre à la circonférence.*

479. Observation. Nous ferons voir ailleurs, comment & par quelle méthode géométrique, on a pu chercher dans le cercle, le rapport de la circonférence au diametre, ou du diametre à la circonférence (663). Ce rapport précis & parfait reste encore à trouver: mais on a tellement approché du vrai rapport, qu'on n'a plus rien à desirer en ce genre.

I°. Archimede a trouvé & démontré, que *le rapport du diametre à la circonférence est à très-peu près le rapport de 7 à 22*: que le rapport exact & précis du diametre à la circonférence est renfermé entre le rapport de 7 à $21 + \frac{70}{71}$, & le rapport de 7 à $21 + \frac{71}{71} = 22$: que parmi ces deux rapports fractionnaires, le premier est un peu trop grand; le dernier, un peu trop petit; mais que le dernier approche plus du rapport exact & précis, que le premier.

Ce rapport de 7 à 22, est égal au rapport de 1 à $3 + \frac{1}{7}$: mais on ne se sert pas de ce dernier; parce qu'étant exprimé en fraction, il est trop embarrassant dans le calcul. Selon ce rapport d'Archimede, toute circonférence, grande ou petite, renferme à très-peu près, trois fois son diametre, plus un septieme de son diametre.

Depuis Archimede jusqu'à nos jours, tous les géometres ont adopté le rapport de 7 à 22, comme le rapport suffisamment exact du diametre à la circonférence: ce rapport suffit en effet pour donner toute la précision qu'on peut communément espérer d'atteindre dans la pratique. Cependant comme ce rapport est un peu trop petit (160), il donne la circonférence un

peu plus grande qu'elle n'est en réalité. Par exemple, si le diametre est de 1000 toises, la circonférence qu'on trouvera par ce rapport sera plus grande que la vraie circonférence, d'environ 2 toises, qui sont la cinq-centieme partie du diametre donné. C'est pourquoi les géometres qui se piquent d'une grande exactitude, & qui ont quelquefois besoin d'une très-grande précision dans le calcul, ont cherché des rapports plus rigoureusement exacts que celui d'Archimede.

II°. Metius, géometre Hollandois, a trouvé un autre rapport du diametre à la circonférence, *le rapport de* 113 *à* 355. De tous les rapports qui peuvent s'exprimer en un petit nombre de chiffres sans fraction, il n'y en a point qui approche plus du vrai rapport.

Le *rapport de* 100 *à* 314, dont on se sert assez souvent, est trop grand (160) : il donne la circonférence un peu plus petite qu'elle n'est en réalité. Le *rapport de* 10000 *à* 31415, approche du vrai rapport, à peu près autant que celui de Metius, dont il ne differe qu'infiniment peu : on peut employer celui-ci, qui est d'un usage plus commode que celui de Metius.

III°. D'autres géometres ont cherché & trouvé des rapports du diametre à la circonférence, encore plus exacts que celui de Metius : mais on ne s'en sert point ; parce qu'étant exprimés par un trop grand nombre de chiffres, ils causent un trop grand embarras dans le calcul, sans être d'aucune utilité dans la pratique. Par exemple, Ludolphe de Ceulen, qui a poussé à l'excès les spéculations sur cet objet, a trouvé le rapport suivant ; . . . . . . . .

100,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000 ;

314,159,265,358,979,323,846,264,338,327,950 ;

& a démontré que le diametre d'un cercle quelconque, étant supposé divisé en autant de parties

qu'en exprime le premier nombre, la circonférence de ce cercle sera plus petite que le second nombre, mais plus grande que ce second nombre, si on change le dernier chiffre zero en une unité. Le premier nombre est l'antécédent, & le second nombre est le conséquent, d'une raison qui exprime le rapport du diametre à la circonférence.

On peut, par ce *rapport de Ludolphe de Ceulen*, approcher à l'infini du vrai rapport du diametre à la circonférence; en prenant un égal nombre de chiffres à gauche, dans le nombre qui répond au diametre, & dans le nombre qui répond à la circonférence. Par exemple, en prenant les six premiers chiffres de l'antécédent & les six premiers chiffres du conséquent, on aura ce rapport 100000 à 314159. Si on cherche par ce dernier rapport, la circonférence d'un cercle dont le diametre est d'un million de toises, la circonférence qu'on trouvera sera plus petite que la vraie; mais la différence entre la circonférence trouvée & la vraie circonférence ne sera que d'environ deux toises, qui ne sont que la cinq-cent-millieme partie du diametre donné. Le rapport d'Archimede donneroit à cette même circonférence, 1265 toises de plus qu'elle n'a en réalité.

Ce rapport de Ludolphe de Ceulen est très-commode dans la pratique des grands calculs: parce que le nombre qui exprime le diametre, n'étant que l'unité suivie de plusieurs zeros; il dispense ordinairement d'une multiplication & d'une division.

## PROBLÊME.

480. *Trouver à peu près par ces rapports, la circonférence d'un cercle, dont on connoît le diametre; ou le diametre d'un cercle, dont on connoît la circonférence.*

SOLUTION. I°. Soit le diametre connu $=450$: appellez $x$ la circonférence inconnue; & faites cette

regle de trois : 7 . 22 :: 450 . *x*. Le produit des deux moyens, divisé par le premier extrême, vous donnera la circonférence cherchée.

II°. Soit la circonférence connue = 9000 : appellez *x* le diametre inconnu ; & faites de même cette regle de trois : 22 . 7 :: 9000 . *x*. Le produit des deux moyens, divisé par le premier extrême, vous donnera le diametre cherché.

Si on veut avoir avec plus de précision le diametre ou la circonférence que l'on cherche ; à la place du rapport donné par Archimede, on mettra le rapport donné par Metius, ou le rapport exprimé par les cinq ou six premiers chiffres de la longue suite de Ludolphe de Ceulen (479) ; & les deux proportions précédentes seront transformées en celles-ci : 113 . 355 :: 450 . *x* ; ou 355 . 113 :: 9000 . *x* ; ou bien en celles-ci : 10000 . 31415 :: 450 . *x* ; ou 31415 . 10000 :: 9000 . *x*. Le produit des deux moyens divisé par le premier extrême, donnera ou la circonférence qui répond au diametre de 450 toises ; ou le diametre qui répond à la circonférence de 9000 toises.

## THÉORÊME IV.

481. *La surface d'un cercle est égale à la surface d'un triangle rectangle qui a pour hauteur le rayon, & pour base une ligne droite égale à la circonférence.* (fig. 68.)

DÉMONSTRATION. Soit le cercle ADA, & le triangle rectangle ACB. Ces deux figures sont égales en surface, si elles ont autant d'élémens l'une que l'autre ; & si tous les élémens de l'une sont égaux à tous les élémens correspondans de l'autre : or,

I°. *Il y a autant d'élémens dans le cercle, qu'il y en a dans le triangle.* Car les élémens du cercle, sont des circonférences concentriques, & les élémens du triangle, sont des lignes paralleles à la Base. (438.)

Or il y a autant de circonférences concentriques

dans le cercle, que de lignes paralleles à la base dans le triangle : puisque le nombre en est mesuré de part & d'autre par la ligne CA, qui est en même tems rayon du cercle & hauteur du triangle.

II°. *Tous les élémens du cercle sont égaux à tous les élémens correspondans du triangle.* Prenons dans le cercle deux circonférences AD, *ad*; & dans le triangle deux bases AB, *ab*, correspondantes à ces deux circonférences. D'abord *dans le cercle*, les circonférences étant entre elles comme les rayons (474); on a cette proportion : . . . . . AD . *ad* :: CA . C*a*.

Ensuite *dans le triangle*, les deux triangles CAB & C*ab* étant semblables, on a encore cette proportion : AB . *ab* :: CA . C*a*.

Dans ces deux proportions, la seconde raison est la même : donc les deux premieres raisons sont égales entre elles, étant égales chacune à la même raison. On a donc encore cette proportion : AD . *ad* :: AB . *ab* & *alternando* (174) . . . . . AD . AB :: *ad* . *ab*

Or dans cette derniere proportion, l'antécédent & le conséquent de la premiere raison sont égaux, *par l'hypothese ;* puisqu'on suppose la circonférence du cercle égale à la base du triangle : donc dans la derniere raison, l'antécédent est aussi égal à son conséquent.

On peut démontrer de la même maniere, que chaque autre circonférence comme *mrm*, est égale à la base *mn* qui lui correspond dans le triangle : ainsi dans le cercle & dans le triangle, les élémens correspondans sont *égaux & en nombre & en grandeur :* donc le cercle & le triangle sont égaux en surface. C. Q. F, D.

## THÉORÊME V.

482. *La surface d'un secteur de cercle, est égale à la surface d'un triangle rectangle, dont la hauteur est égale au rayon du secteur ; & dont la base est égale à l'arc du secteur.* (fig. 67.)

DÉMONSTRATION. Soit CAD un secteur d'une grandeur quelconque, par exemple, de 80 ou 90 dégrés. Soit aussi un triangle ACB, dont la base AB soit égale à l'arc AD du secteur; ensorte que la base AB & l'arc AD soient deux lignes composées d'un même nombre de points : ce qui est toujours évidemment possible, & ce qui peut toujours évidemment être supposé. Dans cette hypothese,

I°. *Le triangle & le secteur ont un même nombre d'élémens:* puisque ce nombre d'élémens est mesuré de part & d'autre par la ligne CA, qui est le rayon du cercle & la hauteur du triangle. (438.)

II°. *Les élémens du secteur sont égaux chacun aux élémens correspondans du triangle:* ce qu'on démontre, comme dans le théorême précédent, par deux proportions qui en donnent une troisieme & ensuite une quatrieme, où est établie cette égalité. . . . .

| | |
|---|---|
| Dans le cercle (474) . . . | AD . *ad* : : CA . C*a*. |
| Dans le triangle (400) . . | AB . *ab* : : CA . C*a*. |
| Donc, (166) . . . | AD . *ad* : : AB . *ab*. |
| Donc, *alternando*, . . | AD . AB : : *ad* . *ab*. |

Donc l'arc ou l'élément AD du secteur, étant *supposé* égal à la base ou à l'élément AB du triangle; chaque élément suivant & quelconque *ad* du secteur, sera égal à chaque élément correspondant *ab* du triangle.

Le triangle & le secteur, ayant & un même nombre d'élémens, & des élémens par-tout respectivement égaux, sont donc évidemment égaux en surface; quelle que soit la grandeur & du secteur & du triangle. C. Q. F. D.

## *De la Quadrature du Cercle.*

483. DÉFINITION. Chercher *la quadrature du cercle*, c'est chercher une méthode géométrique de faire un quarré égal en surface à un cercle dont le diametre ou la circonférence sont donnés.

Si

Si on avoit pu trouver un rapport géométrique parfaitement exact, sans aucune différence sourde & infiniment petite, entre le diametre & la circonférence; on auroit la quadrature du cercle : puisque le cercle étant égal en surface à un triangle qui auroit pour hauteur le rayon, & pour base, une ligne égale à la circonférence (481); il ne s'agiroit que de trouver une moyenne proportionnelle entre la base & la hauteur de ce triangle (414). Cette moyenne proportionnelle, multipliée par elle-même, donneroit un quarré égal en surface au triangle, égal en surface au cercle dont la surface est égale à celle de ce triangle.

Ce rapport géométrique, parfaitement exact & précis, entre le diametre & la circonférence, reste encore à trouver; comme nous l'avons déjà observé. Mais celui qui le trouveroit aujourd'hui ne rendroit absolument aucun service aux sciences : parce que les rapports découverts & démontrés par Archimede, par Métius, par Ludolphe de Ceulen, approchent tellement du vrai rapport; qu'avec un rapport parfaitement exact & précis, on ne pourroit se flatter dans la pratique, d'atteindre à une plus grande précision. (479.)

## PROBLÊME I.

484. *Trouver, à très-peu près, la surface d'un cercle dont on connoît le rayon.*

SOLUTION. Par le double du *rayon connu*, égal au diametre, trouvez la circonférence inconnue (479). Multipliez cette circonférence par la moitié du rayon : le produit donnera la surface cherchée; puisque ce produit donne la surface d'un triangle égal au cercle dont le rayon a été donné. (481.)

## PROBLÊME II.

485. *Trouver, à très-peu près, la surface d'un secteur*

*de cercle, dont on connoît l'arc & le rayon.*

SOLUTION. I°. Par le double du rayon donné, que je suppose égal à 7 toises, trouvez la circonférence entiere de ce cercle, en faisant cette regle de trois : 7. 22 :: 14. $x$: la circonférence cherchée sera 44 toises. (489.)

II°. Pour trouver la mesure inconnue de l'arc donné, que je suppose de 54 degrés, faites cette autre regle de trois : la mesure connue de la circonférence entiere 44 toises, est à la mesure inconnue de l'arc de 54 degrés ; comme la circonférence entiere 360 degrés, est à l'arc donné 54 degrés : ainsi 44. $x$ :: 360 : 54. Vous aurez $x = 6$ toises $+ \frac{3}{5}$ environ.

III°. Multipliez la mesure trouvée 6 toises $+ \frac{3}{5}$ de l'arc donné, par la moitié du rayon : le produit exprimera la surface cherchée. (462.)

## PROBLÊME III.

486. *Trouver la surface d'un polygone.* (fig. 66.)

SOLUTION. I°. Si le polygone est régulier, tous ses angles & tous ses côtés sont égaux : il y a donc autant de triangles égaux que le polygone a de côtés. Tirez une perpendiculaire MK, du centre du polygone sur un côté quelconque AB : vous aurez la hauteur & la base du triangle AMB : vous connoîtrez donc la surface de ce triangle. Multipliez la surface trouvée de ce triangle AMB du polygone régulier, par le nombre des *côtés* du polygone, moins un dont la surface est déjà *prise* ; le produit donnera la surface cherchée.

II°. Si le polygone est irrégulier, il faut mesurer tous les triangles dissemblables l'un après l'autre ; & prendre la somme de toutes les surfaces des triangles qui forment le polygone, pour avoir la surface totale du polygone.

### PROBLÊME IV.

487. *Faire un polygône régulier de la grandeur d'un rayon donné & d'un nombre donné de côtés.* (fig. 68.)

SOLUTION. Décrivez une circonférence qui ait pour rayon, le rayon oblique donné : divisez cette circonférence ou 360 degrés, par le nombre de côtés que doit avoir le polygone ; par 6, si c'est un exagone ; par 12, si c'est un dodécagone. Le quotient exprimera la grandeur des arcs qui doivent correspondre au nombre donné de côtés ; lesquels côtés seront des cordes égales : puisqu'elles soutiendront des arcs égaux. (318.)

### PROBLÊME V.

488. *Inscrire ou circonscrire un polygône régulier à un cercle.* (fig. 69.)

SOLUTION. I°. Pour inscrire un polygone régulier à un cercle ; tirez du centre à un des angles, un rayon oblique CA ; & du même centre & de la grandeur de ce rayon CA, décrivez une circonférence : le polygone sera inscrit dans ce cercle ABDRA.

II°. Pour circonscrire un polygone régulier à un cercle ; du centre du polygone, menez une perpendiculaire C*b* sur un des côtés ; & du même centre & de la grandeur de cette perpendiculaire C*b*, qui sera le rayon droit ou l'aphotême, décrivez une circonférence : le polygone sera circonscrit à ce cercle *abdra*.

## PARAGRAPHE SECOND.

### *RAPPORT DES SURFACES.*

489. OBSERVATION. I°. COMME il y a un rapport ou une raison géométrique, entre deux grandeurs

linéaires ; il y a auſſi un rapport ou une raiſon géométrique entre deux ſurfaces, qui ſont chacune le réſultat de deux grandeurs linéaires, d'une longueur par une largeur, ou d'une baſe par une hauteur. Par exemple, (*fig.* 92.)

Il y a un rapport entre la baſe B & la baſe *b*, & un autre rapport entre la hauteur H & la hauteur *h*. En multipliant d'une part la baſe B par la hauteur H ; & en multipliant de l'autre, la baſe *b* par la hauteur *h* ; on aura deux ſurfaces S & *s*, qui auront auſſi entre elles un rapport.

II°. Comme le rapport ou la raiſon géométrique de deux grandeurs ſimples ou linéaires, eſt la maniere dont la premiere contient la ſeconde ou une partie de la ſeconde (156) ; de même la raiſon géométrique de deux ſurfaces, eſt la maniere dont la premiere contient la ſeconde ou une partie de la ſeconde. Ainſi le rapport ou la raiſon de la ſurface S à la ſurface *s*, eſt la maniere dont la premiere ſurface contient la ſeconde, ou une partie de la ſeconde. Si la premiere contient trois fois la ſeconde, la raiſon de la premiere à la ſeconde eſt $= 3$. Si la premiere ne contient *qu'un* tiers de la ſeconde, la raiſon de la premiere à la ſeconde eſt $= \frac{1}{3}$ ; & ainſi du reſte.

490. Définition. Le rapport d'une ſurface à une autre, eſt une raiſon compoſée qui quelquefois eſt une raiſon doublée. (*fig.* 92.)

I°. La *raiſon compoſée* eſt le produit de deux raiſons, égales ou inégales, antécédent par antécédent, & conſéquent par conſéquent (217). Par exemple, en comparant la hauteur H à la hauteur *h*, & la baſe B à la baſe *b*, ſi on exprime ainſi ces deux raiſons ſimples $\frac{H}{h}$ & $\frac{B}{b}$ ; on en fera une raiſon compoſée $\frac{HB}{hb}$. Cette derniere raiſon, HB eſt à *hb*, ſera une raiſon compoſée, qui exprimera le rapport de la ſurface S à la ſurface *s*.

II°. La *raiſon doublée*, dont il eſt ici queſtion, eſt le produit d'une même raiſon ſimple, dont l'antécédent & le conſéquent ſont élevés à leurs quarrés. Par exemple, dans cette raiſon, H eſt à B; ſi on éleve l'antécédent & le conſéquent chacun à ſon quarré, on aura cette raiſon HH eſt à BB, qui ſera doublée de la précédente.

III°. Dans la meſure des ſurfaces, on appelle *produiſans*, les deux termes que l'on multiplie l'un par l'autre, pour avoir le produit d'une ſurface. Par exemple, ſi on multiplie une baſe $B = 4$, par une hauteur $H = 3$; la grandeur B eſt un produiſant: l'autre grandeur H eſt l'autre produiſant.

De même la baſe BC eſt un produiſant, & la hauteur AB eſt l'autre produiſant du rectangle ABCD. (*fig.* 57.)

De ces définitions découle la propoſition ſuivante, qui porte en elle-même ſon évidence, & qu'on peut mettre au rang des axiomes.

491. AXIOME. *Deux ſurfaces ſont entre elles, comme le produit des deux dimenſions de l'une, eſt au produit des deux dimenſions de l'autre:* puiſque ces deux produits expriment la meſure des deux ſurfaces. On pourroit dire auſſi que ces deux ſurfaces ſont en raiſon compoſée de leurs deux dimenſions reſpectives: ce qui revient à la même choſe.

## *RAPPORT DES RECTANGLES.*

492. OBSERVATION. Les deux produiſans d'un rectangle quelconque, ſont la baſe & la hauteur (447). Pour trouver le *rapport de deux rectangles*, ſemblables ou diſſemblables, il faut donc multiplier la baſe du premier par ſa hauteur, & la baſe du ſecond par ſa hauteur. Le rapport qui ſera entre les deux produits reſpectifs, exprimera le rapport qui ſera entre les ſur-

faces des deux rectangles. Par exemple, si le premier est 12 × 10 = 120; & que le second soit 8 × 6 = 48; la surface du premier rectangle, sera à celle du second, comme 120 est à 48.

### *RAPPORT DES PARALLÉLOGRAMMES.*

493. OBSERVATION. Les parallélogrammes obliqu'angles étant égaux en surface à des rectangles de même base & de même hauteur (440); leurs deux produisans sont aussi la base & la hauteur. Par conséquent, pour trouver le *rapport de deux parallélogrammes*, rectangles ou obliqu'angles, semblables ou dissemblables, il faut multiplier dans l'un & dans l'autre, la base par la hauteur: les produits exprimeront le rapport de leurs surfaces. Dans deux parallélogrammes, rectangles ou obliqu'angles, semblables ou dissemblables,

I°. *Si les bases sont égales*, les surfaces sont entre elles comme les hauteurs. (221. II°.)

II°. *Si les hauteurs sont égales*, les surfaces sont entre elles comme les bases. (221. II°.)

III°. *Si les deux dimensions sont en raison inverse*, les deux surfaces sont égales. Car si la base du premier est double de la base du second, tandis que la hauteur du second est double de la hauteur du premier; il est clair que ce que l'un a de plus en largeur, l'autre l'a de plus en hauteur: & ainsi du reste.

### *RAPPORT DES TRIANGLES.*

494. OBSERVATION. Les triangles étant la moitié des parallélogrammes, rectangles ou obliqu'angles, de même base & de même hauteur (442); leurs deux produisans sont la base par la moitié de la hauteur. Par conséquent, pour trouver le *rapport de deux trian-*

*gles quelconques*, semblables ou dissemblables, il faut multiplier dans l'un & dans l'autre, la base par la demi-hauteur : les produits exprimeront le rapport de leurs surfaces. Dans deux triangles quelconques, ainsi que dans les parallélogrammes dont ils sont des moitiés :

I°. *Si les bases sont égales*, les surfaces sont entre elles comme les hauteurs, ou comme les demi-hauteurs.

II°. *Si les hauteurs sont égales*, les surfaces sont entre elles comme les bases. (421. II°.)

III°. *Si les deux dimensions sont en raison inverse* dans l'un & dans l'autre, les surfaces sont égales entre elles. La raison de tout cela, c'est que le rapport qui est entre les touts qui sont les parallélogrammes, est aussi entre les moitiés qui sont les triangles.

De cette théorie sur le rapport des triangles, découlent deux corollaires qui renferment la même démonstration fondamentale que nous avons donnée ailleurs sur les lignes proportionnelles (396, 400) : celle que nous donnons ici, & qu'on pourra, si l'on veut, regarder comme superflue, est indépendante de l'égale inclinaison des lignes.

495. COROLLAIRE I. *Si les deux côtés d'un triangle quelconque sont coupés par une parallele à la base, les deux côtés seront coupés proportionnellement.* (fig. 72.)

DÉMONSTRATION. Soit le triangle BAD : tirez la parallele EF ; & les deux lignes ED, BF. Je dis que AE . EB : : AF . FD.

I°. Considérez les deux triangles AFE, EFB, comme ayant leur sommet au point F, & leurs bases sur la même ligne AB : ils ont même hauteur FE ; *ils sont donc entre eux comme leurs bases* (494). Donc la base

AE est à la base EB; comme le triangle EAF, est au triangle EBF.

II°. Les deux triangles BFE, DFE, qui ont même base EF, & même hauteur, puisqu'ils sont entre les mêmes paralleles, sont égaux : donc le triangle EAF a le même rapport avec ces deux triangles.

III°. Considérez les deux triangles EAF, EFD, comme ayant leur sommet, au point E, & leurs bases sur la même ligne AD : ils ont même hauteur EF; ils sont donc entre eux comme leurs bases. Donc la base AF, est à la base FD; comme le triangle EAF, est au triangle EFD.

IV°. Il suit de ce qu'on vient de démontrer, qu'on a deux raisons égales à une troisieme, & par-là même égales entre elles : savoir, . . . . . .

| | La Ligne. | La Ligne. | Le Triangle. | Le Triangle. |
|---|---|---|---|---|
| . . . | AE . | EB . . | EAF . | EFB. |
| . . . | AF . | FD : : | EAF . | EFD. = EFB. |

Dans ces deux proportions, la derniere raison est la même : donc les deux premieres raisons, égales chacune à la même raison, sont égales entre elles; & donnent cette nouvelle proportion AE . EB : : AF . FD.
Et *alternando*, . . . . AE . AF : : EB . FD.

Cette derniere proportion exprime le rapport des côtés coupés par la ligne EF, parallele à la base BD : donc les deux côtés sont coupés proportionnellement par la parallele à la base. C. Q. F. D.

496. COROLLAIRE II. *Si les deux côtés d'un triangle quelconque sont coupés par une parallele à la base; la partie* AE, *est au côté entier* AB; *comme la partie* AF, *est à l'autre côté entier* AD.

DÉMONSTRATION. Par le corollaire précédent, on a cette proportion . . . . . . AE . EB : : AF . FD.
Donc, *componendo* (174) AE.AE+EB::AF.AF+FD.
& en simplifiant, . . . . . AE . AB : : AF . AD.

Par conséquent, la section du premier côté, est à la section correspondante du second côté; comme le premier côté entier, est au second côté entier. C. Q. F. D.

497. PROBLÊME. *Diviser un triangle en tant de parties qu'on voudra, selon des raisons données ou prises sur la base.* (fig. 91.)

SOLUTION. Soit le triangle quelconque ACB : supposons qu'on veuille diviser sa surface en quatre portions qui soient entre elles comme B*m*, *mn*, *nr*, *r*C.

Du sommet A du triangle, menez la ligne AP, parallele à la base BC ; & les lignes A*m*, A*n*, A*r*, aux points donnés qui marquent le rapport des divisions à faire.

Le triangle sera divisé en quatre portions, qui sont entre elles selon les raisons données. Car ces quatre triangles partiels, dont la somme est égale en surface au triangle total, étant compris entre les mêmes paralleles AP & BC, ont tous la même hauteur : ils sont donc entre eux comme leurs bases B*m*, *mn*, *nr*, *r*C, qui expriment les rapports des divisions à faire. (494.)

On pourra par ce moyen & par cette méthode, diviser un pré ou un champ triangulaire, en telles portions qu'on voudra.

## *RAPPORT DES FIGURES SEMBLABLES.*

498. DÉFINITION. Deux surfaces ou deux *figures sont semblables*, quand tous leurs angles sont respectivement égaux, & que de plus leurs côtés homologues sont proportionnels : en telle sorte qu'elles ne different entre elles que par la grandeur de leurs périmetres & de leurs surfaces; & qu'étant placées l'une sur l'autre par un de leurs angles égaux, la plus petite devienne une partie de la plus grande, & reste toujours semblable à la plus grande. Par exemple (*fig. 66*),

I°. *Deux polygones réguliers* d'un même nombre de côtés ABCDEF & *abcdef*, sont semblables : puisque l'un étant placé sur l'autre par leurs centres, ils forment un même nombre de triangles dont les angles sont égaux, & dont les côtés sont proportionnels. On peut dire la même chose de *deux cercles*, placés l'un sur l'autre par leurs centres. De même (*fig.* 45),

II°. *Deux triangles* CAB & *cab* sont semblables, si les trois angles du petit triangle sont égaux aux trois angles correspondans du grand triangle, chacun à chacun : car alors les trois côtés du petit triangle, seront proportionnels aux trois côtés homologues du grand triangle. (403.)

III°. *Deux quarrés* sont toujours semblables : parce que tous leurs angles sont toujours égaux, & tous leurs côtés toujours proportionnels. (*fig.* 1.)

IV°. *Deux rectangles* sont ou semblables ou dissemblables. Ils sont semblables, quand la hauteur du premier est à la hauteur du second ; comme la base du premier est à la base du second. Ils sont dissemblables, quand cette proportion n'a pas lieu. (*fig.* 52.)

V°. *Deux Parallélogrammes* sont semblables, quand les quatre angles du premier sont égaux aux quatre angles correspondans du second, chacun à chacun ; & que de plus, la hauteur du premier est à la hauteur du second, comme la base du premier est à la base du second. (*fig.* 16 & 57.)

VI°. *Deux polygones irréguliers* sont semblables, quand ayant le même nombre de côtés, ils ont leurs angles correspondans, égaux ; & leurs côtés homologues, proportionnels.

## THÉORÈME.

499. *Quand deux figures sont semblables, leurs surfaces sont entre elles, comme les quarrés d'une de leurs dimensions homologues.* (fig. 52.)

DÉMONSTRATION. Quand deux figures sont semblables, leurs deux dimensions, savoir la hauteur & la largeur, sont proportionnelles ; selon la définition précédente. Il s'agit donc de démontrer que, lorsque ces deux dimensions sont proportionnelles, les deux surfaces sont entre elles comme les quarrés d'une de ces dimensions quelconques ; comme les quarrés de la hauteur, ou comme les quarrés de la largeur ou de la base. Comme toutes les figures semblables peuvent être réduites en triangles, prenons d'abord pour exemple général deux triangles, les deux triangles semblables CAB & *cab*, dont les deux dimensions proportionnelles sont la base & la demi-hauteur.

I°. J'appelle $a$ la premiere dimension du petit triangle, ou sa base : j'appelle $b$ sa seconde dimension, ou sa demi-hauteur. De même, j'appelle $an$ la premiere dimension du grand triangle, ou sa base : j'appelle $bn$ sa seconde dimension, ou sa demi-hauteur. La quantité $n$ fait la fonction d'un multiplicateur indéterminé, qui rend la base & la hauteur du grand triangle proportionnellement plus grandes que la base & la hauteur du petit. Par exemple, si la base du grand triangle est deux fois plus grande que la base du petit ; le multiplicateur indéterminé $n$ marque qu'il faut prendre cette base du petit triangle 2 fois, ou la multiplier en longueur par 2. Ainsi le multiplicateur indéterminé $n$ représentera l'exposant de la raison qui est entre les bases & entre les hauteurs ; & signifiera que la grandeur à laquelle il est joint, est prise un certain nombre de fois, par exemple, une fois & demi, ou 3 fois, ou 5 fois & un quart, ou 100 fois & un dixieme, ou 100000 fois & un cent-cinquante-septieme ; & ainsi du reste.

Comme les deux triangles sont semblables, par la supposition, & que leurs deux dimensions sont proportionnelles ; j'aurai pour expression de ces deux

dimenſions, cette proportion : . . . *a* . *an* : : *b* . *bn*.

II°. Il s'agit de démontrer que la petite ſurface eſt à la grande, comme le quarré de *a* eſt au quarré de *an*, ou comme le quarré de *b* eſt au quarré de *bn* ; & je le démontre ainſi.

Le produit ou l'expreſſion de la petite ſurface eſt *ab* : le produit ou l'expreſſion de la grande ſurface eſt *anbn* (491). Donc la raiſon ou le rapport de la petite ſurface à la grande, eſt la raiſon de *ab* à *anbn*. Donc *s* . S : : *ab* . *anbn*.

III°. Mais à la place de cette derniere raiſon, je puis en mettre une autre qui lui ſoit égale (168) : je mets donc à la place de cette derniere raiſon, ou la raiſon des quarrés des baſes, ou la raiſon des quarrés des hauteurs ; & je démontre que ces deux dernieres raiſons ſont égales à la précédente *ab* . *anbn*. . .
ou que . . . . *aa* . *anan* : : *ab* . *anbn* ;
& que . . . . *bb* . *bnbn* : : *ab* . *anbn*.

Car deux raiſons ſont égales entre elles, quand elles forment une proportion ; & elles forment une proportion, quand le produit des extrêmes eſt égal au produit des moyens (172). Or ſi je mets en proportion les quatre premieres & les quatre dernieres grandeurs précédentes, le produit des extrêmes *aaabnn* ou *bbbann*, eſt évidemment égal au produit *aaabnn* ou *bbbann* des moyens, qui ont pour expreſſion les mêmes lettres : donc les deux premieres raiſons ſont égales à la derniere. Donc à la place de la derniere raiſon, on peut mettre indifféremment l'une ou l'autre des deux premieres qui lui ſont égales. Donc puiſqu'on a déjà . . . . . . *s* . S : : *ab* . *anbn* ;
on aura auſſi . . . . . *s* . S : : *aa* . *aann* ;
ou bien . . . . . . *s* . S : : *bb* . *bbnn*.

IV°. Appliquez la même méthode algébrique aux deux produiſans ou aux deux dimenſions de deux rectangles ſemblables, de deux parallélogrammes ſem-

blables, de deux trapeses semblables, de deux polygones semblables; & vous aurez par-tout la même démonstration, de laquelle il résultera que les deux figures semblables sont entre elles en surface, ou comme les quarrés de leurs bases, ou comme les quarrés de leurs hauteurs: en telle sorte que si le quarré d'une de ces dimensions est neuf fois plus grand que le quarré de la dimension homologue, la surface à laquelle appartient cette dimension plus grande, surpassera neuf fois, ou contiendra neuf fois l'autre surface; & ainsi du reste. C. Q. F. D.

500. APPLICATION. *Deux cercles sont entre eux en surface, comme les quarrés de leurs rayons ou de leurs circonférences.* (fig. 68.)

DÉMONSTRATION. Soient les deux cercles ADA & *ada*: il faut démontrer que la surface du grand est à la surface du petit, comme le quarré du grand rayon est au quarré du petit rayon; ou comme le quarré de la grande circonférence, est au quarré de la petite circonférence.

I°. Les deux produisans de la surface d'un cercle sont la circonférence par la moitié du rayon: puisque la surface d'un cercle est égale à celle d'un triangle rectangle qui auroit une base égale à la circonférence, & une hauteur égale au rayon (481); & que les deux produisans d'un tel triangle sont la base par la moitié de la hauteur (448). D'ailleurs, dans deux cercles inégaux, la grande circonférence est à la petite, comme le grand rayon est au petit: ainsi ces deux dimensions sont proportionnelles. (474.)

II°. Désignant donc ces deux produisans comme dans le théorême précédent, la petite circonférence sera *a*; la grande circonférence sera *an*: le petit rayon sera *b*; le grand rayon sera *bn*. Le produit de la petite

surface sera $ab$ : le produit de la grande surface sera $abnn$.

Le rapport de la petite surface à la grande sera donc . . . . $s . S :: ab . abnn$,
ou bien . . . $s . S :: aa . aann$,
ou bien . . . $s . S :: bb . bbnn$.

Car les deux dernieres raisons de ces deux dernieres proportions, étant égales à la derniere raison de la premiere proportion, elles peuvent leur être substituées. (499. III°.)

Ainsi pour évaluer la surface de ces deux cercles, il faut prendre dans l'un & dans l'autre, le produit de la circonférence par la moitié du rayon. Mais pour évaluer le rapport de ces deux surfaces, on peut prendre indifféremment ou le rapport des quarrés des rayons; ou le rapport des quarrés des circonférences; ou le rapport des produits de la circonférence par le rayon ou par le demi rayon, dans l'un & dans l'autre cercle. C. Q. F. D.

501. COROLLAIRE. *Deux cercles sont aussi entre eux en surface, comme les quarrés de leurs diametres, & comme les quarrés de tous leurs arcs semblables.*

DÉMONSTRATION. I°. Si, au lieu des rayons, on quarre les diametres des deux cercles; les deux derniers quarrés seront quadruples des deux premiers. Ainsi deux cercles étant entre eux en surface comme les quarrés de leurs rayons; ils sont aussi entre eux en surface comme le quadruple de ces quarrés des rayons: puisque si on multiplie deux grandeurs par une même grandeur 4, on ne change point le rapport des deux grandeurs multipliées, dont les produits sont entre eux comme les racines. (164.)

II°. Deux cercles étant entre eux en surface comme les quarrés de leurs circonférences, ils sont aussi entre eux comme les quarrés de tous les arcs semblables de

ces circonférences : puisque deux grandeurs étant divisées par une même grandeur, leurs quotiens conservent le même rapport (465) ; & que substituer aux quarrés des circonférences, les quarrés de leurs arcs semblables, c'est comme les diviser l'une & l'autre par une même grandeur. Par exemple, les deux surfaces circulaires étant entre elles comme les quarrés de leurs circonférences ; si au lieu de ces quarrés on prend les quarrés des demi-circonférences, on aura des quarts des deux grandeurs primitives ; & c'est comme si on avoit divisé l'une & l'autre, par une même grandeur 4 : si on prend les quarrés des quarts de l'une & de l'autre circonférence, on aura des seiziemes des deux grandeurs primitives ; & c'est comme si on les avoit divisé l'une & l'autre, par une même grandeur 16 : & ainsi du reste. C. Q. F. D.

## *RAPPORT DES POLYGONES.*

502. OBSERVATION. Les deux produisans d'un polygone régulier, sont le périmetre par la moitié du rayon droit, ou le rayon droit par la moitié du périmetre. Les surfaces de *deux polygones réguliers*, semblables ou dissemblables, sont donc entre elles ; comme le produit du périmetre de l'un par la moitié de son rayon droit, est au produit du périmetre de l'autre par la moitié de son rayon droit.

I°. On peut considérer un polygone régulier, d'un nombre quelconque de côtés, comme une suite de triangles dont le périmetre seroit la base : la surface de tous ces triangles est le produit de la base, par la moitié de la hauteur. (450.)

II°. Quand deux polygones, réguliers ou irréguliers, sont semblables, leurs surfaces sont entre elles comme les quarrés d'une de leurs dimensions homologues quelconque (499). Par-là on trouvera aisément le rapport de surface entre deux villes ou deux cita-

delles semblables, dont on connoît ou le diametre ou le périmetre : par exemple, si deux villes dont les figures sont semblables, ont l'une un quart de lieue & & l'autre trois quarts de lieue de diametre ; leurs surfaces sont entre elles comme 1 est à 9.

THÉORÊME I.

503. *Si on inscrit dans un même cercle, deux polygones réguliers de différens nombres de côtés ; le polygone qui aura le plus de côtés, aura le plus de surface, & le plus grand périmetre.* (fig. 69.)

DÉMONSTRATION. Si dans un même cercle ABDRA, au lieu d'un exagone, on inscrit un dodécagone ; la sixieme partie de l'exagone, savoir, le triangle rectiligne CM*b*NC, aura pour périmetre & pour surface MCN*b*M ; au lieu que le sixieme du dodécagone, savoir, les deux triangles rectilignes BCM & BCN, aura pour périmetre & pour surface BMCNB ; & sera glus grand de toute la quantité triangulaire BM*b*NB : donc tout le dodécagone a plus de surface & un plus grand périmetre que tout l'exagone. C. Q. F. D.

THÉORÊME II.

504. *De toutes les figures inscrites dans un même cercle, la plus grande en surface & en périmetre, est le cercle : la plus petite, est le triangle.* (fig. 69.)

DÉMONSTRATION. Toute figure inscrite au cercle, a pour côtés, des cordes MN ou MB, lesquelles s'approchent d'autant plus de la circonférence, & laissent d'autant moins d'espace entre elles & la circonférence, qu'elles deviennent plus petites. Or dans un polygone régulier d'une infinité de côtés, tel qu'est le cercle, les cordes qui forment ses côtés infiniment petits se confondent avec la circonférence ; & ne

laissent

laissent aucun vuide entre elles & cette circonférence ; au lieu que le triangle laisse beaucoup de vuide & plus de vuide qu'aucune autre figure, entre ses côtés & la circonférence ; comme il est facile de le concevoir en inscrivant un triangle dans un cercle, & en convertissant successivement ce triangle en un quadrilatere, en un pentagone, en un exagone, en un dodécagone (*fig.* 123 & 124), par la division d'un ou de plusieurs de ses côtés. C. Q. F. D.

### THÉORÈME III.

505. *De tous les polygones réguliers circonscrits à un même cercle, celui qui aura le plus de côtés, aura un plus petit périmetre & une plus petite surface.* (fig. 69.)

DÉMONSTRATION. Soit un polygone circonscrit à un cercle *abdra*. Plus le polygone aura de côtés ; plus son périmetre s'approchera de la circonférence du cercle inscrit, laquelle est plus petite qu'aucun des polygones circonscrits. Par exemple, la sixieme partie CDEC de l'exagone circonscrit, est plus grande que la sixieme partie C*dmn*C du dodécagone circonscrit au cercle.

On peut dire & démontrer la même chose, à l'égard de toutes les figures qu'on voudra circonscrire à un même cercle (*fig.* 123 & 124). On trouvera que le triangle circonscrit a plus de périmetre & de surface, que le quadrilatere ; le quadrilatere, plus que le pentagone ; & ainsi de suite à l'infini. C. Q. F. D.

### THÉORÈME IV.

506. *Tout polygone régulier donné, peut être inscrit ou circonscrit à un cercle.* (fig. 69.)

DÉMONSTRATION. I°. Dans tout polygone régulier, tous les rayons obliques sont égaux ; donc si du centre

du polygone, avec un rayon oblique quelconque CA, on décrit une circonférence ABDRA; elle passera par tous les sommets des angles, & le polygone sera *inscrit*.

II°. Dans tout polygone régulier, tous les rayons droits C*b* ou C*r* sont égaux : donc si du centre du polygone, avec un rayon droit C*b*, on décrit une circonférence *abdra*, elle atteindra le milieu *b* & *r* de tous les côtés MN, DE, EF; & le polygone sera *circonscrit*. C. Q. F. D.

## *Rapport des Figures isopérimetres.*

507. Définition. On nomme *figures isopérimetres*, celles qui ont un même périmetre, ou dont les périmetres sont égaux. Par exemple, si la somme des quatre côtés d'un rectangle, est égale à la somme des quatre côtés d'un autre rectangle égal ou inégal en surface; ces deux rectangles sont isopérimetres : parce que leurs contours ont précisément la même dimension. (467.)

### Théorême I.

508. *Deux polygones réguliers quelconques d'un même nombre de côtés, qui ont des périmetres & des rayons droits égaux, sont égaux en surface:* puisque leurs surfaces de part & d'autre, sont le produit des rayons droits égaux, par les demi-périmetres égaux. (502.) C. Q. F. D.

### Théorême II.

509. *Si les polygones réguliers ont un même périmetre & un nombre différent de côtés; celui qui aura plus de côtés, aura plus de surface.*

Démonstration. La surface de chacun de ces polygones, est égale au produit du rayon droit par la

moitié du périmetre : donc le périmetre étant supposé le même dans chaque polygone, la surface sera d'autant plus grande, que le rayon droit sera plus grand.

Or plus le polygone aura de côtés, plus son rayon droit sera grand (469). Par exemple, en supposant qu'un pentagone & un exagone aient le même périmetre, il faut nécessairement que le rayon droit de l'exagone soit plus grand que celui du pentagone.

Car si le rayon droit de l'exagone & du pentagone étoient égaux, on pourroit circonscrire le pentagone & l'exagone à un même cercle (506); & alors le périmetre de l'exagone approchant plus de la circonférence du cercle inscrit, seroit plus petit que le périmetre du pentagone (505) : ce qui est contre la supposition. Donc si le pentagone & l'exagone ont un même périmetre, il faut nécessairement que le rayon droit de l'exagone soit plus grand que le rayon droit du pentagone : ce qui donne à l'exagone un plus grand produisant & par-là même une plus grande surface qu'au pentagone. Donc si deux polygones réguliers d'un nombre différent de côtés, sont isopérimetres; celui qui aura plus de côtés, aura plus de surface. C. Q. F. D.

510. COROLLAIRE. *Le cercle étant un polygone régulier d'une infinité de côtés* (466); *il contient plus de surface, que toute autre figure dont le périmetre est égal au périmetre du cercle :* puisque tout polygone régulier, différent du cercle & de même périmetre que le cercle, a moins de côtés que le cercle.

### THÉORÈME III.

511. *Parmi les figures isopérimetres qui ont un même nombre de côtés, les angles correspondans étant supposés égaux; celles dont les côtés seront égaux ou approcheront plus de l'égalité, auront plus de surface.*

DÉMONSTRATION. Soient, par exemple, deux rectangles, dont les périmetres ſoient égaux, mais dont l'un ait plus de longueur & moins de hauteur que l'autre; en telle ſorte cependant que les deux baſes & les deux côtés de l'un, donnent une ſomme égale à celle des deux baſes & des deux côtés de l'autre. Les périmetres de ces deux rectangles ſeront égaux : mais celui dont la hauteur & la largeur approcheront plus de l'égalité, aura plus de ſurface que l'autre.

Car ſuppoſons que la ſurface de chaque rectangle ſoit le produit d'une hauteur & d'une largeur dont la ſomme ſoit 8.

I°. Si l'on diviſe la ſomme 8, ou la hauteur & la largeur, en deux parties égales 4 & 4, on aura pour la ſurface le produit $4 \times 4 = 16$.

II°. Si l'on diviſe la ſomme des deux mêmes produiſans 8, en deux parties inégales 5 & 3; on aura pour la ſurface, le produit $5 \times 3 = 15$, plus petit que 16.

III°. Si l'on diviſe la ſomme des deux *mêmes produiſans* 8, en deux parties encore plus *inégales 6 & 2*; on aura pour la ſurface, le produit $6 \times 2 = 12$, encore plus petit que 15.

IV°. Si l'on diviſe encore la ſomme des deux mêmes produiſans 8, en deux parties encore plus inégales 7 & 1; on aura pour la ſurface le produit 7, encore plus petit que 12.

V°. Si l'on diviſe encore la ſomme des deux mêmes produiſans 8, en deux parties encore plus *inégales 7* & demi d'une part, & un demi de l'autre; *on aura* pour la ſurface le produit $7 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 3 + \frac{3}{4}$, encore plus petit que 7 : & ainſi de ſuite à l'infini.

On conçoit que la même théorie peut s'appliquer à deux parallélogrammes, à deux triangles, dont la ſurface eſt le produit d'une baſe plus ou moins grande,

par une hauteur ou une demi-hauteur plus ou moins grande aussi. Les produits, qui expriment les surfaces, seront d'autant plus petits, que les deux produisans seront plus inégaux. C. Q. F. D.

512. COROLLAIRE. Il résulte de-là, que le *quarré* a plus de surface que le rectangle isopérimetre, qui n'est pas un quarré : que le *rectangle* a plus de surface que le parallélogramme obliqu'angle dont les quatre côtés sont égaux à ceux du rectangle, chacun à chacun : que le *triangle équilatéral* a plus de surface que le triangle isocele ou scalene, isopérimetre ; & ainsi du reste.

### PROBLÊME.

513. *Trouver un cercle, dont la surface ait un rapport donné, avec la surface d'un autre cercle donné ; par exemple, qui soit double ou sous-double, triple ou sous-triple.*

SOLUTION. Prenez une ligne qui ait avec le diametre $a$ du cercle donné, un rapport égal à celui que doit avoir le cercle cherché. Par exemple,

I°. Si le cercle cherché, doit être *double* du cercle donné ; prenez une ligne $2a$, qui soit double du diametre $a$ de ce cercle donné ; & cherchez ensuite une moyenne proportionnelle $m$ (414), entre cette ligne $2a$ & le diametre connu $a$ : vous aurez cette proportion continue : $\div 2a . m . a$ ; & par la même, $\div a . m . 2a$.

Cette moyenne proportionnelle $m$ sera le diametre d'un cercle double du cercle cherché. Car dans cette derniere proportion continue, le quarré du premier terme, est au quarré du second ; comme le premier est au troisieme ; c'est-à-dire, que $aa . mm :: a . 2a$. (234.)

Or dans cette seconde raison, le conséquent est le double de son antécédent : donc dans la premiere raison, le conséquent est aussi le double de son antécé-

dent; c'est-à-dire, que le quarré du diametre *m* est double du quarré du diametre *a*. Mais d'ailleurs les cercles sont entre eux comme les quarrés de leurs diametres (501): donc le cercle dont *m* est le diametre, est double du cercle dont *a* est le diametre.

II°. Si le cercle cherché doit être *sous-triple* du cercle donné; on aura d'abord, $\div \frac{1}{3} a . m . a$: ensuite, $\div a . m . \frac{1}{3} a$: enfin, $\div aa . mm . a . \frac{1}{3} a$.

### *Rapport de l'Hypothénuse aux côtés.*

514. Définition I. Dans un triangle rectangle, on nomme *hypothenuse*, le côté opposé à l'angle droit. Dans le triangle ABC, qu'on suppose rectangle en B, le côté AC est l'hypothénuse: la ligne BD est une perpendiculaire, menée de l'angle droit sur l'hypothénuse. (*fig.* 70.)

De même dans le triangle BDC, rectangle en *m*; le côté BC est l'hypothénuse. De même encore, dans le triangle BDA, rectangle en *n*, le côté AB est l'hypothénuse.

On voit par-là, qu'une même ligne *BC*, *par exemple*, peut à la fois être côté, à l'égard d'un triangle ACB; & hypothénuse, par rapport à un autre triangle BDC.

515. Définition II. Le *quarré d'une ligne*, est un quarré dont les quatre côtés sont égaux à cette ligne. Par exemple (*fig.* 71):

Dans le triangle ACB, rectangle en B, le quarré de l'*hypothénuse* AC, est le quarré ACFE: le quarré du *grand côté* BC, est le quarré BN: le quarré du *petit côté* AB, est le quarré BM.

Le quarré d'une ligne quelconque AC, s'exprime ou se marque communément en cette maniere $\overline{AC}^2$; ce qui signifie simplement que ces lignes ne représentent pas des grandeurs linéaires, mais des grandeurs élevées à leurs quarrés. Ainsi AC est simple-

ment une grandeur linéaire : $\overline{AC}^2$ est une grandeur linéaire élevée à son quarré.

### LEMME.

516. *Si dans un triangle rectangle* ABC, *on abaisse du sommet de l'angle droit, une perpendiculaire sur l'hypothénuse ; on aura trois lignes moyennes proportionnelles ; savoir* (fig. 70),

I°. Le petit côté AB, *moyen proportionnel entre l'hypothénuse entiere* AC, *& le segment adjacent* AD. Le petit triangle ABD, & le grand triangle ABC, sont équiangles ou semblables. Car ils ont chacun un angle droit ; & de plus l'angle en A est commun à l'un & à l'autre : donc le troisiéme angle est aussi égal de part & d'autre ; savoir, l'angle o = C. Donc les côtés homologues de ces deux triangles, sont proportionnels ; & on a cette proportion : l'hypothénuse AC du grand triangle, est à l'hypothénuse AB du petit triangle ; comme le petit côté AB du grand triangle, est au petit côté AD du petit triangle ; ou AC . AB :: AB . AD.

II°. Le grand côté BC, *moyen proportionnel entre l'hypothenuse entiere & le segment adjacent* DC. Le moyen triangle BDC, & le grand triangle ABC, sont équiangles. Car ils ont chacun un angle droit ; & de plus l'angle en C est commun à l'un & à l'autre : donc le troisieme angle est aussi égal de part & d'autre ; savoir, l'angle *e* = A. Donc les côtés homologues de ces deux triangles, sont proportionnels ; donc on a cette proportion : l'hypothénuse AC du grand triangle, est à l'hypothénuse BC du moyen triangle ; comme le grand côté BC, du grand triangle, est au grand côté DC du moyen triangle ; ou AC . BC :: BC . DC.

III°. La perpendiculaire BD, *moyenne proportion-*

*nelle entre les deux ſegmens* AD & DC. Le petit triangle ABD, & le moyen triangle BDC, ſont équiangles. Car ils ont chacun un angle droit : de plus l'angle *e* vient d'être démontré égal à l'angle A : par conſéquent l'angle o eſt auſſi égal à l'angle C. Donc les côtés homologues de ces deux triangles, ſont proportionnels : donc le petit côté AD du petit triangle, eſt à ſon moyen côté BD ; comme le petit côté BD du moyen triangle, eſt à ſon moyen côté DC : ou AD, BD : : BD. DC. Ce qu'il falloit démontrer.

### THÉORÊME FONDAMENTAL.

517. *Dans un triangle rectangle, le quarré de l'hypothénuſe eſt égal au quarré des deux autres côtés.* (fig. 71.)

DÉMONSTRATION. Soit le triangle rectangle ABC; dont AC eſt l'hypothénuſe : l'angle B eſt droit ; puiſque c'eſt un angle inſcrit, appuyé ſur le diametre AC (368). Du ſommet de l'angle droit, tirez ſur l'hypothénuſe AC, la perpendiculaire BDG : *elle partagera* le quarré AF de l'hypothénuſe, en deux rectangles AG, DF. Je démontre que AG eſt égal à BM, qui eſt le quarré de AB ; & que DF eſt égal à BN, qui eſt le quarré de BC. (515.)

I°. On a démontré dans le lemme précédent, que le côté AB eſt moyen proportionnel entre la baſe entiere AC & le ſegment AD. Or AE = AC : donc AE, AB : : AB. AD : donc le produit des extrêmes eſt égal au produit des moyens. Or le produit des extrêmes eſt le rectangle AG ; & le produit des moyens eſt le quarré BM : donc le rectangle AG eſt égal au quarré BM.

II°. Il a été auſſi démontré dans le lemme précédent ; que l'autre côté BC eſt moyen proportionnel entre la baſe entiere AC & l'autre ſegment DC. Or AC = CF ; donc CF, BC ; : BC, DC ; donc le rectangle

DF, qui est le produit des extrêmes, est égal au quarré BN, qui est le produit des moyens.

III°. Le rectangle AG est égal au quarré BM; le rectangle DF est égal au quarré BN. Ces deux rectangles, pris ensemble, sont le quarré de l'hypothénuse; & les deux autres quarrés sont les quarrés des deux côtés du triangle: donc le quarré de l'hypothénuse, est égal au quarré des deux autres côtés d'un triangle rectangle. C. Q. F. D.

518. REMARQUE. Ce théorême est une source immense de lumieres dans les Mathématiques, surtout pour la Trigonométrie. Pythagore, qui découvrit & démontra ce mémorable rapport, en connut si bien l'importance & le mérite, en saisit & en suivit si ingénieusement toutes les applications & toutes les dépendances, qu'il immola, dit-on, cent taureaux à ses dieux protecteurs: soit pour les remercier avec le plus grand éclat, de lui avoir accordé une lumiere si utile à la perfection de l'esprit humain; soit pour manifester plus authentiquement au monde éclairé, l'enthousiasme que lui inspiroit l'admirable découverte qu'il venoit de faire & qui devoit éterniser sa mémoire.

### THÉORÊME II.

519. *La diagonale d'un quarré, quoiqu'incommensurable en nombres, est commensurable en lignes, avec le côté d'un quarré* (fig. 73.)

DÉMONSTRATION. I°. La diagonale AC est *incommensurable en nombres* avec le côté quelconque AD. Car le quarré de la diagonale AC, est égal au quarré du côté AD, plus au quarré du côté DC: puisque la diagonale AC est l'hypothénuse du triangle rectangle ADC. Or les deux côtés AD & DC sont égaux: donc le quarré de la diagonale AC, est double du quarré du côté AD. Ainsi ces deux derniers quarrés sont entre eux comme 2 & 1: la diagonale AC est donc

au côté AD; comme la racine de 2, est à la racine de 1. Mais il n'y a aucun nombre assignable, qui puisse exprimer ce rapport : donc la diagonale est incommensurable avec le côté d'un quarré. (6 & 216.)

Nous ne nous étendrons pas davantage sur cette premiere partie, qu'il nous importe peu de démontrer plus rigoureusement. Il suffit de savoir qu'il n'y a point d'aliquote commune, ni en nombres entiers, ni en fractions, qui puisse mesurer exactement la diagonale & le côté : il reste toujours une quantité *sourde*, un rapport *incommensurable*, entre l'un & l'autre, qu'il est impossible d'assigner en nombres.

II°. La diagonale est *commensurable en lignes* avec le côté. Car prenez la diagonale AC & le côté AD, dont vous ferez une seule ligne totale. Du milieu de cette ligne, décrivez une circonférence (*fig.* 49), qui ait pour rayon la moitié de la ligne entiere : ensuite sur la ligne totale prenez une partie égale à la diagonale; & élevez du point qui la termine, une perpendiculaire GE jusqu'à la circonférence : cette perpendiculaire (414) sera moyenne proportionnelle entre la diagonale & le côté du quarré. Or une moyenne proportionnelle entre deux lignes, exprime un rapport commun entre ces deux lignes : donc le rapport entre la diagonale & le côté d'un quarré, peut être exprimé & assigné en lignes. C. Q. F. D.

520. Remarque. La seconde partie de ce théorême, résout une difficulté qu'on pourroit faire contre la proportion qui est entre les côtés homologues des triangles semblables, sur laquelle proportion porte toute la Géométrie.

Voici l'objection. Soient les deux côtés d'un triangle, égaux l'un au côté & l'autre à la diagonale d'un quarré. Dans ce cas, dira-t-on, une ligne parallele à la base du triangle, ne coupe pas proportionnellement les deux côtés de ce triangle : puisque les deux

côtés entiers étant incommensurables, leurs parties semblables sont aussi incommensurables. (*fig.* 44.)

RÉPONSE. Il est facile, après ce qu'on vient de démontrer, de faire évanouir cette difficulté. La diagonale & le côté du quarré sont incommensurables en nombres, mais commensurables en lignes. Pour donner plus de jour à cette réponse, supposons que la parallele DE, coupe la moitié de l'espace compris entre la base AB & la parallele FG tirée du sommet du triangle : ce qui est évidemment possible. Dans ce cas, la parallele DE coupera sur l'un & sur l'autre côté, cette moitié approchante qui peut être exprimée en nombres, plus la moitié de ce *reste sourd* ou *irrationnel* ou *incommensurable*, qu'aucun nombre ne peut exactement exprimer.

## PROBLÊME.

521. *Faire un quarré double ou sous-double d'un autre quarré.* (fig. 73.)

SOLUTION. I°. Pour faire un *quarré double* d'un quarré donné, prenez la diagonale du quarré donné ; & sur cette diagonale AC faites un nouveau quarré, dont les quatre côtés soient égaux à cette diagonale. Ce quarré GH, fait sur cette diagonale, sera égal aux deux quarrés faits sur les deux côtés du quarré donné. Par exemple, le quarré fait sur la diagonale ou hypothénuse AC, est égal au quarré du côté AB, plus au quarré du côté BC (517). Ensuite, (*fig.* 124) :

II°. Pour faire un *quarré sous-double*, ou de moitié plus petit en surface, qu'un quarré donné ABCD ; prenez un des côtés AD, & faites-en la diagonale *ac* d'un nouveau quarré. Ce nouveau quarré sera de moitié plus petit en surface, que le quarré ABCD de son hypothénuse *ac* = AD : puisque le quarré de cette hypothénuse *ac*, sera égal aux deux quarrés faits sur les

deux côtés égaux *ad* & *dc*, du quarré *abcd* dont elle sera l'hypoténuse (517). Ainsi, ABCD = 2 *abcd*.

# ARTICLE TROISIEME.

## *Sections des Surfaces.*

522. Observation. Après avoir considéré les surfaces planes, dans leur égalité & dans leur rapport; il nous reste à les considérer comme des *plans*, propres à couper ou des lignes ou des surfaces ou des solides.

Toute surface plane est considérée comme sans profondeur : parce qu'étant seule, elle n'a qu'une profondeur infiniment petite, dont on fait abstraction, & qui n'est & ne doit être comptée pour rien; par la raison, qu'elle auroit besoin d'être prise une infinité de fois, pour donner une profondeur sensible. (238.)

523. Définition. *Un plan est une surface, telle qu'une ligne droite qui lui est appliquée en tout sens, convient par-tout avec elle*; ou telle que si une ligne droite indéfinie fait une révolution sur cette surface, la droite passera par tous les points de la surface. Telle est sensiblement la surface des miroirs ordinaires, qu'on nomme miroirs plans.

De cette définition découlent les corollaires suivans, qu'on pourroit regarder comme autant d'axiomes, auxquels nous allons donner une succinte explication.

524. Corollaire I. *Un plan est la plus petite surface qu'on puisse concevoir entre les lignes qui le terminent.* Ainsi la surface plane est plus petite que la surface convexe ou concave, comprise entre les mêmes extrêmités. Par exemple, la surface plane est plus petite que toute autre surface, comprise entre les quatre

lignes AB, BC, CD, DA. (*fig.* 57.)

525. COROLLAIRE II. *La commune ſection d'une ligne avec un plan, eſt un point : celle d'un plan avec un plan, eſt une ligne droite : celle d'un plan avec un ſolide, eſt une ſurface plane.* Ces trois conſéquences portent avec elles-mêmes leur évidence, que la plus ſimple attention fait ſentir. Par exemple (*fig.* 122),

Si une ligne AER coupe un plan MCNB; il eſt évident que leur commune ſection eſt le point E. De même ſi un plan MCNB coupe un autre plan ARDS; il eſt clair que leur commune ſection eſt la ligne EF. De même encore ſi un plan coupe une ſphere; il eſt clair que la partie de la ſphere coupée, qui de part & d'autre touche le plan coupant & convient avec ce plan coupant, eſt elle-même un plan.

526. COROLLAIRE III. *Si deux points d'une ligne droite ſont ſur un plan; la ligne droite y eſt toute entiere.* Car ſi cette ligne droite AC n'étoit pas toute entiere ſur ce plan, elle ne conviendroit pas avec ce plan; & par conſéquent ce plan ne ſeroit plus un plan. (*fig.* 57.)

527. COROLLAIRE IV. *Pour déterminer la poſition d'un plan; il ſuffit de connoître ſur ce plan, la poſition de trois de ſes points, qui ne ſoient pas en ligne droite:* puiſque tous les autres points de ce plan ont néceſſairement la même direction que les trois points connus; qui joints par des lignes droites formeroient toujours un triangle plan.

528. COROLLAIRE V. *Deux plans ſont paralleles entre eux, quand le premier a trois points qui ne ſoient pas pris en ligne droite, également éloignés de trois points du ſecond.* (*fig.* 122.)

EXPLICATION. Il eſt clair que deux rectangles SE & AF peuvent être également éloignés l'un de l'autre, par exemple, d'un pouce, dans une infinité de points,

dans une ligne entiere EF, sans être paralleles. Mais si trois points du premier, qui forment sur lui les trois sommets d'un triangle, sont également éloignés de trois points quelconques du second, par exemple, d'un pouce; les deux plans sont nécessairement paralleles.

Le parallélisme de deux plans se détermine par des perpendiculaires égales, élevées sur différens points de l'un des deux plans, & terminées à l'autre plan, prolongé, s'il le faut.

529. Corollaire VI. *Deux plans sont perpendiculaires l'un à l'autre; quand le premier est élevé sur le second, sans pencher ni d'un côté ni d'autre.*

Par exemple, le plan MCNB & le plan ARDS, dont la commune section est EF, sont obliques l'un à l'autre: parce que l'angle AEM est aigu. Que cet angle s'agrandisse jusqu'à ce qu'il devienne droit: les deux plans seront perpendiculaires l'un à l'autre. (*fig.* 122.)

Si sur un point d'un plan quelconque on pose un côté de l'équerre (364), en telle sorte que ce côté de l'équerre convienne en plein avec ce plan; un plan qui passera le long du côté élevé & perpendiculaire de l'équerre, sera perpendiculaire au plan que touche l'autre côté de l'équerre.

530. Corollaire VII. *Trois points quelconques, pris dans l'espace infini, sont toujours nécessairement dans un plan.*

Démonstration. Soient ces trois points quelconques le centre du soleil, le centre de la terre, le centre de la lune. Il est clair qu'on peut concevoir trois lignes droites, menées, l'une du centre de la terre au centre du soleil; l'autre, du centre du soleil au centre de la lune; l'autre, du centre de la lune au centre de la terre: ces trois lignes droites forment évidemment un triangle.

Maintenant, que l'on conçoive une ligne droite indéfinie, qui du sommet quelconque de ce triangle, glisse sur les côtés vers la base opposée : cette ligne droite décrira évidemment un plan, qui passera par les trois points donnés, le centre de la terre, le centre de la lune, le centre du soleil : donc ces trois points sont dans un plan. On peut démontrer de même que le centre de la terre, de Saturne, & d'une étoile quelconque Syrius, sont dans un plan. C. Q. F. D.

531. REMARQUE. Dans la longimétrie & dans la planimétrie, ainsi que dans plusieurs parties de la physique, on a souvent besoin de trouver la ligne horisontale, & des perpendiculaires à cette ligne horisontale. De-là, la nécessité de connoître & la *ligne de niveau*, & la *ligne d'à-plomb*, dont nous allons parler.

### *LA LIGNE D'A-PLOMB.*

532. DESCRIPTION. La *ligne d'à-plomb*, qui se trouve dans les étuis de mathématique, n'est autre chose qu'un fil à l'extrêmité duquel on a attaché un plomb. L'usage de ce fil est de déterminer les directions perpendiculaires à l'horison ; de juger de la position des plans, de leur parallélisme, de leur inclinaison plus ou moins grande, par rapport à l'horison. Pour cet effet, on suspend la ligne d'à-plomb par une de ses extrêmités, au sommet de l'angle formé par les deux branches de l'équerre, entre lesquelles on adapte aussi un quart de cercle gradué DE. (*fig.* 75.)

I°. Si l'on pose sur un plan quelconque les points B & C de l'équerre, de façon que le fil AP puisse se mouvoir librement le long du quart de cercle ; on jugera si le plan est ou parallele, ou perpendiculaire, ou incliné plus ou moins à l'horison ; suivant que le fil répondra au point *m*, milieu du quart de cercle, ou qu'il s'en écartera plus ou moins. Le rapporteur, adapté à l'équerre, peut tenir lieu de quart de cercle.

Par exemple, on jugera que le plan BC est parallele à l'horison, si le fil AP répond au milieu du quart de cercle DE : que le plan BC a un dégré d'inclinaison en s'élevant de tel côté; si le fil AP s'écarte du milieu du quart de cercle, de la valeur d'un degré dans le sens opposé : que le plan BC a 45 degrés d'inclinaison ; si le fil AP devient parallele au côté AB ou AC de l'équerre ; & ainsi du reste.

II°. Un corps pesant quelconque, attaché au bout d'une ficelle, sert à faire découvrir si une ligne ou une surface est perpendiculaire à l'horison : parce que cette ficelle, sollicitée par la pesanteur du corps, prend une direction vers le centre de la terre; & que telle est la direction perpendiculaire à l'horison ( *Phy*. 247). Donc si la ligne ou la surface sont perpendiculaires à l'horison, leur direction doit quadrer avec *celle de* la ficelle.

## *Niveau vrai et apparent.*

533. Définition. La *ligne de niveau* est une ligne dont tous les points sont sensiblement à *égale distance* du centre de la terre; ou qui seroit par-tout parallele à une mer tranquille, répandue autour de toute la terre. Or comme la figure de la terre approche beaucoup de la figure sphérique ( *Phy*. 1364), il s'ensuit que *la ligne de niveau est une ligne à peu près circulaire*. Ainsi, *niveller un terrein*, c'est chercher sur ce terrein, une ligne dont tous les points soient sensiblement à égale distance du centre de la terre; ou une ligne *parallele* à la surface d'un lac immense & tranquille, répandu sur ce terrein. (*fig*. 76.)

I°. Soit ACDEA une circonférence de la terre. Si l'on plante à-plomb en A sur la surface de la terre un piquet AS, à l'extrêmité duquel on ait mis une lunette ou une regle à pinnule *mn*, qui soit perpendiculaire

au

au piquet ; & que l'on viſe à travers la lunette ou par les pinnules, un objet éloigné R ; le *niveau apparent* ſera SR, & le *niveau vrai* ſera NSH. Et ſi l'œil eſt placé en A, le niveau apparent ſera AH ; le niveau vrai ſera AB.

La ligne SR ou AH ſera le niveau apparent : parce qu'elle nous paroît horiſontale. Elle ne ſera pas le niveau vrai : parce que le point H eſt réellement plus éloigné du centre de la terre que le point A, de toute la longueur BH. Si la ligne HA eſt ſuppoſée être un canal ; un fluide couleroit ou deſcendroit par ce canal, de H en A : parce que tous les fluides tendent à s'approcher du centre de la terre ; & que le fluide qui a communication de H en A, s'approchera du centre de la terre, en paſſant de H en A.

II°. Il réſulte de-là, que *le rayon viſuel ou le niveau apparent* AH, *eſt une tangente au niveau vrai* AB. Or comme la tangente s'écarte toujours de plus en plus de la circonférence qu'elle touche ; il s'enſuit que plus la ligne du niveau apparent SR ou AH devient longue ; plus elle s'écarte du niveau vrai SH ou AB, en s'élevant de plus en plus au-deſſus du niveau vrai.

III°. Comme la circonférence de la terre eſt extrêmement grande, une ligne de 100 ou 110 toiſes, priſe ſur cette circonférence, ſe confond ſenſiblement avec une ligne droite ; & dans ce cas, le niveau vrai n'eſt pas ſenſiblement diſtingué du niveau apparent : on peut donc prendre ſans erreur notable, l'un pour l'autre. Mais quand la diſtance SR ou AH eſt beaucoup plus conſidérable ; alors le niveau apparent AH, a un hauſſement ſur le vrai niveau AB ; & pour avoir le vrai niveau, il faut retrancher du niveau apparent, cet excès ou ce hauſſement,

534. REMARQUE. Voici une table des différences de hauteur, qui ſe trouvent entre le niveau apparent AH, & le niveau vrai AB : le premier eſt toujours

plus élevé ou plus éloigné du centre de la terre, que le dernier. (*fig.* 76.)

I°. Quand la distance de deux points à niveller, n'est que d'environ une centaine de toises, la différence de hauteur entre le niveau vrai & le niveau apparent, est comme infiniment petite; & on prend l'une pour l'autre, sans aucune erreur sensible.

II°. Quand la distance de deux points à niveller A & H, est de 4000 toises; le niveau apparent est élevé de 14 pieds 8 pouces, au-dessus du vrai niveau; & on ne peut plus prendre l'un pour l'autre.

III°. L'excès du niveau apparent AH sur le niveau vrai AB, est égal à l'excès de la sécante CH, sur le rayon TB ou TA; & cet excès BH ou B*x*, quand l'angle ATH est fort petit, est à très-peu près égal au sinus verse A*v* de cet angle (*622*), ou à l'excès *du rayon* AT sur le sinus BM de l'angle de complément *MTB*. Ainsi il est toujours facile de trouver par le moyen des tables des sinus, cet excès de niveau apparent AH, sur le niveau vrai AB : soit en prenant l'excès de la sécante sur le rayon; soit en prenant l'excès du sinus total AT, sur le co-sinus MB = T*v*.

IV°. C'est d'après cette théorie & d'après cette méthode géométrique, qu'a été construite la table suivante : elle n'a pour objet que les petites distances, les seules dont on ait communément besoin dans le nivellement. (*fig.* 77.)

Selon cette table, donnée par MM. Picard & de la Hire; si la ligne RVST étoit de 500 toises; le point T, qui termine le niveau apparent, seroit 2 pouces & 9 lignes au-dessus du vrai niveau *n* : pour avoir le vrai niveau au-dessus du point B, il faudroit donc retrancher ces 2 pouces & 9 lignes, de la hauteur T. Si la ligne RVST étoit de mille toises de longueur; il faudroit retrancher au niveau trouvé en T, 11 pouces : le reste de la hauteur BT, feroit le vrai niveau ou le niveau *n* que l'on cherche.

V°. On a trouvé par le calcul, & on verra dans la table suivante, que l'excès du niveau apparent sur le niveau vrai, augmente comme les quarrés des distances : par exemple (*fig.* 76), quand l'arc AB est de 1000 toises, l'excès est de 11 pouces : quand l'arc AB est de 2000 toises, l'excès est de 44 pouces; & ainsi du reste. On pourra donc toujours, sans le secours des tangentes & des co-sinus, trouver cet *excès du niveau apparent* sur le niveau vrai, pour une distance quelconque donnée, par cette proportion : le quarré de 2000 toises, est à 44 pouces; comme le quarré de la distance donnée ou trouvée 2786 toises, par exemple, est à $x$ qui exprimera l'excès du niveau apparent sur le niveau vrai, à une distance de 2786 toises; & ainsi du reste.

*Table des haussemens du niveau apparent.*

| Distances. | Haussemens. | | Distances. | Haussemens. | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Toises. | . . . Pouces. | Lignes. | Toises. | Pieds. | Pouc. | Lignes. |
| 50 | . . . . . 0 | $\frac{1}{3}$ | 750 | 0 | 6 | 3 |
| 100 | . . . . . 0 | 1 $\frac{1}{3}$ | 800 | 0 | 7 | 1 |
| 150 | . . . . . 0 | 3 | 850 | 0 | 7 | 11 $\frac{1}{2}$ |
| 200 | . . . . . 0 | 5 $\frac{1}{3}$ | 900 | 0 | 8 | 11 |
| 250 | . . . . . 0 | 8 $\frac{1}{3}$ | 950 | 0 | 10 | 9 |
| 300 | . . . . . 1 | 0 | 1000 | 0 | 11 | 0 |
| 350 | . . . . . 1 | 4 $\frac{1}{3}$ | 1250 | 1 | 5 | 2 $\frac{1}{2}$ |
| 400 | . . . . . 1 | 9 $\frac{1}{3}$ | 1500 | 2 | 0 | 9 |
| 450 | . . . . . 2 | 3 | 1750 | 2 | 9 | 8 $\frac{1}{2}$ |
| 500 | . . . . . 2 | 9 | 2000 | 3 | 8 | 0 |
| 550 | . . . . . 3 | 6 | 2500 | 5 | 8 | 9 |
| 600 | . . . . . 4 | 0 | 3000 | 8 | 3 | 0 |
| 650 | . . . . . 4 | 8 | 3500 | 11 | 2 | 9 |
| 700 | . . . . . 5 | 4 | 4000 | 14 | 8 | 0 |

## LE NIVEAU D'EAU.

535. DESCRIPTION. L'instrument dont on se sert le plus communément, pour trouver le niveau, est une machine fort simple qu'on nomme le *niveau d'eau* : parce qu'une surface d'eau fait trouver le niveau que l'on cherche. (*fig.* 77 & 78.)

Le niveau d'eau est composé d'un assez large tuyau de fer-blanc RMS, recourbé perpendiculairement à ses extrêmités, à chacune desquelles on mastique un autre tuyau de verre R*m* & R*n*, à travers lequel on puisse voir la surface & le niveau de l'eau de part & d'autre. Au milieu M est un autre tuyau de fer-blanc, qui lui est perpendiculaire, & dans lequel s'enchâsse un piquet cylindrique MV, que l'on plante à-plomb sur le terrein, ou qui est soutenu par trois pieds obliquement écartés.

Quand on veut se servir de cet instrument, on le remplit d'eau jusqu'en RS dans le tube de verre ; & alors la surface de l'eau, qui paroît à travers le verre, se met de niveau en R & en S : *parce que comme* nous l'apprend l'expérience, les liquides qui communiquent entre eux & qui exercent en liberté leurs actions réciproques, se mettent de niveau, ou à égale distance du centre de la terre (*Phy.* 625.). Ainsi, si l'on vise de R en S, le long des deux surfaces de l'eau ; le rayon visuel RS aura les deux points R & S de niveau ; & si l'on prolonge indéfiniment le rayon visuel ou la ligne droite RS jusqu'en T, la ligne RST sera une ligne de niveau apparent.

Tel est le niveau que Riccioli préféroit à tous les autres, & dont on se sert communément, quand la distance à niveller n'est pas bien considérable. Pour le rendre plus commode, il faut placer aux deux extrêmités R & S du tuyau recourbé, deux pinnules

mobiles, qu'une vis puisse porter de part & d'autre à la hauteur précise de la petite surface d'eau R & S. Ces *deux pinnules* rendront la direction du rayon visuel plus fixe & plus décidée ; & comme alors on pourra se dispenser de viser à travers le tube de verre, la vision, qu'on pourra aider d'une lorgnette, deviendra très-nette à une assez grande distance.

Il faut que le tube de fer-blanc ait une longueur assez considérable, & assez de largeur pour que l'eau puisse s'y mouvoir de toute part en grande liberté. Il n'est pas nécessaire que le piquet MA ait une direction bien perpendiculaire à l'horison, ni que le tube transversal ait une direction bien horisontale : parce que l'eau se mettra par elle-même exactement de niveau en R & en S ; & que les deux pinnules mobiles, élevées ou abaissées convenablement de part & d'autre, donneront exactement ce niveau.

Les autres niveaux, dont on se sert pour niveller les plus grandes distances, ne different guere de celui-ci, qu'en ce qu'ils sont assortis à des lunettes d'approche, qui représentent plus distinctement les objets.

Nous avons parlé ailleurs d'un niveau plus simple, & qui peut donner assez souvent toute la précision dont on a besoin en une foule d'occasions. (420.)

### PROBLÊME.

536. *Deux points* A & B *étant donnés sur le terrein ; trouver si ces deux points sont de niveau, ou de combien l'un est plus éloigné que l'autre, du centre de la terre. (fig. 77.)*

SOLUTION. Les deux points A & B peuvent être ou peu éloignés ou fort éloignés : s'ils sont fort éloignés, on peut ou chercher tout d'un coup leur niveau, ou chercher une suite de points de niveau, d'un point à l'autre.

I°. Supposons que la distance AB sur le terrein, ne soit que d'environ 100 ou 110 toises en lignes droite. Dans ce cas, où le niveau apparent se confond sensiblement avec le niveau vrai, je mets le niveau d'eau en A, & j'envoie en B, un homme destiné à concourir avec moi dans mon opération. Je donne à mon aide une grande perche ou toise BP, qu'il doit mettre à-plomb en B; & un grand carton sur lequel est tracé horisontalement une grande ligne ou raie noire T. Je le préviens qu'il faudra, étant arrivé au terme, faire glisser le carton le long de la toise; ensorte que la ligne noire T du carton soit toujours perpendiculaire sur la toise BP. Je vise par les surfaces R, S, de l'eau; & lorsque je m'apperçois que la ligne noire du carton passe par l'extrêmité T du rayon visuel RST; je fais signe à mon aide de s'arrêter: afin qu'il mesure la hauteur TB; & je mesure la hauteur VA du rayon visuel RVST.

Je fais signe à mon aide de revenir; & si la hauteur TB qu'il a trouvée, est égale à la mienne AV; les deux points A & B sont de niveau. Car les points V, T, étant également éloignés du centre de la terre; si de ces distances égales je retranche les parties égales VA, TB, les points A, B, seront aussi également éloignés du même centre de la terre. Que si la hauteur TB est moindre que la hauteur VA; je retranche la hauteur TB de la hauteur VA; & le reste HA fait voir que le point A est plus proche du centre de la terre que le point B, de toute la quantité HA. Il est aisé de voir ce qu'il faudroit faire, si la hauteur TB étoit plus grande que la hauteur VA.

II°. Si la distance VT est trop grande pour être nivellée d'un seul coup; il faudra prendre sur cette distance, différens points A & N, N & O, O & B, éloignés l'un de l'autre d'environ 100 toises, & les niveller séparément par la méthode que l'on vient de donner; ou bien si l'on ne veut donner qu'un seul

coup de niveau, il faudra retrancher du niveau apparent, ce qu'il a d'excès sur le niveau vrai; par la table précédente.

III°. On peut aussi niveller les deux points A & B, quelle que soit leur distance, en portant le niveau d'abord en A, d'où l'on visera sur la toise BP; & ensuite en B, d'où l'on visera sur une toise plantée perpendiculairement en AV. Dans ce cas on ne fait point attention au haussement de niveau apparent: parce que ce haussement est le même pour l'une & pour l'autre station. Par exemple, si en nivellant de V en T, je donne 4 pouces de trop en hauteur au point T; en nivellant ensuite de T en V, je donnerai également 4 pouces de trop en hauteur au point V; & l'égalité sera rétablie: puisque j'ajoute une même grandeur *n* T, à deux grandeurs égales. (*fig.* 77.)

537. REMARQUE. Si l'on cherche le niveau du point B, pour conduire les eaux par un canal ou par un aqueduc, de B en H; il faudra, pour que l'écoulement ait lieu, que la ligne ou le canal BH s'abaisse successivement au-dessous du vrai niveau, depuis le point B jusqu'au point H. Selon Wolfe, cette pente doit être au moins $\frac{1}{400}$ & au plus $\frac{2}{400}$ de la longueur ou de la distance BH: c'est-à-dire, que si le canal BH a 400 toises de longueur, l'extrêmité H du canal doit aboutir au moins à une toise & au plus à deux toises au-dessous du point H qui est de niveau avec la source en B. Les grands canaux, tels que les lits des fleuves & des rivieres, ont besoin de beaucoup moins de pente, pour avoir leur écoulement (*Phy.* 627). Mais les petits canaux exigent plus de pente que les grands; & ils en exigent d'autant plus, qu'ils sont plus petits.

## *DES SURFACES PRISES SUR LA TERRE.*

538. OBSERVATION. Dans la planimétrie, nous avons donné & résolu un problême qui apprend à

mesurer la surface d'une province ou d'un royaume (453). Dans la solution de ce problême, nous avons considéré les différentes montagnes ou hauteurs que nous avons supposé servir de stations, comme étant toutes de niveau, ou à égale distance du centre de la terre. Mais comme il arrive très-rarement que les sommets des diverses montagnes soient de niveau; la surface que l'on trouveroit en les prenant pour stations, seroit non une surface unie, mais une surface irréguliérement inclinée, & assez ressemblante aux différentes surfaces des toits qui couvrent différentes maisons, laquelle surface des toits est bien plus grande que les sols ou les bases des maisons auxquelles elle correspond. (*fig.* 64.)

Il faut donc, pour trouver exactement cette surface, prendre sur ces différentes montagnes des points de niveau, selon la méthode que nous venons de donner en traitant du nivellement. Par exemple, ayant à mesurer sur le terrein un triangle DEI, supposons que les points ou stations D, E, aient été trouvés de niveau; & que la montagne I soit beaucoup plus élevée que ces deux points ou stations.

Dans ce cas, je prendrai pour station sur cette montagne, non le sommet I, mais deux points *m*, *n*, plus bas & de niveau avec les deux points D, E. Cela étant fait, je mesurerai, non le triangle DIE, mais le triangle D*m*E, plus le triangle *m*D*n*, dont je connoîtrai les deux côtés D*m*, D*n*, & l'angle compris entre ces deux côtés. Je mesurerai ensuite D*n*K, & ainsi du reste, en prenant toujours des points de niveau: & par-là j'aurai la surface exacte de la province ou du royaume, que j'avois à mesurer.

539. OBJECTION. On peut objecter contre cette méthode; en premier lieu, que la surface qu'on trouvera, sera plus grande que la vraie surface: puisqu'elle sera égale à la surface qu'auroit la partie correspondante de la terre, si la surface de la terre étoit par-

tout élevée jusqu'à la hauteur des points qui ont servi de station. En second lieu, que la surface qu'on trouvera ne sera point convexe & ressemblante à la surface de la terre : puisqu'elle sera un composé de triangles à surface plane & fort irréguliere.

RÉPONSE I. Je réponds à la premiere objection 1°. que la différence entre la surface trouvée & la vraie surface, ne sauroit être considérable : à raison du peu d'élévation qu'ont au-dessus de la vraie surface, les stations que l'on choisit. 2°. Qu'il est facile, si l'on veut avoir une exactitude scrupuleuse, de réduire à sa juste valeur la surface trouvée & excédente. Car les surfaces des spheres étant entre elles, comme les quarrés de leurs diametres ou de leurs rayons respectifs (584); les portions semblables de ces surfaces, sont aussi entre elles comme les quarrés de ces rayons; puisque les parties semblables sont toujours entre elles comme leurs touts.

On aura donc cette proportion : la vraie surface, est à la surface trouvée; comme le quarré du rayon terrestre, est au quarré du même rayon prolongé jusqu'aux points qui ont servi de station. Ainsi, si les stations sont élevées de deux cents toises au-dessus de la surface de la terre, comparez le quarré du rayon de la terre, avec le quarré du même rayon augmenté de deux cents toises; & retranchez de la surface trouvée, une quantité proportionnelle à l'excès qu'aura le quarré du rayon augmenté, sur le quarré du rayon simple : le reste exprimera la vraie surface.

RÉPONSE II. Je réponds à la seconde objection; qu'en supposant la terre sphérique, une très-petite partie de cette surface, prise séparément, ne differe que comme infiniment peu de la surface plane : puisque dans une étendue de 300 toises, la courbure n'est que d'environ un pouce, comme on peut le voir dans la table des haussemens du niveau (534). Cette sur-

face sphérique peut donc dans la pratique, être confondue sans erreur sensible, avec une surface plane. Donc une foule de petites surfaces planes, telles que sont les triangles en question, peuvent sensiblement & sans erreur notable, mesurer la surface sphérique de la terre.

## *Inégalités des Montagnes.*

540. Remarque. Quand on cherche la surface triangulaire comprise entre trois pointes de montagnes; la surface que l'on trouve est une surface plane, ou une surface égale & semblable à celle d'un plan triangulaire qui atteindroit aux trois points donnés de ces montagnes; & qui couvriroit des enfoncemens, des élévations, des inégalités de toute espece, *sur la surface même de la terre*. Cette surface plane est la vraie surface comprise entre ces trois points. Car on considere la surface de la terre, relativement aux corps perpendiculaires à l'horison qu'elle peut contenir. Or il est évident que *la courbure & l'élévation des montagnes, n'augmentent pas cette surface*; & que sur la surface convexe d'une montagne en cône ou en pain de sucre, on ne placeroit pas perpendiculairement à l'horison, plus d'arbres d'un pied de diametre, que sur sa base: puisque chaque arbre aura toujours, sur la base horisontale de la montagne, un espace correspondant à sa propre base. (*fig.* 118.)

Pour rendre ceci plus sensible, concevez un cône droit BAC, inscrit dans un cylindre TBCV de même base & de même hauteur que le cône. Il est clair que vous ne placeriez pas sur la surface convexe du cône, plus de solides *rn*, *sm*, *vn*, perpendiculaires à la base AB, que vous en placeriez sur la base même: puisque la somme de tous ces solides, appuyés par leurs bases *nm*, *mn*, *oAm*, sur la surface convexe du cône, sera

renfermée dans la capacité du cylindre, laquelle est mesurée par la base BCB du cône.

Ou bien (*fig.* 89), concevez que le solide RABS, soit une grande salle de spectacle, dont la base oblique AM soit le parterre. Il est évident que la base horisontale AB contiendra tout autant de rangs de chaises ou de personnes droites, qu'en contiendra la base inclinée ou le parterre AM, oblique à l'horison & élevé en amphithéâtre : puisque la base *nm* de chaque chaise ou de chaque personne, occupe sur la base inclinée, précisément la même quantité d'espace perpendiculaire qu'elle occuperoit en *ab* sur la base AB parallele à l'horison.

On voit par-là, comment & en quel sens il est vrai & démontré, que *les enfoncemens & les élévations des montagnes & des vallées terrestres*, en donnant réellement une plus grande étendue de surface inclinée & irréguliere à la terre, ne la rendent pas capable de contenir plus de maisons ou d'arbres ou de plantes perpendiculaires à l'horison; que si elle étoit par-tout, comme la surface d'un glace ou d'une mer tranquille, parfaitement unie & sans aucune inégalité dans sa surface.

541. CONCLUSION. Après avoir considéré les surfaces planes, dans leur égalité, dans leurs rapports, dans leurs sections & dans leurs positions respectives; il nous reste à considérer & les surfaces planes & les surfaces courbes dans les solides; & ce sera l'objet de la premiere partie du Traité suivant.

# PRINCIPES
## *DU CALCUL*
## ET DE LA GÉOMÉTRIE,
OU
*ÉLÉMENS DE MATHÉMATIQUES.*
# GÉOMÉTRIE.

## TROISIEME TRAITÉ.
### *Les Solides, ou la Stéréométrie.*

542. Définition. La *Stéréométrie* (302) est la science de l'étendue considérée selon ses trois dimensions, longueur, largeur, & profondeur. La *surface des corps*, la *solidité des corps*, tel est l'objet de ce Traité.

## ARTICLE PREMIER.
### *Surface des Corps.*

543. Définition. On nomme *un solide* en Géométrie, un corps quelconque, dur ou liquide ou

fluide, qui renferme trois dimensions, longueur, largeur, & profondeur. Un pied cube d'eau ou d'air est un solide, aussi bien qu'un pied cube de marbre.

544. DÉFINITION II. On nomme *surface des corps* ou des solides, la somme de toutes les lignes droites ou courbes, qui terminent extérieurement leurs trois dimensions.

545. DÉFINITION III. Comme un point, en se mouvant, décrit une ligne; comme une ligne, en se mouvant, décrit une surface; de même *une surface, en se mouvant, décrit un solide.* La surface qui par son mouvement, produit ou produiroit tel solide, se nomme *plan générateur* de ce solide.

La formation des différens solides, le développement de leurs surfaces, le rapport de ces surfaces, tel est l'objet de ce premier article.

## PARAGRAPHE PREMIER.

### *FORMATION DES SOLIDES.*

PARMI les solides de différente figure, nous considérerons principalement ceux auxquels peuvent se rapporter tous les autres, savoir les prismes, les cylindres, les pyramides, les cônes, les spheres, les sphéroïdes.

On nomme *polyedres réguliers*, des solides terminés par des angles solides tous égaux & par des surfaces planes toutes égales. On en compte cinq: le *tétraëde*, compris sous quatre triangles égaux & équilatéraux; l'*octoëdre*, compris sous huit triangles égaux & équilatéraux; l'*icosaëdre*, compris sous vingt triangles égaux & équilatéraux; l'*exaëdre* ou le cube, compris sous six quarrés égaux; le *dodécaëdre*, compris sous douze pentagones réguliers & égaux. La théorie des polyë-

dres & de leur assortiment en solides réguliers, théorie qui occupa si fort les anciens Géometres, a cessé d'intéresser les modernes, qui n'en ont vu sortir aucune utile lumiere. Polyëdre : de πολὺς, *multus* ; & de ἕδρα, *sedes*, siege ; *angulus solidus*, instar sedis.

## *LE PRISME.*

546. DÉFINITION I. Un *prisme* est un solide, qui dans toute sa longueur, a une égale grosseur ; qui est entouré de plus ou moins de faces planes, qui sont des parallélogrammes ; & qui est compris entre deux bases, l'une supérieure & l'autre inférieure, lesquelles sont des figures semblables, paralleles, & égales.

Le prisme prend différens noms, suivant le nombre des côtés de sa base ; & s'appelle triangulaire, *quadrangulaire*, pentagonal, exagonal, décagonal, *dodécagonal*, selon que sa base est ou un triangle ou un quadrilatere ou un pentagone ou un exagone ou un décagone ou un dodécagone ; & ainsi du reste.

I°. On nomme *cube*, un prisme d'une grandeur quelconque, compris sous six faces, dont tous les côtés sont égaux, & dont tous les angles sont droits. *Tel est* un dé à jouer. (*fig.* 4 & 74.)

II°. On nomme *parallélopipede*, un prisme d'une grandeur quelconque, compris sous six parallélogrammes, dont les opposés sont égaux. Lorsque tous les angles des parallélogrammes sont droits, il est appellé *parallélopipede rectangle* : telle est une solive équarrie. Lorsque les angles opposés ne sont pas droits, il est appellé *parallélopipede obliqu'angle*. Tel est le prisme GDAF, si l'angle CAE ou ACF est aigu ou *obtus*. (*fig.* 79.)

III°. On nomme *prisme triangulaire*, un prisme dont la base est un triangle ; *prisme pentagonal*, un prisme dont la base est un pentagone régulier ou irrégulier ; & ainsi du reste. Par exemple, si la base

ACB est un plan triangulaire, le prisme AEFD-CAB est un prisme triangulaire. (*fig.* 87.)

547. DÉFINITION II. On nomme *axe d'un prisme*, une ligne droite, tirée du centre de la base supérieure au centre de la base inférieure. On nomme *hauteur d'un prisme*, une ligne droite, tirée d'un des angles du prisme perpendiculairement sur la base prolongée, s'il le faut. La ligne *ax* est l'axe; la ligne DG ou AE est la hauteur. (*fig.* 79.)

Un *prisme est droit*, lorsque son axe est perpendiculaire aux bases: un *prisme est oblique*, lorsque son axe est incliné sur les bases.

548. DÉFINITION III. Le *plan générateur d'un prisme*, est sa base que l'on conçoit monter ou descendre parallélement à elle-même, le long de son axe. (*fig.* 79.)

Si la base supérieure ABDC, par exemple, descend parallélement à elle-même le long de l'axe *ax* en EHGF, laissant par-tout sur son passage des traces ou des couches d'elle-même; elle formera le parallélopipede ou le prisme FB.

Si la base triangulaire ACB monte parallélement à elle-même en EDF, elle formera de même le prisme triangulaire AEDCBF. (*fig.* 87.)

## *LE CYLINDRE.*

549. DÉFINITION. Si le plan générateur est un polygone régulier d'une infinité de côtés, ou un cercle; alors le prisme qui sera formé par le mouvement du plan générateur le long de son axe parallélement à lui-même, sera un cylindre ABDC. (*fig.* 80.)

Un cylindre peut donc être regardé comme un prisme entouré d'une infinité de faces, qui sont des parallélogrammes d'une largeur infiniment petite.

L'axe & la hauteur dans le cylindre, sont la même chose que dans le prisme. Ainsi SX est l'axe: CA ou DB est la hauteur, si le cylindre est droit.

Ce *cylindre est droit*; parce que son axe est perpendiculaire à sa base : ce *cylindre seroit oblique*, si son axe étoit incliné sur sa base. Dans le cylindre oblique ou incliné, la hauteur est une perpendiculaire menée d'un point de la base supérieure sur la base inférieure.

## *LA PYRAMIDE.*

550. DÉFINITION. La pyramide est un solide terminé d'une part par une base d'un nombre fini de côtés & de l'autre par un point, & environné de faces qui sont des triangles, dont les sommets se réunissent tous en un même point que l'on appelle *sommet* de la pyramide. AEBF est une pyramide. (*fig.* 82.)

I°. La pyramide, ainsi que le prisme prend différens noms, selon le nombre des côtés qui terminent sa base. Elle s'appelle *triangulaire*, *quadrangulaire*, *pentagonale*, *dodécagonale*, selon que la base est ou un triangle, ou un quadrilatere, ou un pentagone, ou un dodécagone; & ainsi du reste.

II°. On appelle *hauteur de la pyramide*, une perpendiculaire menée du sommet de la pyramide sur la base prolongée, s'il le faut; *axe de la pyramide*, une ligne tirée du sommet de la pyramide au milieu ou au centre de la base; *apothême de la pyramide*, une ligne tirée du sommet de la pyramide perpendiculairement sur un des côtés de la base prolongée, s'il le faut. Ainsi la ligne AN, perpendiculaire à la base EBFE, est la hauteur de cette pyramide : la ligne AN, oblique ou perpendiculaire sur la même base, mais aboutissant du sommet A au centre de la base, est l'axe de cette pyramide : la ligne A*n*, perpendiculaire au côté EF, est l'apothême de ce côté de la pyramide.

III°. La pyramide est droite ou oblique. La *pyramide est droite*, quand son axe, qui aboutit toujours au centre de la base, est perpendiculaire sur cette base :

la

la *pyramide est oblique*, quand son axe est incliné sur la base. Les faces de la pyramide sont toujours des triangles, égaux ou inégaux, semblables ou dissemblables. (*fig.* 82, 88, 89.)

### LE CONE DROIT ET OBLIQUE.

551. DÉFINITION I. Le *cône droit* est un solide dont le sommet A est un point, dont la base BCB est un cercle, & dont les côtés sont une infinité de triangles isoceles & égaux. (*fig.* 83.)

I°. Le *plan générateur du cône droit* est le triangle rectangle ASBA. Si ce triangle rectangle fait une révolution sur l'un des côtés qui forment l'angle droit, par exemple, sur AS; le côté AB décrira le cône droit BAC. De même si ce triangle rectangle fait une révolution sur le côté BS, le côté AB décrira un autre cône droit dont le *sommet* sera en B.

II°. Le cône, ainsi que la pyramide, a sa hauteur, son axe, son apothême. La *hauteur du cône*, droit ou oblique, est une perpendiculaire menée du sommet sur la base, prolongée s'il le faut: l'*axe du cône* est une ligne droite menée du sommet au centre de la base, qui est toujours un cercle: l'*apothême du cône* est une ligne droite AB ou AC, menée du sommet du cône sur un point de la circonférence de la base. Dans le cône droit, tous les apothêmes sont égaux: dans le cône oblique, les apothêmes vont en croissant ou en décroissant dans toute une demi-circonférence de la base. (*fig.* 83.)

552. DÉFINITION II. Le *cône oblique* est un solide dont la base est un cercle; dont le sommet est un point; & dont les côtés sont une infinité de triangles dont les bases sont toutes égales, mais dont les hauteurs ne sont pas toutes égales. Si la base BCB restant la même, le cône BAC venoit à s'infléchir d'un côté ou d'un autre, en telle sorte que son axe AS devînt

plus ou moins oblique indéfiniment sur la base, ce cône droit deviendroit un cône oblique. Le cône SR est oblique. (*fig.* 120.)

## *LE CONE TRONQUÉ.*

553. DÉFINITION. Si on fait passer par un cône droit ou oblique, un plan parallele à la base; la partie interceptée entre le plan & la base sera un *cône tronqué*. Ainsi *bc* CB est un cône tronqué. (*fig.* 83.)

Dans le triangle rectangle ABC, qui fait la derniere partie de cette figure 83; si la partie *bc* CB ou *mn* CB, fait une révolution sur la ligne AB; on aura un cône droit tronqué, dont la base aura BC pour rayon ou pour demi-diametre.

## *LA SPHERE.*

554. DÉFINITION. Si un demi-cercle d'une grandeur quelconque ADB, immobile aux points A & B, est supposé faire une révolution sur la ligne ou sur le diametre AB; ce demi-cercle décrira *un solide parfaitement rond* ADBFA, qu'on nomme *sphere*. (*fig.* 84.)

I°. Il est évident que *la courbure de la surface d'une sphere, est par-tout égale & uniforme*: puisque tous les points de cette surface sont éloignés du centre C, de la longueur du rayon du demi-cercle générateur.

II°. Le centre C du plan générateur, est le *centre de la sphere*: il est également éloigné de tous les points de la surface de la sphere. Toute *ligne* droite CF, CA, C*b*, C*h*, C*a*, menée du centre à un point quelconque de la surface, est un *rayon de la sphere*. Toute ligne droite AB, DF, *bh*, qui passant par le centre de la sphere aboutit à deux points de la surface, est un *diametre de la sphere*.

III°. La ligne AB, autour de laquelle se fait ou est

conçue se faire la révolution, s'appelle l'*axe de la sphere*. Les points A & B, qui terminent de part & d'autre l'axe de la sphere, se nomment les *poles de la sphere*. On peut prendre pour axe de la sphere, un diametre quelconque sur lequel la sphere est supposée ou conçue tourner; & alors les extrêmités de ce diametre quelconque *bh*, seront les poles de la sphere.

III°. On appelle *grands cercles de la sphere*, ceux dont le plan passe par le centre de la sphere; & *petits cercles de la sphere*, ceux dont le plan passe hors du centre de la sphere. Ainsi DCFD est un grand cercle, aussi bien que ADBFA, aussi bien que *b*C*h*C*b*: mais *dxd*, *ava*, *chc*, sont des petits cercles.

De cette définition ou de cette formation de la sphere, découlent les corollaires suivans, qui portent en eux-mêmes leur évidence, & qu'il suffira de faire remarquer.

555. COROLLAIRE I. *Deux grands cercles de la sphere se coupent nécessairement; & leur commune section est une ligne droite, qui passe par le centre, & qui par conséquent est un diametre de l'un & de l'autre cercle.* (*fig.* 84.)

EXPLICATION. Puisque les grands cercles sont ceux qui passent par le centre, étant formés par la révolution des plus grandes cordes; il est clair que deux grands cercles DFD, *bhb*, doivent nécessairement s'entrecouper. Car passant l'un & l'autre par le centre, s'ils ne s'entre-coupoient pas dans ce point commun, il faudroit ou que toute la surface de l'un fût confondue avec toute la surface de l'autre; & alors ils ne formeroient pas deux cercles, mais un seul cercle: ou que toute la surface de l'un fût hors de toute la surface de l'autre; & alors celui dont la surface seroit hors du centre, ne seroit plus un grand cercle, mais un petit cercle. Donc deux grands cercles d'une sphere

s'entre-coupent néceſſairement, & interceptent ou forment entre eux un angle plus ou moins grand.

II°. Comme les plans de deux cercles ſont ſans profondeur, leur commune ſection eſt une ligne : par exemple, la commune ſection des deux plans circulaires DFD & ADBFA eſt la ligne DCF, laquelle eſt néceſſairement un diametre ; puiſqu'elle paſſe par le centre de la ſphere, où s'entre-coupent les deux grands cercles.

556. COROLLAIRE II. *Tous les points de la demi-circonférence qu'on fait tourner autour d'un diametre, décrivent des circonférences paralleles entre elles.*

EXPLICATION. Si la demi-circonférence ADB, compoſée d'une infinité de points, fait une révolution autour de l'axe AB ; il eſt clair que le point *D de cette* demi-circonférence, décrira une circonférence DFD ; que le point *d* de la même demi-circonférence, décrira une autre circonférence *dxd* ; que le point *b* de la même demi-circonférence, décrira une autre circonférence *brb* ; que ces circonférences quelconques DFD & *dxd* ſont paralleles entre elles : *puiſqu'elles* ſont par-tout éloignées l'une de l'autre, de la grandeur de l'arc D*d* qui fait ſa révolution avec les points D & *d*.

I°. Tous les points de chaque circonférence quelconque *dxd*, ſont également éloignés d'un des poles B de la ſphere : puiſqu'ils en ſont tous éloignés de la grandeur de l'arc *d*B. Ils ſont auſſi tous également éloignés de l'autre pole A : puiſqu'ils en ſont tous éloignés de la grandeur de l'arc *d*DA. C'eſt pourquoi *les* poles A & B peuvent être appellés les poles de *toutes* ces circonférences paralleles ; & le diametre *AB* eſt leur axe commun, puiſqu'il paſſe par tous leurs centres.

II°. Tous les cercles paralleles d'une même ſphere ayant les mêmes poles & le même axe AB ; il eſt clair

que cet axe mesure la distance d'un cercle à l'autre : puisque cet axe est une perpendiculaire entre deux surfaces paralleles. Ainsi la partie CN de l'axe, mesure la distance des deux cercles DFD & *dxd* : la partie NB, mesure la distance du cercle *dxd* au pole B : la partie NA, mesure la distance du même cercle au pole A ; & ainsi du reste.

557. COROLLAIRE III. Il résulte évidemment de cette théorie de la formation de la sphere :

I°. Que *le plus grand de tous les cercles paralleles, est celui qui passe par le centre, & qui est également éloigné des deux poles.* Ainsi tout cercle qui passe par le centre d'une sphere est un grand cercle ; & il divise la sphere en deux parties égales. Tout cercle qui ne passe point par le centre de la sphere, est un petit cercle, & il divise la sphere en deux parties inégales.

II°. *Que les cercles paralleles, également éloignés du centre de la sphere l'un vers le pole* A *& l'autre vers le pole* B, *sont égaux en diametre & en surface.* Ainsi dans la sphere céleste & terrestre, les deux tropiques sont égaux entre eux, aussi bien que les deux cercles polaires ; si la terre & le ciel sont de vraies spheres.

III°. Que *les cercles paralleles* chc & dxd, *qui sont entre le centre de la sphere & un même pole, sont d'autant plus petits, qu'ils sont plus loin du centre & plus près du pole.* Le plus petit de tous les cercles se confond avec le pole même, ou avec un point. (438.)

## LE SPHÉROÏDE.

558. DÉFINITION. Si la moitié AMXM d'un polygone, régulier ou irrégulier, d'un nombre fini de côtés, est supposée faire une révolution sur son axe AX ; elle décrira un solide AMXNA, qu'on nomme *un sphéroïde* ; parce qu'il a plus ou moins de ressemblance avec la sphere. (*fig.* 81.)

I°. Si le plan générateur AXM eſt une moitié de polygone régulier ; le ſolide formé par la révolution de ce plan ſera un ſphéroïde régulier.

II°. Si le plan générateur eſt une moitié de polygone irrégulier ; le ſolide formé par la révolution de ce plan , ſera un ſphéroïde irrégulier.

III°. Si l'axe AX, autour duquel ſe fait la révolution du plan générateur , eſt plus petit que le diametre MN de l'équateur ; le ſphéroïde, régulier ou irrégulier, ſera applati vers ſes poles & allongé vers ſon équateur. Sphéroïde ; de σφαῖρα, *ſphere ;* & de εἶδος, *figure , reſſemblance.*

## PARAGRAPHE SECOND.

### *DÉVELOPPEMENT DES SURFACES.*

559. DÉFINITION. LE *développement de la ſurface d'un corps*, eſt une figure plane, égale à la ſurface du ſolide dont il eſt queſtion.

En traitant du développement des priſmes , des cylindres, des pyramides, des cônes, nous nous occuperons directement & principalement de ceux qui ſont droits. Il ſera aiſé de trouver par les mêmes principes, le développement de ceux qui ſont obliques.

### *DÉVELOPPEMENT DU PRISME.*

560. HYPOTHESE. Si une ligne CF, perpendiculaire à la baſe EFGH d'un priſme droit, tourne autour de cette baſe en demeurant toujours perpendiculaire à la baſe & parallele à elle-même ; cette ligne décrira la ſurface latérale du priſme droit FB ; c'eſt-à-dire , le contour du priſme, ſans y comprendre les deux baſes qu'on meſure à part. La révolution de cette ligne formera quatre rectangles M, N, O, P, égaux aux quatre

faces latérales du prisme BF, dont les côtés, qu'on nomme aussi *Arêtes*, sont AE, CF, DG, BH. (*fig.* 79.)

Ou si vous voulez, concevez une bande de papier, collée tout autour du prisme, sans y comprendre les deux bases. Il est évident que si on ôtoit cette bande & qu'on la développât; il paroîtroit un rectangle, qui auroit la même hauteur que le prisme, & qui auroit pour base une ligne droite égale au périmetre de la base du prisme. Ce rectangle MNOP, nécessairement égal à la surface du prisme, en est le développement. D'abord *cdgf* = CDGF : ensuite *dbhg* = DBHG : ensuite *baeh* = BAEH : enfin *acfe* = ACFE.

561. COROLLAIRE. *Le développement du prisme droit, est un rectangle, qui a pour base le périmetre de la base du prisme; & pour hauteur la hauteur du prisme.* Multipliez donc le périmetre de la base du prisme par la hauteur du prisme : le produit exprimera la surface latérale du prisme, sans y comprendre les deux bases qui sont deux plans qu'on mesure à part. (449.)

562. REMARQUE. I°. Si le prisme droit que nous venons d'observer, au lieu d'être quadrangulaire, étoit triangulaire ou pentagonal ou dodécagonal; il est clair qu'au lieu de quatre faces que nous avons trouvées, nous aurions eu par la même théorie, ou trois ou cinq ou douze faces, égales à celles du prisme, chacune à chacune; & qu'on auroit la surface latérale du prisme, en multipliant de la même maniere, le périmetre de la base par la hauteur. (*fig.* 79, 120.)

II°. Si le prisme que nous venons de considérer, au lieu d'être droit, étoit oblique, ayant son axe & ses côtés inclinés sur sa base; il est clair que pour avoir la *surface de ce prisme oblique*, qui sera ou triangulaire ou quadrangulaire ou pentagonal ou décagonal, & ainsi du reste, il faut mesurer séparément chaque face ou chaque parallélogramme; & qu'en prenant séparément le produit de la base de chaque parallélogramme

par sa hauteur particuliere, on aura la surface de tout le prisme, les bases supérieure & inférieure exceptées.

Ou si l'on veut une méthode générale pour trouver tout d'un coup la *surface du prisme oblique*, la voici. Coupez le prisme par un plan perpendiculaire à l'axe: l'intersection de ce plan avec la surface du prisme, sera un polygone dont chaque côté sera perpendiculaire aux arêtes du prisme, & mesurera conséquemment la largeur de chaque face. Ainsi, en multipliant le contour de ce polygone par le côté incliné ou l'axe du prisme, on aura la surface latérale de ce prisme.

### *DÉVELOPPEMENT DE LA PYRAMIDE.*

563. DÉFINITION. Le développement de la *pyramyde*, droite ou inclinée, est la somme *de tous les* triangles qui en sont les faces. On fait toujours abstraction de la base, qu'on mesure à part, & qui n'entre pour rien dans la surface latérale. Nous nommerons ici *pyramides régulieres*, celles dont l'axe n'est point incliné sur la base, & dont toutes les faces sont des triangles égaux & semblables.

I°. *Si la pyramide est droite & réguliere;* elle a autant de triangles égaux & semblables, que la base a de côtés. En mesurant un de ces côtés EF de la base, & en le multipliant par le nombre des côtés ou des faces de la pyramide, on aura le périmetre EBFE de la base: en multipliant ce périmetre par la moitié de l'apothême A *n*, ou de la perpendiculaire menée du sommet sur un côté de la base, on aura la surface latérale de la pyramide. (*fig.* 82.)

Par exemple, si sur la surface de la pyramide *droite* & réguliere AEBF, on suppose appliquée une *feuille* de papier; en développant ce papier, on aura les trois triangles H, I, K : ces trois triangles étant semblables & égaux, si on multiplie la base *ebfe* = EBFE, par la

moitié d'une perpendiculaire *an* égale à l'apothême de la pyramide; le produit exprimera la surface de ces trois triangles, & par conséquent la surface latérale de la pyramide, qui lui est égale. (449.)

Si la pyramide droite & réguliere étoit décagonale, par exemple; au lieu de trois triangles, on en auroit dix, de même base & de même hauteur: en multipliant le périmetre de la base, égal à la somme des dix bases des triangles, par la moitié de l'apothême, on auroit également un produit qui exprimeroit la surface de la pyramide décagonale; & ainsi du reste.

II°. *Si la pyramide est oblique, ou si sa base est un polygone irrégulier*; il faut pour avoir sa surface latérale, mesurer séparément tous les triangles inégaux qui forment cette surface. Le produit de chaque base triangulaire par la moitié de son apothême particulier, donnera le produit de chaque face de la pyramide; & la somme de tous ses produits, sera la surface latérale de toute la pyramide.

## *DÉVELOPPEMENT DU CYLINDRE.*

564. HYPOTHESE. Si une ligne CA ou DB, demeurant toujours perpendiculaire à la base ABA du cylindre droit, parcourt la circonférence de cette base; elle décrira la surface latérale du cylindre. (*fig.* 80.)

Le surface ou le *développement du cylindre droit*, est donc un rectangle EF, qui a pour base une ligne *a b a* égale à la circonférence ABA de la base du cylindre, & qui a la même hauteur que le cylindre. Multipliez donc la circonférence de la base du cylindre, par la hauteur AC du même cylindre: le produit exprimera la surface latérale ou convexe du cylindre droit ABDC, sans y comprendre les deux bases circulaires qu'on mesure à part.

565. COROLLAIRE. *Si la hauteur du cylindre droit est égale au diametre de la base ; la surface latérale du cylindre est quadruple de la base.* ( fig. 86. )

DÉMONSTRATION. Soit le cylindre droit ZOQY, dont l'axe PR soit égal au diametre OQ de la base. La *surface du cylindre* est égale au produit de la circonférence de la base, par la hauteur ZO, qui dans ce cas est égale au diametre de la base. La *surface du cercle* OQO, qui sert de base, est égale seulement au produit de la même circonférence de la base, par le quart du diametre de la base, ou par la moitié du rayon (484). Donc la surface du cercle qui sert de base, est quatre fois plus petite que la surface convexe & latérale du cylindre ; puisqu'une même *grandeur*, multipliée par 1 & par $\frac{1}{4}$ donne deux produits *qui sont* entre eux comme 4 est à 1 (67). Donc *la surface* convexe ou latérale du cylindre droit, dont la hauteur est égale au diametre de la base, est quatre fois plus grande que la surface de la base. C. Q. F. D.

566. REMARQUE. Quand un cylindre *AB est incliné* sur sa base toujours circulaire *B* (*fig.* 120) ; alors la surface latérale de ce cylindre oblique ne se trouve plus de la même maniere. En employant ici la méthode générale de la remarque précédente (562), on aura dans le cylindre une section elliptique ; & on voit du premier coup d'œil, que la *surface d'un cylindre oblique* AB est égale au produit de la circonférence de l'ellipse dont le plan est perpendiculaire à l'axe, par le côté incliné ou l'axe oblique du cylindre. Ainsi cette mesure dépend de la rectification de l'ellipse, & par-là même d'une théorie étrangere & supérieure à ce traité : on peut dire la même chose du cône oblique. La surface du cylindre AB n'est donc point le produit de la circonférence de la base B par

une perpendiculaire AP menée de la base supérieure A, sur la base inférieure B prolongée, s'il le faut.

## *DÉVELOPPEMENT DU CONE.*

567. HYPOTHESE I. Toutes les lignes droites, comme AB, tirées du sommet du cône droit sur la circonférence de la base BCB, étant égales; il est évident que si on développe la surface du cône droit, ce développement sera un secteur de cercle *abcd*, qui aura pour rayon le côté *ab*=AB, & un arc *bcd* égal à la circonférence de la base. (*fig.* 83.)

Ce secteur de cercle est égal en surface à un triangle rectangle ABC, qui auroit pour hauteur le rayon du secteur, & pour base une ligne droite égale à l'arc du secteur (482). Multipliez donc la hauteur du cône par la moitié de la circonférence de sa base, ou la circonférence de la base par la moitié de la hauteur : le produit sera la surface convexe ou latérale du cône droit.

568. COROLLAIRE. *La surface convexe du cône droit, est égale au produit de sa base par la moitié de son apothême :* puisque cette base est égale à celle d'un nombre infini de petits triangles isoceles *ban*, dont toutes les bases prises ensemble formeroient une ligne *bncd*, égale à la circonférence de la base BCB du cône; & que la surface de tous ces petits triangles, est le produit de cette base par la moitié de la hauteur commune *ar* (450), qui est l'apothême commun à tous ces triangles dans le cône, avant le développement. C. Q. F. D.

569. HYPOTHESE II. La surface convexe ou latérale du cône droit ABSC, étant égale à la surface du triangle rectangle ABC; il est clair que la surface latérale du cône tronqué *bc*CB, est égale au trapese *bc*CB, qui a pour hauteur le côté *b*B du cône tronqué, & dont

les bases *bc* & BC sont paralleles entre elles & égales aux circonférences des bases *bcb* & BCB du cône tronqué. (*fig.* 83.)

570. COROLLAIRE. *La surface convexe du cône droit tronqué, est égale au produit de son côté par une circonférence également éloignée des deux bases de ce cône:* puisque le cône tronqué *bc* BC est égal en surface au trapese *bc*CB; & que la surface de ce trapese est le produit de la hauteur *b* B, égale au côté ou à l'apothême du cône tronqué, par une moyenne proportionnelle arithmétique *mn* entre les deux bases paralleles de ce trapese (444). C. Q. F. D.

## *DÉVELOPPEMENT DU SPHÉROÏDE RÉGULIER.*

571. DÉFINITIONS. I°. Le *cylindre circonscrit à la sphere*, est un cylindre droit, qui a pour base le grand cercle de la sphere, & pour hauteur le diametre de la sphere. (*fig.* 86.)

II°. Le *cube circonscrit à la sphere*, est un cube dont les trois dimensions sont égales chacune au diametre de la sphere qu'il renferme. (*fig.* 124.)

III°. Le *cône équilatéral est circonscrit à la sphere*, lorsqu'il la renferme, & que sa surface touche celle de la sphere dans une circonférence *mnm* & dans un point *x*. Dans un cône équilatéral, le diametre de la base est égal à l'apothême ou au côté. (*fig.* 123.)

IV°. Dar tous ces cas, *la sphere est inscrite*, par rapport au corps circonscrit.

## THÉORÊME FONDAMENTAL.

572. *La surface d'un sphéroïde régulier circonscrit à une sphere, est égale au produit de son axe par la circonférence d'un grand cercle de la sphere inscrite; ou à la surface latérale & convexe d'un cylindre circonscrit à la même sphere.* (fig. 85.)

EXPLICATION. Soit un cercle APBRA : ſoient auſſi un quarré OQYZ, & un polygone régulier quelconque, circonſcrits à ce cercle. Si toute la partie ZPROZ tourne autour du diametre ou axe PR ; il eſt évident que le demi-cercle PARCP décrira *une ſphere ;* & que la moitié du quarré & du polygone régulier décriront, l'une *un cylindre*, & l'autre un *ſphéroïde régulier*, circonſcrits à la ſphere. Faiſant ici abſtraction de la ſurface de la ſphere, nous allons faire voir que la ſurface du ſphéroïde eſt égale à la ſurface convexe du cylindre circonſcrit, laquelle eſt le produit de l'axe PR par la circonférence d'un grand cercle de la ſphere OQO = ABA. (564.)

DÉMONSTRATION. Si par les angles du ſphéroïde circonſcrit à la ſphere, on fait paſſer des plans paralleles DE, MK, *rr*, GH, & ainſi du reſte ; le ſphéroïde ſe trouvera diviſé en pluſieurs portions, qui ſeront ou des cônes tronqués MKED ; ou des cylindres MK *rr ;* ou des cônes entiers, ſi les plans paralleles paſſoient par les angles *a* & *d*, D & F ; & ainſi du reſte. (*fig.* 85.)

Il eſt clair qu'après cette diviſion, la ſurface du ſphéroïde ne ſera pas diſtinguée de la ſomme des ſurfaces de tous ces cônes tronqués, ou cylindres, ou cônes entiers. Suppoſons le ſphéroïde diviſé comme le repréſente la figure : il ne contiendra que des cylindres ABKM, AB *rr ;* & des cônes tronqués MKED, *rr* HG ; & ainſi du reſte. Il s'agit de démontrer que chaque cône tronqué eſt égal en ſurface à un cylindre de même hauteur que lui, & d'un diametre égal au diametre de la ſphere.

I°. La portion cylindrique, compriſe entre les plans paralleles MK & AB, eſt évidemment égale au produit de ſon axe SC, par la circonférence de ſa baſe ABA, qui eſt la circonférence d'un grand cercle de la ſphere inſcrite. On peut dire la même choſe de

l'autre portion cylindrique *rr* AB du ſphéroïde. Ainſi cette portion MK*rr* du ſphéroïde eſt déjà égale en ſurface à la portion correſpondante MK*rr* du cylindre. La ſurface de cette portion du ſphéroïde circonſcrit eſt donc déjà le produit de ſon axe S*o*, par la circonférence d'un grand cercle de la ſphere (564). Il reſte donc à faire voir que la ſurface d'un cône tronqué quelconque DEKM, eſt auſſi égale à la ſurface de la portion correſpondante VXKM du cylindre circonſcrit. Pour le démontrer,

IIᵒ. Prenons le cône tronqué décrit pendant la révolution, par le côté DM du polygone régulier; & du milieu *d*, où ce côté touche la ſphere, menons une ligne *dn* parallele à la ligne DE, un diametre *dm*, & la ligne *nm*. Du point D, abaiſſons ſur MK, la perpendiculaire DN = TS : cette perpendiculaire DN, ou ſon égale TS, ſera l'axe TS du cône tronqué DEKM dont nous allons chercher la ſurface.

Cela poſé, on aura le triangle MDN, ſemblable au triangle *mdn* : car chaque angle du premier eſt égal à chaque angle correſpondant du ſecond. D'abord les angles N & *n* ſont égaux : puiſqu'ils ſont droits tous les deux; l'un N étant formé par une perpendiculaire, & l'autre *n* étant appuyé ſur le diametre *d*C*m* (368). Enſuite l'angle DMN eſt égal à l'angle D*dn*, étant tous les deux au-deſſus des paralleles, du même côté de la ſécante DM (358) : or l'angle *dmn* eſt égal à l'angle D*dn*; puiſque l'un *dmn* eſt un angle inſcrit, qui a pour meſure la moitié de l'arc *d*P*n* compris entre ſes côtés; & que l'autre D*dn*, formé par une tangente & par une corde, a auſſi pour meſure la moitié du même arc *d*P*n* compris entre ſes côtés ou ſoutenu par ſa corde *dn* (376) : donc l'angle *dmn* eſt auſſi égal à l'angle DMN = D*dn*. Enfin dans les deux triangles, le troiſieme angle eſt auſſi égal de part & d'autre : puiſqu'il eſt ſupplément à deux angles égaux. Par conſéquent, le triangle MDN eſt ſemblable au triangle

*mdn* : donc on aura cette proportion DM . DN ou TS :: *dm* . *dn*.

Il faut remarquer ici que *dn* eſt le moyen diametre du cône tronqué DEKM ; & que *dm* eſt le diametre de la ſphere, égal au diametre du cylindre circonſcrit. Or ces diametres *dn* & *dm* ſont entre eux (475) comme leurs circonférences *dnd*, *dmd*. De-là cette autre proportion : . . . . DM . TS :: *dmd* . *dnd*.

D'où il ſuit que . . . DM × *dnd* = TS × *dmd*.

Or la ſurface du cône tronqué DEKM eſt égale au produit DM × *dnd* ; c'eſt-à-dire, au produit de ſon côté ou de ſon apothême DM par la circonférence *dnd* d'un cercle qui tient le milieu entre ſes deux baſes (570) : donc cette ſurface du cône tronqué DEKM eſt auſſi égale au produit TS × *dmd*, qui eſt le produit de l'axe du cône par la circonférence d'un grand cercle de la ſphere ; produit égal à la ſurface de la portion correſpondante VXKM du cylindre circonſcrit. (564.)

III°. On démontrera de même que tout autre cône tronqué DEIF, eſt égal en ſurface à la portion correſpondante VXYZ du cylidre circonſcrit. Il ne s'agit que de tirer du point *a*, un diametre, & une parallele *ab* ; & de mener du point F, une perpendiculaire ſur DE. On aura, comme dans le cône précédent, deux triangles ſemblables, d'où l'on tirera cette proportion : l'apothême FD du cône tronqué, eſt à ſa hauteur PT ; comme une grande circonférence qui paſſeroit par le point *a*, eſt à la circonférence *aba* qui tient le milieu entre les deux baſes du cône.

A meſure que le cercle *aba* du cône tronqué devient plus petit que le cercle ZYZ de la portion correſpondante du cylindre circonſcrit ; le produiſant FD du cône, devient proportionnellement plus grand que le produiſant PT du cylindre : l'un peut donc compenſer l'autre.

IV°. Par conſéquent la ſomme des ſurfaces de tous les cônes ou cylindres du ſphéroïde, circonſcrits à la

ſphere, laquelle ſomme n'eſt autre choſe que la ſurface totale du ſphéroide circonſcrit, eſt égale au produit de l'axe entier PR de la ſphere, par la circonférence d'un grand cercle quelconque ABA ou *dmd* de la ſphere.

Cette ſomme des ſurfaces de tous les cônes ou cylyndres du *ſphéroïde circonſcrit* à la ſphere, ſera donc égale à la ſurface convexe du *cylindre circonſcrit* à la même ſphere : puiſque cette ſurface convexe du cylindre circonſcrit eſt auſſi le produit de l'axe entier du cylindre, égal à l'axe de la ſphere, par la circonférence de la baſe du cylindre, égale à la circonférence d'un grand cercle de la ſphere. C. Q. F. D.

## *Développement de la Sphere.*

### Théorême.

573. *La ſurface de la ſphere eſt égale au produit de ſon axe par la circonférence d'un de ſes grands cercles, ou à la ſurface latérale & convexe d'un cylindre circonſcrit.* (fig. 85 & 86.)

Démonstration. Ce théorême n'eſt au fond qu'un corollaire du théorême précédent. La ſphere peut être conſidérée comme un ſphéroïde formé par la révolution d'un *polygone régulier d'une infinité de côtés* autour d'un de ſes diametres quelconque PR, lequel devient ſon axe. Or la ſurface de ce ſphéroïde, eſt égale au produit de l'axe entier de la ſphere, par la circonférence d'un grand cercle de la même ſphere (572) : donc la ſurface de la ſphere, qui n'eſt point diſtinguée de la ſurface de ce ſphéroïde d'une infinité de *côtés*, eſt auſſi le produit de l'axe de la ſphere par la circonférence d'un grand cercle de la ſphere; produit égal à celui qui donne la ſurface convexe du cylindre circonſcrit, ſans y comprendre les deux baſes. (*fig.* 85.)

Par exemple, ſi on ſuppoſe infiniment petites & infiniment

infiniment multipliées les tangentes IF, FD, DM, M$r$, $r$G, GS, qui sont les côtés du polygone circonscrit; elles se confondront avec la circonférence du cercle. Ainsi, pendant la révolution autour de l'axe PR, elles décriront une infinité de petits cônes tronqués, qui se confondront avec la surface de la sphere, & dont chacun sera égal en surface à la partie correspondante du cylindre circonscrit. C. Q. F. D.

## *Divers Corollaires.*

574. COROLLAIRE I. *La surface de la sphere, est quatre fois la surface d'un de ses grands cercles.* Car la surface de la sphere, est le produit de la circonférence d'un grand cercle par tout le diametre : au lieu que la surface d'un grand cercle est le produit de la même circonférence par le quart du diametre. Or le premier produit est quatre fois plus grand que le second (565) : donc la surface de la sphere est égale à la surface de quatre de ses grands cercles.

575. COROLLAIRE II. La surface convexe du cylindre circonscrit, est égale à la surface de la sphere, & par-là même à quatre grands cercles de la sphere ; auxquels si on ajoute les deux bases du cylindre, qui sont aussi deux grands cercles, on aura la surface totale du cylindre ; égale à six grands cercles de la sphere : donc *la surface totale du cylindre circonscrit, est à la surface de la sphere ; comme 6 est à 4, ou comme 3 est à 2.*

576. COROLLAIRE III. *La surface d'une calotte sphérique, est égale à une surface cylindrique de même hauteur que la calotte, & de même diametre que la sphere.* (fig. 84.)

EXPLICATION. I°. Une calotte sphérique $dx$BN peut

être considérée comme formée par la révolution d'une infinité de petites tangentes, qui ont décrit chacune un petit cône tronqué. Or on vient de démontrer que la surface de tous ces petits cônes, confondue avec celle de la sphere, est égale à la surface de la portion correspondante d'un cylindre circonscrit, dont la hauteur seroit BN : donc cette calotte a la même surface, que cette portion du cylindre circonscrit.

Ainsi, *pour avoir la surface d'une calotte sphérique*, il faut multiplier la circonférence d'un grand cercle de la sphere, par la hauteur NB de la calotte : le produit exprimera la surface cherchée.

Par la même raison, *pour avoir la surface d'une zone*, comme DF*xd*, terminée par deux cercles paralleles ; il faut multiplier la hauteur CN de cette *zone*, par la circonférence d'un grand cercle de la *sphere*.

### PROBLÊME.

577. *Trouver la surface d'une sphere dont on connoît le diametre.*

SOLUTION. Cherchez la circonférence d'un grand cercle de cette sphere, par le moyen du rapport approché d'Archimede (438) : ensuite multipliez la circonférence par le diametre : le produit sera la surface cherchée de la sphere. (573.)

## PARAGRAPHE TROISIEME.

### *RAPPORT DE CES SURFACES.*

578. DÉFINITION. On nomme *solides semblables*, ceux qui ont un même nombre de faces, semblables chacune à chacune : il faut par conséquent, que leurs

angles correspondans soient égaux ; & que leurs côtés homologues soient proportionnels.

Par exemple, deux cubes sont des solides semblables : deux spheres sont des solides semblables : deux cylindres droits, ou deux cylindres également inclinés, dont les hauteurs sont entre elles comme les bases, sont des solides semblables.

Mais un prisme & une pyramide, un prisme triangulaire & un prisme pentagonal, un prisme droit & un prisme oblique, ne sont pas des solides semblables. De même deux cylindres droits, dont les hauteurs ne sont point proportionnelles aux bases, ne sont pas des solides semblables.

## *PRODUISANS DE CES SURFACES.*

579. OBSERVATION. Nous avons démontré dans le paragraphe précédent :

I°. Que la surface latérale du prisme, droit ou oblique, est le produit du périmetre de sa base par sa hauteur : ainsi *ce périmetre & cette hauteur* sont les deux produisans de la surface du prisme. (561.)

II°. Que la surface latérale du cylindre, droit ou oblique, est le produit de la circonférence de sa base par sa hauteur : ainsi *cette circonférence & cette hauteur* sont les deux produisans de la surface du cylindre. (564.)

III°. Que la surface latérale d'une pyramide droite & réguliere, est le produit du périmetre de sa base par la moitié de son apothême : ainsi *ce périmetre & la moitié de l'apothême* sont les deux produisans de la surface latérale d'une pyramide droite & réguliere quelconque. (563.)

IV°. Que la surface latérale d'un cône droit quelconque, est le produit de la circonférence de sa base par la moitié de son apothême (568) : ainsi *la circon-*

*férence de la base & la moitié de l'apothême* sont les deux produisans de la surface du cône droit.

V°. Que la surface d'une sphere quelconque, est le produit de la circonférence d'un de ses grands cercles par son axe ou par son diametre quelconque : ainsi *la circonférence & le diametre* sont les deux produisans de la surface d'une sphere quelconque. (573.)

### THÉORÊME I.

580. *Dans deux solides quelconques, semblables ou dissemblables, les surfaces sont entre elles, comme les produits de leurs deux produisans respectifs.*

DÉMONSTRATION. Soient un prisme & un cône, dont on veuille comparer les surfaces. Nommons S, la surface du premier; *s*, la surface du second : nommons B & H les deux produisans de la premiere surface; *b* & *h* les deux produisans de la seconde surface.

Il est évident que la surface S du prisme, sera à la surface *s* du cône; comme BH, est à *bh* : puisque ces deux produits sont l'expression des deux surfaces, qu'ils représentent respectivement. C. Q. F. D.

### THÉORÊME II.

581. *Quand deux surfaces régulieres ont un produisant commun ou égal, elles sont entre elles comme l'autre produisant.*

DÉMONSTRATION. Soient les deux surfaces du théorême précédent, dans lesquelles on a cette proportion, $S . s :: BH . bh$. Si $B = b$, ou si $H = h$; il est évident qu'on aura $S . s :: B . b$; ou bien $S . s :: H . h$. (221.)

Par conséquent, deux surfaces qui ont même base, sont entre elles comme les produisans qui expriment leurs hauteurs; & deux surfaces, dont les produisans

qui expriment leurs hauteurs sont égaux, sont entre elles comme leurs bases.

Par exemple, soient un prisme & un cylindre, dont les surfaces aient une même hauteur; il est évident que leurs deux surfaces ont un *même nombre d'élémens*, & qu'elles ne different entre elles que par la *grandeur de ces élémens* (585), qui sont dans l'une & dans l'autre, comme les périmetres des bases.

De même soient deux cylindres, dont les bases soient égales, & les hauteurs inégales : il est évident que leurs deux surfaces ont des élémens égaux, & qu'elles ne different entre elles que par la quantité de ces élémens, qui est exprimée par la différence des hauteurs. C. Q. F. D.

582. REMARQUE. Dans un prisme & dans un cône droit, les produisans qui répondent à la hauteur des surfaces, sont toute la hauteur dans le prisme, & la moitié de l'apothême dans le cône droit. Ainsi, pour que les produisans relatifs à la hauteur soient égaux dans le prisme & dans le cône, il faut que la moitié de l'apothême du cône droit, égale toute la hauteur du prisme, ou toute la perpendiculaire menée d'un point de la base supérieure sur la base inférieure.

Alors, quoique les deux surfaces soient totalement dissemblables dans les deux solides, on pourra les comparer entre elles : parce que dans le développement, elles deviennent l'une un parallélogramme & l'autre un triangle, dont on connoît les hauteurs & les bases.

## THÉORÊME III.

583. *Si les deux produisans d'une surface sont proportionnels aux deux produisans homologues d'une autre surface; ces deux surfaces sont entre elles, comme les quarrés d'une de leurs dimensions homologues.*

DÉMONSTRATION. Quand les deux produisans d'une surface sont proportionnels aux deux produisans homologues d'une autre surface; les deux produits répondent à deux rectangles, dont les hauteurs sont proportionnelles aux bases. Or deux rectangles, dont les hauteurs sont proportionnelles aux bases, sont deux figures semblables (498), dont les surfaces sont entre elles comme les quarrés d'une de leurs dimensions quelconques. (499.) C. Q. F. D.

584. COROLLAIRE. *Les surfaces de deux spheres inégales sont entre elles, comme les quarrés respectifs ou de leurs circonférences ou de leurs diametres :* puisque leurs surfaces respectives, égalant celles de deux cylindres circonscrits, répondent à deux rectangles semblables, dont les hauteurs & les bases *sont proportionnelles.* (475.)

# ARTICLE SECOND.

## *SOLIDITÉ DES CORPS.*

585. DÉFINITION. I. COMME la *surface* est composée de lignes d'une largeur infiniment petite & par-tout égale (438); de même le *corps* ou le *solide* est composé de surfaces ou de *tranches d'une épaisseur infiniment petite & par-tout égale*. Par exemple, un cube est composé d'une infinité de tranches quarrées, égales & paralleles à la base : un cylindre, droit ou incliné, est composé d'une infinité de cercles égaux à la base, *posés* les uns sur les autres. Ces tranches ou ces surfaces d'une épaisseur infiniment petite & par-tout égale, sont ce qu'on nomme les *élémens des solides*. Le nombre & la grandeur de ces élémens déterminent la grandeur d'un solide, ou la quantité de sa solidité, ou le

résultat de sa triple dimension, abstraction faite de sa densité propre.

586. AXIOME. *Deux solides sont égaux en solidité, quand le premier a autant de tranches élémentaires que le second; & que chaque tranche élémentaire du premier, est égale à la tranche correspondante du second.*

Ainsi deux corps ou deux solides, qui ont des figures & des surfaces différentes, seront cependant égaux en grosseur ou en solidité; si le premier ayant la moitié moins d'élémens que le second, a des élémens dont la surface soit par-tout de moitié plus grande que la surface des élémens du second.

Quand on dit que deux corps ou deux solides sont égaux; on doit entendre que leur solidité est égale; ou que la somme des élémens du premier, égale en nombre ou en grandeur la somme des élémens du second: quelle que soit d'ailleurs & leur figure & leur surface.

587. DÉFINITION II. Comme les mesures des surfaces sont des toises quarrées, des pieds quarrés, des pouces quarrés (446); de même les *mesures des solides* sont des toises cubes, des pieds cubes, des pouces cubes, des lieues cubes, & ainsi du reste. Une *toise cube* ou cubique est un cube compris sous six faces, dont chacune est une toise quarrée. Un *pied cube* est un cube compris sous six faces, dont chacune est un pied quarré. On voit par-là, ce qu'il faut entendre par un pouce cubique, par une ligne cubique, par une lieue cubique. La toise cubique renferme six fois 36 cubes d'un pied de diametre chacun. (*fig.* 4.)

Nous allons considérer dans les solides, leur *égalité*, leur *mesure*, leur *rapport*: delà les trois paragraphes suivans.

## PARAGRAPHE PREMIER.

### *Égalité des Solides.*

On mesure assez facilement la solidité d'un prisme ; comme on le verra dans le paragraphe suivant. Mais on ne peut mesurer la solidité d'une pyramide, d'un cylindre, d'un cône, d'une sphere, que dans un prisme : il faut donc trouver l'égalité de ces différens corps avec un prisme, pour pouvoir évaluer leur solidité.

### *Prisme et Cylindre.*

588. Théorême. *Un prisme & un cylindre, de même base & de même hauteur, sont égaux en solidité.*

Démonstration. Il est évident que ces deux solides ont un *même nombre d'élémens ;* puisqu'ils ont une même hauteur : & que tous les élémens de l'un sont *égaux* à tous les élémens de l'autre ; *puisque dans* le prisme & le cylindre, tous les élémens *sont* égaux aux bases, que l'on suppose égales : donc le prisme & le cylindre, de même base & de même hauteur, sont égaux en solidité. C. Q. F. D.

589. Remarque. On démontrera de la même maniere & par le même raisonnement, dont la vérité se fait également sentir à l'esprit & à l'imagination :

I°. Que *deux prismes de même base & de même hauteur, dont l'un est droit & l'autre oblique, dont l'un est triangulaire & l'autre pentagonal, par exemple, sont égaux en solidité :* puisqu'ils ont le même nombre d'élémens, & que tous ces élémens sont égaux dans l'un & dans l'autre ; par la supposition.

II°. *Que deux cylindres de même base & de même hau-*

*teur, dont l'un seroit droit & l'autre incliné, sont aussi égaux en solidité:* par la même raison.

III°. Que *deux pyramides droites, régulieres & semblables, de même base & de même hauteur, sont égales en solidité:* puisqu'ayant une même hauteur, elles ont évidemment un même nombre d'élémens; & qu'il est clair que les élémens correspondans décroissent également dans l'une & dans l'autre pyramide, depuis la base jusqu'au sommet.

IV°. Que *deux cônes droits, de même base & de même hauteur, sont aussi égaux entre eux en solidité:* par la même raison.

## PRISMES ET PYRAMIDES.

590. LEMME. *Si on coupe une pyramide quelconque, droite ou oblique, réguliere ou irréguliere, par un plan parallele à la base; la section sera un plan semblable à la base; & ce plan sera à la base, comme le quarré de sa hauteur, est au quarré de la hauteur de la base.* (fig. 89.)

DÉMONSTRATION. Soit une pyramide quadrangulaire ABCDO: soit aussi la section *abcd*, parallele à la base ABCD. On concevra aisément que la théorie que nous allons établir auroit également lieu, si la pyramyde étoit triangulaire ou pentagonale ou dodécagonale; & ainsi du reste.

I°. Les deux plans *abcd* & ABCD sont *semblables*. Car ces plans étant paralleles entre eux, par la supposition; il est évident que la ligne droite OA forme les mêmes angles sur l'un & sur l'autre plan; que la face AOB de la pyramide, forme aussi les mêmes angles sur l'un & sur l'autre plan. On peut dire la même chose des autres lignes & des autres faces de la pyramide, relativement aux deux plans paralleles qu'elles coupent. Par conséquent, tous les angles des

deux plans paralleles sont respectivement égaux, & les deux plans sont semblables.

II°. Ces deux plans étant paralleles, il est évident qu'ils coupent proportionnellement dans chaque face quelconque AOB de la pyramide, les deux côtés OA & OB qui terminent cette face triangulaire (400) : ce qui donne cette proportion (403, 405); *ab* . AB :: *a*O . AO.

III°. Ces plans étant semblables, ils sont entre eux en surface, comme les *quarrés de leurs côtés homologues* (499). Ainsi le petit plan est au grand plan, comme le quarré du côté *ab* est au quarré du côté AB; ou plus simplement, . . . $p \, . \, P :: \overline{ab}^2 :: \overline{AB}^2$.

Et comme nous venons de voir que *ab* . AB :: *a* O. AO; le petit plan sera aussi au grand plan, *comme* le quarré de *a* O est au quarré de AO : *puisque quand* deux raisons sont égales, on peut substituer l'une à l'autre. Ainsi on aura, . . . $p \, . \, P :: \overline{aO}^2 \, . \, \overline{AO}^2$.

IV°. Ces plans sont enfin entre eux, comme les *quarrés de leurs hauteurs*, en prenant ces hauteurs du sommet O de la pyramide. Pour le démontrer; de ce sommet de la pyramide, menons sur les deux plans prolongés, s'il le faut, une perpendiculaire ON. Cette perpendiculaire formera sur les deux plans paralleles, deux angles égaux O*na* & ONA : ce qui donne encore deux triangles semblables O*na* & ONA. On aura donc encore cette proportion; *n*O . NO :: *a*O . AO.

Par conséquent, les deux plans étant entre eux comme les quarrés de la seconde raison, ainsi que nous l'avons déjà démontré; ils sont aussi comme les quarrés de la premiere raison qui lui est égale : on aura donc encore cette proportion : $p \, . \, P :: \overline{nO}^2 \, . \, \overline{NO}^2$.

Or cette derniere raison exprime les quarrés des hauteurs des deux plans paralleles *abcd* & ABCD :

donc ces deux plans sont entre eux comme les quarrés de leurs hauteurs, ou de leurs distances du sommet O de la pyramide.

On conçoit que la même démonstration peut s'appliquer à toute pyramide, droite ou oblique, réguliere ou irréguliere, d'un nombre quelconque de faces triangulaires : donc dans toute pyramide, que l'on concevra coupée par un plan parallele à la base (*fig.* 87 & 88), la section *b* ou *m* sera un plan semblable à la base; & ce plan sera à la base, comme le quarré de sa hauteur est au quarré de la hauteur de la base. C. Q. F. D.

## THÉORÊME I.

591. *Deux pyramides, droites ou inclinées, semblables ou dissemblables, qui ont leurs bases & leurs hauteurs égales, sont égales en solidité.* (fig. 88 & 89.)

DÉMONSTRATION. Soient la pyramide pentagonale RM & la pyramide quadrangulaire ON, que je suppose *de même hauteur & d'egale base :* en telle sorte que la base de chacune soit égale à dix toises quarrées de surface, par exemple.

Il est clair que ces deux pyramides différentes sont égales en solidité; si elles ont autant d'élémens l'une que l'autre, & si leurs élémens correspondans sont par-tout égaux dans l'une & dans l'autre, depuis la base jusqu'au sommet (586). Or,

I°. Il est évident que ces deux pyramides ont un *même nombre d'élémens :* puisqu'ayant une même hauteur, selon la supposition, elles sont comprises entre deux plans paralleles dont l'un passeroit par les bases & l'autre par les sommets des deux pyramides; & que ces deux plans paralleles, renfermant par-tout un même espace, ne peuvent contenir entre eux qu'une même quantité de couches élémentaires d'une égale épaisseur infiniment petite. Il reste donc à faire voir

que tous les élémens correſpondans dans l'une & dans l'autre pyramide, depuis les baſes égales juſqu'aux ſommets également éloignés des baſes, ſont égaux entre eux ; quelle que ſoit la figure & la poſition de chaque pyramide.

II°. On conçoit déjà confuſément que ces élémens, égaux dans les baſes, doivent décroître proportionnellement juſqu'aux ſommets. Mais cette connoiſſance confuſe exige un développement qui lui donne l'évidence & la certitude géométrique. Pour cela, coupons l'une & l'autre pyramide en *n* & en *m* par des plans paralleles aux baſes & qui ſoient à égale diſtance des ſommets O & R : nous aurons deux plans *n* & *m*, paralleles & ſemblables aux baſes reſpectives, & dont les hauteurs $nO$ & $mR$ ſeront égales. Ainſi $nO = mR$ ; & $\overline{nO}^2 = \overline{mR}^2$.

Or par le lemme précédent, dans la pyramide quadrangulaire, le plan *n* eſt à la baſe N :: $\overline{nO}^2 . \overline{NO}^2$ ; & dans la pyramide pentagonale, . . . .
le plan *m*, eſt à la . . . baſe M :: $\overline{mR}^2 . \overline{MR}^2$.

Sur quoi il faut remarquer que dans ces deux proportions, les deux dernieres raiſons ſont égales : puiſque les hauteurs des deux pyramides étant égales, & les ſections étant faites à égale diſtance des ſommets ; il eſt clair que $\overline{nO}^2 = \overline{mR}^2$ ; & que $\overline{NO}^2 = \overline{MR}^2$.

Ainſi dans ces deux proportions, les deux premieres raiſons étant égales chacune à une même raiſon, elles ſont auſſi égales entre elles (166), & donnent cette proportion : la baſe quadrangulaire N, eſt à ſon plan parallele & ſemblable *n* ; comme la baſe pentagonale M, eſt à ſon plan parallele & ſemblable *m* ; ou plus ſimplement N . *n* :: M . *m*.

Or par la ſuppoſition, la baſe N eſt égale à la baſe M : donc le plan *n* ſera auſſi égal au plan correſpon-

dant *m*. Ce que nous avons démontré des deux plans correſpondans en *n* & en *m*, on peut le démontrer de tous les plans correſpondans. Ainſi les deux pyramides ſont égales en ſolidité; & parce qu'elles ont le même nombre d'élémens; & parce que tous leurs élémens correſpondans ſont égaux. C. Q. F. D.

592. COROLLAIRE. *Ce que nous venons d'établir, dans le lemme & dans le théorême touchant les pyramides, doit s'entendre auſſi des cônes, droits ou inclinés*: puiſque les cônes ſont des pyramides dont les baſes ont une infinité de côtés. Ainſi, ſi deux cônes de même baſe & de même hauteur ſont l'un droit & l'autre incliné; *ces deux cônes ſont égaux en ſolidité*: parce qu'ils ont un même nombre d'élémens; & que tous leurs élémens correſpondans ſont égaux, étant tous entre eux comme les quarrés égaux de leurs hauteurs correſpondantes.

## THÉORÊME II.

593. *Tout priſme triangulaire peut ſe diviſer en trois pyramides égales.* (fig. 87.)

DÉMONSTRATION. Soit le priſme triangulaire ABCDEFA. Je coupe les trois parallélogrammes montans, chacun en deux parties égales (436) par les diagonales AF, FC, EC; & je fais paſſer un plan par les deux diagonales AF, FC; & un autre plan par les deux diagonales FC, EC: ce qui me donne trois pyramides, ACBF, ECDF, ECAF. Or,

I°. Les deux premieres pyramides ont les baſes ABC, DEF, égales; de même que les hauteurs BF, DC, qui ſont les hauteurs du priſme: donc elles ſont égales.

II°. Si on conçoit que la ſeconde pyramide ECDF ait pour baſe le triangle ECD, & que la baſe de la troiſieme pyramide ECAF ſoit le triangle ECA; on

trouvera que ces deux pyramides sont aussi égales ; puisque leurs bases ECA, ECD, sont égales ; & qu'elles ont leurs sommets au même point F, ce qui leur donne une même hauteur. (591.)

Pour se rendre sensible cette démonstration, aussi bien que celle du théorême suivant, il faudra exécuter en cire ou en terre grasse, les deux figures solides sur lesquelles on démontre.

III°. La premiere & la troisieme pyramide sont égales chacune en solidité à la seconde : donc les trois pyramides sont égales entre elles en solidité. Or ces trois pyramides ne sont autre chose que le prisme divisé : donc ce prisme, & tout prisme triangulaire, peut se diviser en trois pyramides égales en solidité. C. Q. F. D.

594. COROLLAIRE I. *Tout prisme triangulaire est triple d'une pyramide de même base & de même hauteur ; toute pyramide triangulaire, qui a la même base & la même hauteur que le prisme, est précisément le tiers de ce prisme en solidité :* puisque ce prisme contient précisément trois pyramides égales, dont l'une a la même base & la même hauteur que le prisme.

595. COROLLAIRE II. *Tout cube est triple d'une pyramide de même base & de même hauteur.* (fig. 74.)

DÉMONSTRATION. Si l'on fait passer un plan AG par les côtés opposés GB & AD du cube ; il est évident qu'on divisera ce cube en deux prismes triangulaires égaux entre eux, dont chacun contiendra trois pyramides égales, dont l'une aura la même base & la même hauteur que le prisme triangulaire.

Or ces trois pyramides égales de chaque prisme triangulaire, ou de chaque moitié du cube divisé, ne sont que la moitié des pyramydes qui seroient formées sur le cube, dont la base est double de celle du prisme triangulaire : donc les six pyramides égales

des deux prismes triangulaires, équivalent précisément à trois pyramides formées sur la base du cube. C. Q. F. D.

### THÉORÊME III.

596. *Toute pyramide, de quelque nombre de côtés que soit sa base, est le tiers d'un prisme de même base & de même hauteur.* (fig. 88.)

DÉMONSTRATION. Soit la pyramide pentagonale renversée ABCDEAR. Les lignes RB & RC sont derriere la pyramide.

I°. Du point M, où son axe RM atteint le milieu ou le centre de la base, je mene les lignes droites MA, MB, MC, MD, ME, à tous les angles de la base: ce qui divise la base en autant de triangles, qu'elle a de côtés.

II°. Par la pensée ou en réalité, je coupe la pyramide par des plans qui passent par le sommet R & par les droites AMB, BMC, CMD, DME, EMA; & la pyramide pentagonale se trouve divisée en cinq pyramides triangulaires, égales ou inégales entre elles, qui ont chacune pour base, l'un des triangles de la base, & dont l'une est la pyramide triangulaire REAME.

III°. Par la pensée ou en réalité, je construis sur les cinq triangles de la base, des prismes triangulaires, tels que R*x*PAEMEAR, de même base AEMA que chaque triangle, & de même hauteur RM que la pyramide pentagonale. Or chacun de ces prismes triangulaires, par exemple R*x*PAEMA, est triple de la pyramide RAMER à laquelle il correspond (594): donc le prisme total, formé sur tous les triangles de la base, est triple de la pyramide totale; & par conséquent la pyramide est le tiers d'un tel prisme.

IV°. On démontrera la même chose & de la même

maniere, à l'égard d'une pyramide dont la base est un exagone, ou un décagone, ou un dodécagone, ou un chyliogone, ou un polygone quelconque, régulier ou irrégulier, d'un nombre fini ou d'un nombre infini de côtés; soit que la pyramide soit droite, soit qu'elle se trouve inclinée: donc toute pyramide est le tiers d'un prisme de même base & de même hauteur que cette pyramide. C. Q. F. D.

597. COROLLAIRE I. *La somme de plusieurs prismes de même hauteur, est égale en solidité à un seul prisme, dont la base est égale à la somme de tous ces prismes pris ensemble, & dont la hauteur est égale à celle d'un de ces mêmes prismes.*

DÉMONSTRATION. I°. Soit le prisme droit ABCD-FEA (*fig.* 87): la solidité de ce prisme est *le produit* de sa base ABCA, par sa hauteur FB. Divisez ce prisme par des plans perpendiculaires à la base, en vingt ou trente petits prismes, égaux ou inégaux: la somme de ces vingt ou trente prismes, ayant même base & même hauteur que le prisme total, aura précisément la solidité du prisme total; & sera *le produit* de la base ABCA de tous ces prismes, par la hauteur FB d'un de ces prismes.

II°. Il est évident qu'un prisme total, droit ou incliné (*fig.* 88), qui auroit pour base ABCDEA, & pour hauteur MR, seroit égal aux cinq prismes que nous avons formés sur la même base & sur la même hauteur (596. III°.); & que si cette base étoit divisée en mille ou en cent mille triangles, sur lesquels on formât des prismes de même hauteur, tous ces prismes partiels seroient précisément égaux au prisme total: puisqu'ils ne seroient autre chose que le prisme total, divisé en parties égales ou inégales, unies ou séparées. C. Q. F. D.

598. COROLLAIRE II. *La somme de plusieurs pyramides*

*mides de même hauteur, est égale à une seule pyramide dont la base est égale à celle de toutes ces pyramides, & dont la hauteur est égale à celle d'une de ces pyramides :* puisque cettte pyramide totale ABCDEAR (*fig.* 88), est égale en solidité aux cinq pyramides que nous venons d'y observer, & dont chacune est le tiers du prisme qui lui correspondroit; soit que ces prismes se trouvent réunis, soit qu'ils se trouvent séparés. C. Q. F. D.

599. COROLLAIRE III. *Tout cône, droit ou incliné, est le tiers d'un cylindre de même base & de même hauteur :* puisqu'un cône est une pyramide d'une infinité de côtés, comme un cylindre est un prisme d'une infinité de côtés; & qu'une pyramide quelconque est le tiers d'un prisme quelconque de même base & de même hauteur. (596.) C. Q. F. D.

600. COROLLAIRE IV. *La solidité d'une sphere est égale à celle d'une pyramide ou d'un cône, qui a pour hauteur le rayon de la sphere, & une base égale à la surface de la sphere.* (fig. 114.)

DÉMONSTRATION. On peut concevoir la sphere comme composée d'une infinité de cônes ou de pyramides C*m*, C*n*, C*o*, C*p*, qui ont leur sommet au centre de la sphere, & dont chacune a pour base une partie infiniment petite de la surface de la sphere.

Or la somme de tous ces cônes ou de toutes ces pyramides, est égale en solidité à une seule pyramide ou à un seul cône, qui auroit une hauteur égale à celle de toutes ces pyramides, savoir, le rayon de la sphere; & dont la base seroit égale à la somme de toutes les bases de ces pyramides, c'est-à-dire, égale à la surface de la sphere (598) : donc une sphere est égale en solidité à une pyramide ou à un cône qui a pour hauteur le rayon, & pour base la superficie de la sphere. C. Q. F. D.

## PARAGRAPHE SECOND.

### *MESURE DES SOLIDES.*

### THÉORÊME FONDAMENTAL.

601. *La solidité d'un prisme quelconque, droit ou incliné, est égale au produit de sa base par sa hauteur.* (fig. 93.)

DÉMONSTRATION. I°. Soit un prisme dont la base BCDB=AFGEA, ait douze toises quarrées; & la hauteur AB, cinq toises en longueur. Je dis que la solidité de ce prisme est de 60 toises cubiques.

Pour le démontrer, il faut concevoir *que le prisme* est partagé en autant de tranches paralleles à la base, qu'il y a de toises dans la hauteur, dont chacune ait une toise de hauteur. Cela étant, il est évident que les cinq tranches BA ayant la même base que le prisme; chacune contient autant de toises cubiques, que la base contient de toises quarrées, c'est-à-dire, douze. Par conséquent les cinq tranches prises ensemble contiennent cinq fois douze ou soixante toises cubiques: donc la solidité d'un prisme est égale au produit de sa base par sa hauteur.

II°. Si la base BCDB étoit de 1000 toises quarrées, & la hauteur AB de 10 toises; on auroit 10 tranches, de 1000 toises cubiques chacune; & la solidité seroit encore le produit de la base 1000 par la hauteur 10, c'est-à-dire, 10000 toises cubiques.

III°. Il est évident que la même démonstration a lieu, quelle que soit & la base & la hauteur, quelle que soit & la nature & la position du prisme. Si le prisme, dont on cherche la solidité, est un parallélopipede rectangle, tel que celui que nous venons d'ob-

ferver; la théorie que nous venons d'établir se fait sentir à la fois & à l'esprit & à l'imagination & à l'œil. Si le même parallélopipede devenoit obliqu'angle, en inclinant son axe à sa base; la même théorie subsiste; puisqu'un prisme droit & un prisme incliné, s'ils ont même base & même hauteur, sont égaux en solidité. (589.)

Si la base du prisme dont on cherche la solidité, au lieu d'être un rectangle, est un triangle ou un polygone d'un nombre quelconque de côtés égaux ou inégaux; on évaluera cette base en toises quarrées; & en la multipliant par la hauteur, on aura également la solidité du prisme quelconque : puisque ce prisme quelconque est égal en solidité à un parallélopipede rectangle, qui auroit une base & une hauteur égales à celles de ce prisme. (589.) C. Q. F. D.

## *DIVERS COROLLAIRES.*

602. COROLLAIRE I. *La solidité d'un prisme quelconque est le produit de ses trois dimensions:* savoir, de la hauteur AB = 5; de la largeur BC = 4; de la profondeur CD = 3. D'abord $5 \times 4 = 20$ : $20 \times 3 = 60$. De même, $5 \times 3 = 15$ : $15 \times 4 = 60$. Enfin $3 \times 4 = 12$ : $12 \times 5 = 60$ : & ainsi du reste. (*fig.* 93.)

603. COROLLAIRE II. *La solidité des cylindres est aussi le produit de leur base par leur hauteur:* puisque les cylindres, droits ou inclinés, sont égaux en solidité, à des prismes de même base & de même hauteur; & que la solidité des prismes est le produit de leur base par leur hauteur. (*fig.* 93.)

604. COROLLAIRE III. *La solidité des pyramides & des cônes est le produit de leur base par le tiers de leur hauteur:* puisque les pyramides & les cônes, droits ou inclinés, sont le tiers des prismes & des cylindres de même base & de même hauteur (599); & que les

prismes & ces cylindres sont le produit de leur base par toute leur hauteur. Donc la solidité des pyramides & des cônes, trois fois plus petite, doit être le produit de la base par le tiers de la hauteur. (221. II°.)

605. COROLLAIRE IV. *La solidité d'une sphere est le produit de sa surface par le tiers de son rayon :* puisqu'une sphere est égale en solidité à une pyramide ou à un cône, qui auroit pour hauteur le rayon; & pour base, la surface de la sphere (600). Or une telle pyramide ou un tel cône n'est que le tiers d'un prisme de même base & de même hauteur, dont la solidité seroit le produit de la base par le rayon entier. (*fig.* 114.)

Par exemple, si on divise la surface de la sphere C*a* N*b* M*a*, en une infinité de petits triangles *ou de* quadrilateres *mnop*, qui occupent toute *la surface de* cette sphere; on aura une infinité de petites pyramides triangulaires ou quadrangulaires C*m*, C*n*, C*o*, C*p*, qui renfermeront toute la surface & toute la solidité de la sphere, & dont chacune sera en solidité, le produit de sa base par le tiers de sa hauteur qui est le rayon de la sphere.

606. REMARQUE. Ce que nous venons de dire & de démontrer sur la mesure des solides, peut servir à faire trouver la solidité de tous les corps : parce que les corps, dont les figures seroient les plus irrégulieres, peuvent être tous réduits en pyramides; comme les figures planes peuvent être toutes réduites en triangles.

## *DIVERS PROBLÊMES.*

607. PROBLÊME I. *Trouver la solidité d'un cylindre, dont on connoît la hauteur avec le diametre de la base.* (fig. 80.)

SOLUTION. Trouvez la circonférence de la base

ABA du cylindre, par le rapport d'Archimede ou de Metius (480); & multipliez cette circonférence par le quart du diametre donné ou par la moitié du rayon XA: le produit sera la surface de la base du cylindre (481). Multipliez cette surface par la hauteur AC du cylindre: le produit sera la solidité du cylindre. (603.)

Si ce solide, au lieu d'être un cylindre, étoit *un cône*, droit ou incliné, on auroit sa solidité, en multipliant la base par le tiers de la hauteur. (599.)

On voit par-là comment on peut *trouver la solidité d'un prisme ou d'une pyramide*, dont la base est toujours ou un triangle, ou un quadrilatere, ou un polygone régulier ou irrégulier: il faut évaluer la surface de cette base, & la multiplier ou par la hauteur, ou par le tiers de la hauteur; & le produit donnera la solidité ou du prisme ou de la pyramide.

608. PROBLÊME II. *Trouver la solidité d'une sphere, dont on connoît le diametre.* (fig. 84.)

SOLUTION. Trouvez, par le rapport d'Archimede ou de Metius, la circonférence d'un grand cercle de cette sphere (480); & multipliez cette circonférence par le diametre donné: le produit sera la surface de la sphere. (573.)

Après quoi, multipliez cette surface de la sphere par le sixieme du diametre donné, ou par le tiers du rayon: le produit sera la solidité de la sphere. (605.)

609. PROBLÊME III. *Trouver la solidité d'un cône à base sphérique, dont la hauteur soit le rayon de la base.* (fig. 110.)

SOLUTION. Dans une sphere ADBFA, qu'un rayon CM, formant un angle quelconque MCD sur l'axe DF, fasse une révolution autour de cet axe: ce rayon

CM décrira un cercle MRM, qui embrassera un cône MCRDM à base sphérique MRDM.

I°. Il est évident que la solidité de ce cône est une portion de la sphere, portion correspondante à la partie de la surface sphérique qu'embrasse ce cône à base sphérique. Ainsi si la base sphérique DMRM est le tiers ou le quart de la surface de la sphere; la solidité du cône en question, sera aussi le tiers ou le quart de la sphere : puisque si l'on conçoit que cette portion de la sphere soit divisée en une infinité de petites pyramides droites, posées sur leur base développée, qui sera la base DMRM; la somme de toutes ces pyramides sera égale à une seule pyramide de même base & de même hauteur (598); & que la solidité de cette pyramide seroit le produit de sa *base* par le tiers de sa hauteur qui est ici le *rayon de la sphere*. (604.)

II°. Pour trouver cette solidité, évaluez donc la surface sphérique DMRM, qui sera le produit d'un grand cercle de la sphere, par la hauteur DS (576); & multipliez cette surface par le tiers du rayon de la sphere : le produit sera la solidité du cône à base sphérique dont il est ici question.

610. PROBLÊME IV. *Trouver la solidité d'un segment sphérique, dont on connoît l'arc & le rayon.* (fig. 110.)

SOLUTION. I°. Il est évident que la solidité du segment sphérique quelconque DMSRM, est la solidité du cône à base sphérique dont nous venons de parler, *moins le cône à base plane* MCRSM. Retranchez donc du cône à base sphérique, le cône à base plane MCRSM, qu'il sera facile d'évaluer (607) : le reste sera la solidité du segment sphérique.

611. PROBLÊME V. *Mesurer la capacité d'un vase*

*circulaire, par exemple, d'un tonneau.* (fig. 90.)

SOLUTION. I°. Comme un tonneau forme un ventre vers le milieu, & que de ce milieu il va toujours en diminuant vers ses deux extrêmités; on a coutume de le considérer comme un cylindre *mnrv*, dont la base *mvm* = KHK est un cercle moyen proportionnel arithmétique, entre le cercle ABA qui forme le fond, & le cercle CDC qui forme le ventre du tonneau.

Car on peut supposer le diametre, & par-là même le rayon & la circonférence du cercle KHK, d'autant plus petits à l'égard du grand cercle CDC; qu'ils sont plus grands à l'égard du petit cercle ABA.

II°. C'est pourquoi, mesurez la surface d'un des fonds ABA du tonneau, & la surface du plus grand cercle CDC du même tonneau (484); & prenez la somme de ces deux surfaces, dont la moitié sera la surface du cercle moyen KHK. La moitié de cette somme, multipliée par la longueur FE du tonneau, donnera à peu près la capacité du tonneau. Car le produit donnera un cylindre *mnrv*, qui répondra à très-peu près à la capacité du tonneau : puisqu'il aura pour hauteur, la longueur EF du tonneau; & pour base, un cercle moyen proportionnel arithmétique entre le plus petit & le plus grand cercle du tonneau. Ce que le cylindre *mnrv* se trouve avoir de moins que le tonneau en CK*x*, il l'a de plus en AK*m*.

C'est sur ces principes qu'est fondée la théorie & la pratique du *jaugeage*, dont nous ne prétendons donner ici qu'une idée, mais dont il sera facile de faire une infinité d'applications.

## *TOISÉ DES SOLIDES.*

612. OBSERVATION. Nous avons averti d'abord, que la solidité des corps s'estime par des *mesures cubes* (587) : nous avons démontré ensuite qu'on

trouve cette solidité dans les prismes, dans les cylindres, dans les pyramides, dans les cônes, & dans tous les corps qu'on peut toujours réduire en pyramides ou en cônes, en multipliant une base par une hauteur.

I°. On peut dire ici des solides, ce que nous avons dit ailleurs des surfaces (460): Quand un solide, dont il faut évaluer la solidité, ne contient dans sa base & dans sa hauteur, que des grandeurs homogenes, par exemple, des toises sans pieds, ou des pieds sans pouces & sans lignes; on l'évalue aisément, en prenant le produit de la base par la dimension qui répond à la hauteur.

II°. Mais il est fort rare que les deux dimensions d'un solide soient en tout homogenes. Par *exemple*, dans un parallélopipede rectangle, la base *sera de 24* toises quarrées, 2 pieds quarrés, 8 pouces quarrés, à multiplier par 12 toises, trois pieds & 9 pouces: & alors cette évaluation devient plus compliquée & plus difficile.

La solidité d'un solide est toujours *le produit de* trois dimensions; d'une *longueur* & d'une *largeur*, d'où résulte la base; & d'une *hauteur*, qui multiplie cette base.

Quand un solide contient dans ses dimensions, des grandeurs hétérogenes, par exemple, des toises & des pieds & des pouces & des lignes; on peut en trouver la solidité, en réduisant ses trois dimensions à la plus petite espece. Dans ce cas, d'abord on multiplie deux dimensions indifféremment l'une par l'autre, pour avoir un produit: ensuite on multiplie ce produit par la troisieme dimension, pour avoir un second produit: Enfin on divise ce second produit par le cube du nombre qui exprime combien de fois la plus grande espece contient la petite espece, en laquelle ont été réduites les trois dimensions; par exemple, combien de fois

la toise contient le pouce, si les trois dimensions ont été réduites en pouces : le quotient exprime la valeur du solide en toises.

Mais comme la méthode de réduire les dimensions à la plus petite espece, est très-embarrassante pour le calcul ; en voici une autre qu'on lui a substituée : elle est fondée sur une maniere de diviser la toise cubique ; qui ne differe point de la toise courante.

613. EXPLICATION. Soit la toise cubique BF, que nous allons diviser en portions de toises cubiques. (*fig.* 4.)

I°. Je divise la hauteur AB de cette toise cubique ; en six parties égales ; & par les points de division je fais passer des plans paralleles à la base : ce qui divise la toise cubique en six parallélopipedes égaux, nommés *pieds de toise cubique ;* à cause qu'ils ont chacun un pied de hauteur & une toise quarrée de base.

II°. Je divise de même la hauteur *mn* de chaque pied de toise cubique, en douze parties égales ; & par les points de division je fais passer des plans paralleles à la base : par-là chaque pied de toise cubique se trouve divisé en douze parallélopipedes égaux, nommés *pouces de toise cubique ;* parce qu'ils ont chacun un pouce de hauteur & une toise quarrée de base.

III°. Enfin je divise de même chaque pouce de toise cubique en douze parallélopipedes égaux, qui seront des *lignes de toise cubique.*

La toise cubique contient 6 pieds de toise cubique ; 72 pouces de toise cubique, 864 lignes de toise cubique ; de sorte que la ligne de toise cubique est la huit-cent-soixante-quatrieme partie d'une toise cubique.

Sur cette théorie, dont l'évidence se fait sentir par elle-même, est fondée la méthode que nous allons employer dans la solution des deux problêmes suivans.

Pour mieux sentir cette théorie, il faut faire atten-

tion que si le solide BFG (*fig.* 93), est supposé divisé en toises cubiques; un pied de hauteur, ajouté aux cinq toises BA, donneroit sur la surface AFGE, un rectangle de quatre toises de longueur & de trois toises de largeur sur un pied de hauteur; ou un pied de toise cubique, répandu sur douze toises cubiques, qui donneroit deux toises cubiques d'augmentation au solide BFG.

614. PROBLÊME I. *Trouver le contenu ou la solidité d'un solide, qui a 20 toises de longueur, 6 toises & 3 pieds de largeur, sur 10 toises & 6 pouces de hauteur.*

SOLUTION. Comme la longueur & la largeur d'un solide, forment sa base, qu'on suppose toujours être un rectangle ou égale à un rectangle; cherchez d'abord la surface de cette base, par la méthode que nous avons donnée ailleurs (462). Vous trouverez que cette base contient 130 toises quarrées.

I°. Pour trouver le produit de cette base par la hauteur; multipliez d'abord les toises par les toises: vous aurez pour produit 1300 toises cubiques, que vous écrirez sous les toises.

| Toises. | Pieds. | Pouces. |
|---|---|---|
| 130. | 0. | 0 |
| × 10. | 0. | 6. |
| 1300. | . | . |
| 21. | 4 | . |
| 10. | 5 | . |
| 1310. | 5. | . |
| *Toises cubes.* | *Pieds de toise cubes.* | |

II°. Pour avoir une aliquote intermédiaire entre les toises & les pouces du multiplicateur; supposez que le multiplicateur, au lieu de 0 pieds, ait 1 pied. Après quoi multipliez les toises du multiplicande, par 1 pied du multiplicateur, en disant: si on multiplioit 130 toises par 1 toise, le produit seroit 130 toises. Mais on ne multiplie que par le sixieme d'une toise: le produit ne sera donc que le sixieme de

130, c'est-à-dire, 21 toises cubiques & 4 sixiemes de toise cubique, qui valent 4 pieds de toise cubique. Ecrivez ce produit, en l'effaçant par un trait; pour vous rappeller qu'il ne doit pas être mis en ligne de compte dans la somme.

III°. Passez aux 6 pouces du multiplicateur, & dites : si on multiplioit 130 toises par un pied, on auroit pour produit 21 toises cubiques, plus 4 pieds de toise cubique; mais on multiplie par 6 pouces, qui ne sont que la moitié d'un pied : on aura donc pour le produit de 6 pouces, un produit de moitié plus petit. Prenez donc la moitié de ce que vous a donné la multiplication par 1 pied; & vous aurez, pour la moitié de 21 toises cubes & 4 pieds, 10 toises cubes & 5 pieds de toise cube.

IV°. Prenez la somme de toutes ces quantités : elle exprimera la solidité ou le contenu du solide en question; savoir, 1310 toises cubes, plus 5 pieds de toise cube, qui font cinq-sixiemes de toise cube, ou 30 pieds cubes.

615. PROBLÊME II. *Trouver la solidité ou le contenu d'un solide, qui a 12 toises 3 pieds 4 pouces de longueur, & 6 toises 2 pieds 6 pouces de largeur, sur 13 toises 4 pieds de hauteur.*

SOLUTION. I°. Je cherche la surface de la base, ou le produit de la longueur par la largeur (463). Pour cela, je multiplie 12 toises par 6 toises : le produit est 72. Je multiplie 12 toises par 2 pieds, qui sont le tiers d'une toise : le produit est 4 toises. Je multiplie 12 toises par 6 pouces, qui sont le quart de 2 pieds : le produit est 1 toise.

Je multiplie ensuite 6 toises 2 pieds 6 pouces, par 3 pieds qui sont la moitié de la toise. Le produit de 6 toises par 3 pieds, ou $\frac{6}{1} \times \frac{1}{2}$ est 3 toises : le produit de 2 pieds ou d'un tiers de toise par une demi-toise, ou $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$ est un sixieme de toise ou 1 pied : le

produit de 6 pouces ou d'un demi-pied par un demi-pied, ou $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ pied, est un quart de pied ou 3 pouces.

Je multiplie encore 6 toises 2 pieds 6 pouces, par 4 pouces qui sont le neuvieme de trois pieds : le produit sera le neuvieme de ce que m'ont produit trois pieds. Je prends donc le neuvieme de 3 toises 1 pied 3 pouces, en *disant : en 3* toises combien de fois 9 toises ? Point. En 19 pieds, combien de fois 9 pieds ? 2 fois. En 15 pouces, combien de fois 9 pouces ? 1 fois, avec un reste 6 pouces qui font 72 lignes, dont le neuvieme est 8 lignes. Ainsi la base de ce solide sera de 80 toises quarrées, plus 3 pieds 4 pouces & 8 lignes de toise quarrée.

*Base de ce solide.*

| Toises. | Pieds. | Pouces. | Lignes. |
|---|---|---|---|
| 12. | 3. | 4. | . |
| × 6. | 2. | 6. | . |
| 72 | . | . | . |
| 4 | . | . | . |
| 1 | . | . | . |
| 3 | 1. | 3. | . |
| . | 2 | 1 | 8. |
| 80. | 3. | 4. | 8. |

II°. Je multiplie cette base par la hauteur 13 toises 4 pieds, selon la méthode du problême précédent. Ainsi je multiplie d'abord les toises par les toises ; & j'ai les produits 240 & 80, écrits comme on voit ici. Je multiplie ensuite les toises du multiplicande, par les 4 pieds du multiplicateur, en disant : si *je* multipliois 80 toises par 1 toise, le produit *seroit* 80 toises : mais je multiplie simplement par 4 *pieds* qui sont les deux tiers de la toise : le produit *ne sera* donc que les deux tiers de 80. Je prends le tiers de 80, & je l'écris deux fois : ce tiers est 26 toises cubes & 4 pieds de toise cube.

Après cela, je multiplie les toises & les pieds du

multiplicateur, d'abord par les 3 pieds, ensuite par les 4 pouces, enfin par les 8 lignes du multiplicande. En multipliant 13 toises 4 pieds, par 3 pieds qui font la moitié d'une toise; j'ai pour produit 6 toises cubes, & 5 pieds de toise cube ou cinq sixiemes de toise cube. Car $\frac{13}{1} \times \frac{1}{2} = 6 + \frac{1}{2}$, ou à 6 toises 3 pieds: ensuite $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{6}$, ou à 2 pieds: total, 2 toises + 5 pieds.

*Solidité de ce Solide.*

| Toises. | Pieds. | Pouces. | Lignes. |
|---|---|---|---|
| 80. | 3. | 4. | 8. |
| × 13. | 4. | . | . |
| 240 | . | . | . |
| 80 | . | . | . |
| 26 | 4 | . | . |
| 26 | 4 | . | . |
| 6 | 5 | . | . |
| . | 4 | 6 | $6 + \frac{1}{2}$. |
| . | . | 9 | $1 + \frac{1}{12}$ |
| 1101 | 0 | 3 | $7 + \frac{7}{12}$ |
| *Toises cubes.* | *Pieds,* | *pouces,* | *lignes de toise cube.* |

En multipliant ensuite 13 toises 4 pieds, par 4 pouces qui sont le neuvieme de trois pieds; j'ai le neuvieme du dernier produit, ou 4 pieds 6 pouces 6 lignes & environ une demi-ligne de toise cube. Car le neuvieme de 41 pieds est 4 pieds, avec un reste 5 qui vaut 60 pouces. Le neuvieme de 60 pouces est 6 pouces, avec un reste 6 qui vaut 60 lignes. Le neuvieme de 60 lignes est 6 lignes, avec un reste 6 qui vaut 60 points. Le neuvieme de 60 points est 6 points ou une demi-ligne, avec un reste 6 qu'on néglige.

En multipliant enfin 13 toises 4 pieds, par 8 lignes qui sont le sixieme de 4 pouces; j'ai le sixieme du dernier produit, ou 9 pouces une ligne & un douzieme de ligne de toise cubique.

Enfin je prends la somme de tous ces produits; & j'ai pour produit total 1101 toises cubes, plus 3 pouces & environ sept lignes & demi de toise cube:

c'est le contenu ou la solidité qu'il falloit trouver.

Quand on n'a pas besoin d'une bien rigoureuse précision, on se contente de faire la multiplication sur les toises & les pieds & les pouces du multiplicande & du multiplicateur; & on se contente d'un à-peu-près pour les lignes.

## PARAGRAPHE TROISIEME.

### *Rapport des Solides.*

616. OBSERVATION. IL résulte de tout ce que nous venons de dire & de démontrer sur la mesure des solides, que *la solidité de tout corps est le produit d'une surface par une hauteur.* Cette surface & cette hauteur sont les deux *produisans* de ce solide. Or comme une surface est déjà le produit de deux dimensions; il s'ensuit que toute solidité est un produit de trois dimensions. Ces trois dimensions sont une *longueur*, une *largeur*, une *profondeur* ou hauteur.

I°. Dans un *prisme quadrangulaire*, la longueur est un des côtés de la base : la largeur est une perpendiculaire menée entre le côté pris pour base & le côté opposé : la hauteur ou profondeur est une perpendiculaire menée entre la base supérieure & la base inférieure, prolongée s'il le faut.

II°. Dans un *prisme triangulaire*, la longueur est un des côtés quelconque de la base : la largeur est la moitié d'une perpendiculaire menée du sommet de l'angle opposé au côté pris pour longueur : la hauteur est une perpendiculaire menée de la base supérieure sur la base inférieure.

III°. Dans un *prisme dont la base est un polygone régulier d'un nombre quelconque de côtés*, la longueur est le périmetre de la base : la largeur est la moitié d'une

perpendiculaire menée du centre de la base sur un côté : la hauteur est une perpendiculaire menée de la base supérieure sur l'inférieure.

IV°. Dans une *pyramide dont la base est un polygone régulier* d'un nombre quelconque de côtés ; la longueur & la largeur sont les mêmes que dans le prisme précédent. Mais en faisant le produit qui doit donner la solidité, il ne faut multiplier la base que par le tiers de la hauteur de la pyramide : parce que la solidité d'une telle pyramide n'est que le tiers d'un prisme de même base & de même hauteur. Ainsi son produisant en hauteur sera, non toute la hauteur, mais simplement le tiers de la hauteur de la pyramyde.

### THÉORÊME I.

617. *Deux prismes, ou un cylindre & un prisme, droits ou inclinés, qui ont des bases égales & des hauteurs inégales, sont entre eux en solidité, comme leurs hauteurs :* puisqu'ils ne different que selon cette dimension ; & que cette dimension inégale dans l'un & dans l'autre, exprime quelle quantité de tranches égales l'un a plus que l'autre. C. Q. F. D.

618. COROLLAIRE. *Deux cônes, ou deux pyramides, droits ou obliques, qui ont des bases égales & des hauteurs inégales, sont aussi entre eux comme leurs hauteurs :* puisqu'ils sont le tiers de prismes qui sont entre eux comme leurs hauteurs (596) ; & que les tiers sont entre eux comme les touts. C. Q. F. D.

### THÉORÊME II.

619. *Deux prismes ou deux cylindres, ou un prisme & un cylindre, droits ou obliques, qui ont des hauteurs égales & des bases inégales : sont entre eux comme leurs bases :* puisqu'ils ne different en solidité que selon

leurs bases; & que la différence de ces bases répond à la différence de leur solidité. Si la base du premier est un pied quarré, & la base du second trois pieds quarrés; ces deux prismes ou cylindres sont évidemment entre eux en solidité comme 1 est à 3 : puisqu'il est clair que dans le dernier prisme, il y a trois prismes égaux au premier. De même & pour la même raison, si la base du premier est comme 10, & la base du second comme 245 & un tiers; ces deux prismes sont entre eux en solidité, comme 10 est à 245 & un tiers. C. Q. F. D.

620. COROLLAIRE. *Deux cônes ou deux pyramides, droits ou inclinés, qui ont des hauteurs égales & des bases inégales, sont entre eux en solidité comme leurs bases :* puisqu'ils sont le tiers de prismes qui *sont* entre eux comme leurs bases; & que *les tiers sont* entre eux comme les touts (163). C. Q. F. D.

### THÉORÈME III.

621. *Quand deux solides sont semblables, leurs solidités sont entre elles comme les cubes d'une dimension homologue quelconque, prise dans chacun de ces solides.*

DÉMONSTRATION. I°. Les solidités de deux solides semblables (578), sont entre elles en raison triplée, ou comme les cubes d'une dimenssion homologue quelconque prise dans chacun des solides. Car dans les solides semblables, toutes les dimensions homologues sont proportionnelles : donc les solidités de ces solides, sont des produits de trois quantités proportionnelles : donc elles sont en raison tripiée d'une de ces quantités, & par conséquent d'une des dimensions quelconque prise dans chacun de ces solides. (219.)

Ainsi deux prismes semblables, ou deux cylindres semblables, ou deux pyramides semblables, ou deux cônes semblables, sont entre eux en raison triplée

d'une

d'une de leurs dimensions homologues quelconque ; ou comme les cubes d'une de ces dimensions homologues : savoir, ou comme les cubes de leur largeur, ou comme les cubes de leur hauteur, ou comme les cubes de leur profondeur.

II°. On peut appliquer aux solides semblables, la même théorie que nous avons établie ailleurs pour les surfaces semblables (499). Ainsi, soient deux solides quelconques semblables. J'appelle les trois dimensions du plus petit *a*, *b*, *c* : j'appelle les trois dimensions du plus grand, *an*, *bn*, *cn*. J'ai à démontrer que le premier solide est au second, comme le cube d'une dimension quelconque *a* du premier, est au cube de la dimension homologue *an* du second ; & je le démontre ainsi. Les trois produisans de ces deux solides semblables sont d'un côté *abc*, & de l'autre *abcnnn* : le rappport ou la raison du premier solide au second, est donc la raison de *abc*, à *abcnnn*.

Mais à la place de cette raison je puis en mettre une autre qui lui soit égale, savoir, la raison de *aaa*, à *aaannn*. Je dis donc que cette derniere raison est égale à la précédente. Car si je forme cette proportion *abc*. *abcnnn* :: *aaa*. *aaannn* ; le produit des extrêmes *aaannnabc*, est égal au produit des moyens *aaannnabc*. On peut appliquer la même démonstration aux deux autres dimensions. C. Q. F. D.

622. COROLLAIRE. *Deux spheres sont entre elles en solidité, comme les cubes ou de leurs rayons ou de leurs diametres ou de leurs circonférences ou de leurs arcs semblables* : de même *deux cubes sont entre eux en solidité, comme les cubes de leurs dimensions*.

DÉMONSTRATION. I°. Deux spheres inégales sont toujours nécessairement des *solides semblables*, dont les trois produisans, la circonférence, le diametre, & le tiers du rayon (605), sont des grandeurs propor-

tionnelles (474) : donc deux ſpheres inégales ſont entre elles comme les cubes d'un de ces trois produiſans, ou comme les cubes d'un de ces trois produiſans multiplié ou diviſé par un même nombre quelconque. (220.)

Par conſéquent, ſi une ſphere quelconque *s* a un diametre = 1 ; & une autre ſphere S, un diametre = 10; la ſolidité de la prémiere ſera 1, & la ſolidité de la ſeconde ſera 1000.

II°. De même, deux cubes inégaux ſont toujours néceſſairement des *ſolides ſemblables :* donc ils ſont entre eux comme les cubes ou de leur hauteur ou de leur largeur ou de leur profondeur.

Etant donné un cube dont le diametre d'une grandeur quelconque ſoit = 1 ; il eſt facile de *trouver un* cube huit fois plus grand en ſolidité : *ce ſera celui* dont le diametre ſera double ou = 2. Mais étant donné un cube dont le diametre eſt = 1 ; il n'eſt pas facile de faire un *cube double* en ſolidité : parce qu'un cube comme 1 & un cube comme 2 en ſolidité, ont des produiſans qui doivent être entre eux comme les racines cubiques de 1 & de 2 ; racines dont on peut approcher à l'infini par le moyen du calcul (151), mais qu'on ne peut atteindre avec préciſion ni par le calcul, ni par la géométrie élémentaire.

REMARQUE. Les anciens géometres, après avoir réſolu le problême de la duplication du quarré, ſe propoſerent le problême de la duplication du cube ; problême qui ne dut ſa grande célébrité qu'au mérite de la difficulté.

Pour réſoudre géométriquement le problême de la *duplication du quarré ;* on cherche une moyenne proportionnelle géométrique *m*, entre le diametre *a* du cercle donné & un diametre double 2*a :* ce qui donne la proportion continue $\div a . m . 2a$; d'où l'on déduit $aa : mm :: a . 2a$. (521.)

Pour réſoudre géométriquement le problême de la

*duplication du cube*; il faudroit trouver deux moyennes proportionnelles géométriques $k$ & $m$, entre $a$ & $2a$; en telle sorte qu'on eût cette proportion géométrique continue $\div a . k . m . 2a$: ce qui donneroit $aaa . kkk . m . 2a$; & le cube $aaa$ dont $a$ seroit le diametre, seroit la moitié du cube $kkk$ dont $k$ seroit le diametre (254). Mais ces deux moyennes proportionnelles géométriques, qu'on trouve aisément par la théorie de la parabole combinée avec le cercle, on ne peut les trouver par la seule géométrie élémentaire.

Au reste, la géométrie élémentaire est suffisante pour résoudre avec toute la précision qu'on peut attendre dans la pratique, le *problême de la duplication du cube*; & les deux moyennes proportionnelles géométriques qu'on trouve par les sections coniques, en donnant plus de satisfaction à l'esprit, ne lui donnent pas plus de justesse & de précision dans l'opération. Étant donné un cube qui ait 100000 lignes cubes de matiere solide, par exemple; un cube double en aura 200000: pour avoir ce cube double, extrayez la racine cubique de 100000, & la racine cubique de 200000. Lès cubes que vous ferez sur ces deux racines, seront entre eux, à infiniment peu près, comme 1 est 2: la différence ne sera pas d'un dixieme de ligne cube; & en prenant les deux moyennes proportionnelles géométriques, vous ne pourriez vous flatter ou vous assurer d'atteindre à plus de précision dans la réalité.

On pourra de la même maniere, trouver à infiniment peu près, une sphere double d'une autre sphere; un cylindre double d'un autre cylindre; & ainsi du reste.

## THÉORÊME IV.

623. *Un cylindre droit est égal en solidité au produit de sa surface convexe par la moitié de son rayon.*

DÉMONSTRATION. Pour comparer la solidité du cylindre avec celle d'une sphere ; nous allons considérer le cylindre, comme développé en couches rectilignes sur sa surface convexe. (*fig.* 68.)

I°. Nous avons démontré que la surface d'un cercle est égale à celle d'un triangle rectangle, qui a pour base une ligne égale à la circonférence du cercle ; & pour hauteur, le rayon du même cercle (481) : donc, en supposant que A D A soit la base d'un cylindre, si on développe toutes les couches concentriques ADA, *ada*, C, qui enveloppent l'axe C du cylindre ; on aura un *demi-prisme quadrangulaire*, qui aura CA pour hauteur, & AB pour un des côtés de sa base.

II°. Or un tel demi-prisme est égal en solidité au produit du rectangle qui forme sa base, par *la moitié* de sa hauteur AC : puisqu'un tel solide *n'est que la* moitié d'un autre solide qui auroit la même base, & qui auroit par-tout une hauteur égale à la hauteur AC, laquelle va en diminuant toujours proportionnellement de C en B, dans toute l'étendue du rectangle qui forme la base. C. Q. F. D.

## THÉORÊME V.

624. *La solidité de la sphere est les deux tiers du cylindre circonscrit.* (*fig.* 86.)

DÉMONSTRATION. I°. La surface de la sphere & la surface convexe du cylindre circonscrit, sont égales (573) : donc si on développe la sphere & le cylindre sur leur surface convexe, ces deux solides auront des bases égales.

II°. La sphere & le cylindre circonscrit étant développés sur leur surface convexe ; la solidité de la sphere est le produit de la base, par le tiers du rayon (605) : la solidité du cylindre circonscrit est le produit de la même base, par la moitié du rayon ; selon le

théorême précédent. La sphere & le cylindre seront donc entre eux en solidité, comme leurs produisans inégaux (221); savoir, comme le tiers du rayon est à la moitié du rayon.

Or si on double ces deux termes, le même rapport subsistera; & on aura les deux tiers du rayon d'une part, & de l'autre le rayon entier: donc la solidité de la sphere est à la solidité du cylindre circonscrit, comme les deux tiers du rayon sont au rayon entier: donc la sphere est les deux tiers du cylindre circonscrit. C. Q. F. D.

625. COROLLAIRE. On a démontré ailleurs (575), que la surface de la sphere est à la surface totale du cylindre circonscrit, comme 2 est à 3: on vient de démontrer que la solidité de la sphere est aussi à la solidité du cylindre circonscrit, comme 2 est à 3: donc *la surface de la sphere est à la surface entiere du cylindre circonscrit, comme la solidité de la sphere est à la solidité du cylindre.*

La découverte de ces rapports de la sphere au cylindre circonscrit, a immortalisé Archimede; comme la découverte de l'égalité entre le quarré de l'hypothénuse & les deux quarrés des côtés, a immortalisé Pythagore. (517.)

Archimede fut si charmé de cette découverte, qu'il voulut qu'on gravât sur sa tombe, un cylindre circonscrit à une sphere. Quelles armoiries, en comparaison de celles qu'on se donna dans les siecles de la Chevalerie!

## THÉORÊME VI.

626. *La solidité de la sphere, est plus grande que la solidité de tout autre solide de même surface que la sphere.*

DÉMONSTRATION. I°. Nous avons fait voir ailleurs;

que de toutes les figures isopérimetres, le cercle est celle qui renferme le plus de surface (510) : donc un solide, produit par la révolution perpendiculaire d'une ligne droite autour de la circonférence d'un cercle, renfermera aussi plus de solidité que si elle faisoit une semblable révolution autour d'une autre figure isopérimetre quelconque : puisqu'elle renfermera une même somme de couches élémentaires toutes plus grandes en surface.

Par exemple, *un quarré* d'un pied de largeur, ayant quatre pieds de périmetre, ne renferme qu'un pied quarré de surface : au lieu qu'*un cercle* de quatre pieds de périmetre ou de circonférence, renferme beaucoup plus d'un pied quarré de surface. (484.)

II°. La solidité de la sphere est les deux *tiers du cylindre* circonscrit (624) : donc la solidité de la sphere sera plus grande que celle d'un prisme, d'une pyramide, d'un cône, de même surface que le cylindre circonscrit.

Par exemple (en supposant ici de part & d'autre le rapport du diametre à la circonférence, en nombres ronds, comme 1 est à 3); soit *un cylindre* d'un pied de diametre & d'un pied de hauteur : il aura, en y comprenant les deux bases, quatre pieds quarrés & demi de surface. Supposons ce cylindre développé sur sa surface convexe de trois pieds quarrés (623) : on trouvera que sa solidité, produit de la base par le quart du diametre, n'est que les trois quarts d'un pied cube : $\frac{3}{1} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Soit ensuite *une sphere* de quatre *pieds* & demi de surface : son diametre aura plus d'un *pied* & quart de longueur ; & en la supposant développée sur cette surface & convertie en cône (605), on trouvera que sa solidité, produit de la base par le tiers du rayon, est déjà les trois quarts d'un pied cube, en ne supposant le diametre que d'un pied : car $\frac{4}{1} + \frac{1}{2}$, ou $\frac{9}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$.

III°. Soient une sphere & un sphéroïde régulier

d'un nombre fini de côtés; & que ces deux solides soient égaux en surface. Par la pensée, coupons avec un plan trachant, ces deux solides; en telle sorte que la section passe par l'axe & par les poles de l'un & de l'autre. Il est clair que cette section sera un cercle dans la *sphere*, un polygone régulier dans le *sphéraïde*; & que si ces deux sections font une révolution sur leur axe, elles décriront l'une la sphere & l'autre le sphéroïde. Il est clair que le cercle & le polygone sont isopérimetres : puisqu'ils sont des parties semblables de deux surfaces égales; & qu'on peut faire sur la sphere & sur le sphéroïde, un même nombre indéfini de pareilles sections, dont la somme embrassera toute leur surface.

Il est clair ensuite que la sphere & le sphéroïde auront chacun une solidité proportionnelle à la grandeur ou à la capacité du plan qui les produit; & que parmi ces deux solides, le plus grand en solidité, sera celui dont le plan générateur contiendra plus de surface, ou renfermera une plus grande somme d'élémens.

Or le cercle a plus de surface & renferme une plus grande somme d'élémens, que le pentagone, que l'exagone, que tout autre polygone de même périmetre & d'un nombre fini de côtés : donc la sphere formée par la révolution du cercle, aura plus de solidité, que tout autre solide formé par la révolution d'un pentagone, d'un exagone, ou de toute autre figure d'un nombre fini de côtés, dont le périmetre sera égal au périmetre du cercle.

IV°. On peut dire la même chose de tout autre solide dont on voudra comparer la solidité à celle de la sphere. Par exemple, si un cercle & une ellipse font une révolution autour de leur axe; le cercle décrira *une sphere*; l'ellipse décrira *un solide ellipsoïdal*, renflé d'un côté & applati de l'autre. Supposons égaux en surface ces deux solides; & par la pensée, prenant

dans le solide ellipsoïdal un diametre égal au diametre de la sphere, divisons sur ces deux diametres la sphere & le solide ellipsoïdal en un même nombre de tranches ou de plans qui renfermeront leur surface & leur solidité divisée en ses élémens. Chaque plan élémentaire de la sphere, sera un cercle : chaque plan élémentaire du solide ellipsoïdal, sera un plan alongé d'un côté & applati de l'autre : ces plans seront isopérimetres ; puisque leurs périmetres seront des parties semblables des deux surfaces égales. Cela posé,

Je dis que la sphere aura plus de solidité que le sphéroïde ellipsoïdal : puisque chaque plan élémentaire de la sphere est un cercle, qui est plus grand & qui contient plus de surface & par-là même plus de matiere que toute autre figure isopérimetre *non-circulaire*. Or les plans élémentaires du *sphéroïde ellipsoïdal*, ne sont pas des cercles : donc ils ont chacun moins de surface, donc ils contiennent chacun moins de solidité, que les plans correspondans, circulaires & isopérimetres, de la sphere.

D'ailleurs ces plans élémentaires du *sphéroïde ellipsoïdal*, seront inclinés à leur diametre ; au *lieu* que les plans élémentaires de la sphere, seront perpendiculaires à leur diametre : chaque plan de la sphere aura donc dans son épaisseur infiniment petite, une hauteur réellement plus grande, que chaque plan correspondant du solide ellipsoïdal. La sphere aura donc encore pour cette raison, plus de solidité que le solide ellipsoïdal.

De tout cela il résulte que la sphere a plus de solidité, que tout autre solide quelconque de même *surface*. C. Q. F. D.

Conclusion. Après avoir observé l'étendue dans ses trois dimensions, il nous reste à montrer comment on peut soumettre à la rigueur du calcul, ces dimensions de l'étendue : tel est l'objet du traité suivant.

# PRINCIPES
## *DU CALCUL*
## ET DE LA GÉOMÉTRIE,
OU
## *ÉLÉMENS DE MATHÉMATIQUES.*
# GÉOMÉTRIE.

## QUATRIEME TRAITÉ.
### *LA TRIGONOMÉTRIE.*

627. DÉFINITION. LA *Trigonométrie* est l'art de résoudre les triangles par le calcul arithmétique; ou l'art d'appliquer le calcul arithmétique à la géométrie, dont toutes les figures se mesurent par les triangles auxquels on les réduit. (*fig.* 45.)

I°. Soit un grand triangle ABC, dont on connoisse la base AB & les deux angles A & B, qui feront connoître le troisieme angle C. Nous avons donné ailleurs (417) la méthode de résoudre le grand triangle, par son rapport avec le petit triangle semblable *abc*. Cette méthode s'appelle la *trigonométrie par les triangles semblables.*

II°. Il eſt évident que ſi dans le même triangle ABC, l'angle C connu avoit un rapport géométrique avec le côté oppoſé AB connu, & l'angle A connu, un rapport géométrique avec le côté oppoſé CB inconnu; il ſeroit facile de connoître le côté inconnu CB, en faiſant cette regle de trois: l'angle C connu eſt au côté AB connu, comme l'angle A connu eſt au côté CB inconnu.

III°. Mais ce rapport géométrique que les angles n'ont pas avec les côtés oppoſés, comme nous le démontrerons ailleurs; les ſinus des angles l'ont avec les côtés oppoſés à ces angles. On peut donc en place des angles, mettre leurs ſinus; & par ce moyen la fauſſe regle de trois précédente ſe convertira en celle-ci, qui ſera vraie: *le ſinus connu de l'angle* C, *eſt au côté oppoſé* AB *connu; comme le ſinus connu de l'angle* A, *eſt au côté oppoſé* CB *inconnu.* Il s'agit donc de connoître *les ſinus* de tous les angles, & par ce moyen l'on réſoudra le grand triangle ABC immédiatement en lui-même, & ſans le ſecours du petit triangle ſemblable *abc*. Cette méthode de réſoudre les triangles immédiatement en eux-mêmes, s'appelle *la trigonométrie par les ſinus;* & c'eſt celle que nous allons expoſer.

628. REMARQUE. I°. La premiere méthode peut ſuffire pour réſoudre avec aſſez de préciſion dans la pratique, des triangles dont les côtés ne ſont pas bien grands, & dont aucun angle n'eſt très-petit: parce qu'alors l'on peut faire un petit triangle aſſez exactement ſemblable au triangle donné.

Mais quand on a à réſoudre un triangle, dont la baſe par exemple, ſera un rayon de la terre, & dont les côtés ſeront des lignes menées des extrêmités de ce rayon au centre de Saturne ou du ſoleil; alors la premiere méthode eſt inſuffiſante: parce qu'il n'eſt pas poſſible de faire un petit triangle, qui ſoit aſſez exactement ſemblable au grand triangle donné. Il faut donc

néceſſairement dans ce cas, employer la ſeconde méthode. Et en général, pour réſoudre même les triangles de moindre grandeur, on emploie celle-ci, & on ne ſe ſert de la premiere qu'au défaut de tables des ſinus.

629. REMARQUE. II°. Il eſt évident que le calcul arithmétique, tombant ſur trois grandeurs connues & proportionnelles d'un triangle, doit donner la quatrieme inconnue, avec la plus grande préciſion. C'eſt un avantage qu'on ne peut jamais s'aſſurer d'atteindre parfaitement, quand on opere par la méthode des triangles ſemblables. (430.)

630. REMARQUE. III°. Les tangentes & les ſécantes des angles, ont auſſi un rapport géométrique avec les côtés oppoſés à ces angles : on peut donc les employer auſſi bien que les ſinus. Mais pour ſimplifier davantage ce traité, & pour applanir de plus en plus la route des mathématiques, nous ne réſoudrons les triangles que par les *ſinus*; ſans employer les tangentes & les ſécantes, dont nous donnerons cependant une théorie aſſez développée.

631. REMARQUE IV. La trigonométrie ſe diviſe en *trigonométrie rectiligne* & en *trigonométrie ſphérique*. La premiere a pour objet les triangles dont les trois côtés ſont des lignes droites : la ſeconde a pour objet des triangles dont les côtés ſont des arcs de cercle. Nous traiterons d'abord & principalement de la premiere; enſuite & plus ſuccintement de la ſeconde.

## ARTICLE PREMIER.

### *TRIGONOMÉTRIE RECTILIGNE.*

632. OBSERVATION. DANS la plupart des ouvrages de mathématique, la trigonométrie rectiligne eſt très-

compliquée : nous avons tâché de la simplifier & de la rendre plus facile à saisir. Pour y réussir, nous avons écarté tout ce qui nous a paru inutile; & nous avons présenté avec la plus grande lumiere possible, ce qu'elle a d'essentiel & d'utile. Nous y traitons d'abord des cordes, qui font connoître les sinus; ensuite du rapport des sinus avec les côtés, pour trouver les côtés inconnus par le moyen des sinus connus; enfin du rapport des sinus avec les tangentes & avec les sécantes, pour trouver les tangentes & les sécantes inconnues, par le moyen des sinus connus.

## PARAGRAPHE PREMIER.

### *Les Cordes et les Sinus.*

633. DÉFINITION I. UNE *corde* est une ligne droite, tirée dans un cercle, d'une extrêmité d'un arc à l'autre extrêmité du même arc. (*fig.* 94.)

Par exemple, la droite GHK est une corde; *c'est la corde* de l'arc GAK. De même la droite EFI *est* la corde de l'arc EAI. Nous ferons voir bientôt que la moitié d'une corde est le sinus de la moitié de l'arc qu'elle soutient.

634. DÉFINITION II. On appelle *sinus droit* d'un angle GCA, ou d'un arc GA qui mesure cet angle, une ligne droite GH, tirée de l'extrêmité G de l'arc perpendiculairement sur le rayon ou sur le diametre ACB qui passe par l'autre extrêmité A du même arc. (*fig.* 94.)

De même la ligne EF est le sinus droit de l'angle ECA, & de l'arc EA. De même encore la ligne DC est le sinus droit de l'angle DCA, & de l'arc DA. De même enfin, la ligne GL est le sinus droit de l'angle GCD, & de l'arc GD.

635. DÉFINITION III. On nomme *sinus verse* d'un

angle GCA, ou d'un arc GA, la partie du rayon comprise entre le sinus droit & la circonférence. Ainsi la ligne HA est le sinus verse de l'angle GCA, & de l'arc GA. De même la ligne FA est le sinus verse de l'angle ECA, & de l'arc EA. De même encore, la ligne *n* A est le sinus verse de l'arc *n* A.

Quand on parle de *sinus simplement*, sans désigner expressément le sinus verse, il faut entendre le sinus droit; & c'est de ce sinus qu'il sera question dans toute la suite de ce traité, & dans la table des sinus qui terminera cet ouvrage. Nous ferons voir ailleurs, comment on trouve le sinus verse d'un arc donné. (*638*. & *662*.)

## *DIVERS COROLLAIRES.*

*636*. COROLLAIRE I. *L'angle obtus a le même sinus, que l'angle aigu qui est son supplément.* (fig. 94.)

DÉMONSTRATION. Soit l'angle obtus GCB, dont l'angle GCA est le supplément (338). Il est clair que ces deux angles ont le même sinus GH : puisque du point G qui divise ces deux angles, on ne peut mener qu'une seule perpendiculaire GH sur le diametre qui passe par l'autre extrêmité de leur arc; & que selon la définition du sinus, cette perpendiculaire GH est le sinus. C. Q. F. D.

*637*. COROLLAIRE II. *La partie du rayon, comprise entre le centre du cercle & le sinus d'un angle aigu, est égale au sinus du complément de cet angle.* (fig. 94.)

DÉMONSTRATION. Soit l'angle GCA, dont le sinus est GH, & dont le complément est l'angle GCD. (337.)

Il est clair que la partie HC du rayon, est égale à GL qui est le sinus de l'angle de complément : puisque ces deux lignes HC & GL sont deux perpendicu-

laires entre deux paralleles DC & GH, lesquelles sont l'une & l'autre perpendiculaires au rayon CA qui forme l'angle droit DCA.

Il est clair encore que si l'angle GCA devient plus grand ou plus petit ; les lignes GL & HC, toujours perpendiculaires entre deux paralleles, deviendront plus petites ou plus grandes, en restant toujours égales entre elles. C. Q. F. D.

638. COROLLAIRE III. *Le sinus verse d'un angle aigu, est le rayon moins le sinus droit de l'angle de complément.* (fig. 94.)

DÉMONSTRATION. La raison en est évidente : puisque le sinus verse d'un angle aigu quelconque GCA, est HA ; & que HA est égal au rayon CA moins HC = GL. Par conséquent, en connoissant le *sinus droit* de l'angle de complément GCD, on connoît *le* sinus verse d'un angle GCA & de l'arc GA de cet angle. C. Q. F. D.

639. COROLLAIRE IV. *Le sinus droit d'un angle ou d'un arc, est la moitié de la corde qui soutient un arc double.* (fig. 94.)

DÉMONSTRATION. Le sinus quelconque GH prolongé jusqu'à la circonférence en K, devient la corde GHK. Or cette corde, & l'arc soutenu par cette corde, sont coupés en deux parties égales, par le diametre & par le rayon BCA perpendiculaires à cette corde (407). Donc la moitié GH de cette corde, est égale au sinus de l'arc GA, qui est la moitié de l'arc GAK. On peut dire la même chose de la ligne EF, qui est le sinus de l'angle ECA, & qui prolongée jusqu'à la circonférence en I, deviendroit la corde EFI d'un arc double EAI.

Par conséquent, si on connoissoit les cordes de tous les arcs d'une circonférence, on connoîtroit le sinus de

tous ces arcs : pour avoir le *ſinus d'un arc*, il ne s'agiroit que de prendre la *moitié de la corde* d'un arc double ou deux fois plus grand. C. Q. F. D.

640. REMARQUE. I°. Si un *angle au centre* GCA, deſcendant le long du rayon de C en B, devenoit un *angle inſcrit*, ayant ſon ſommet appuyé ſur la circonférence ; les côtés de cet angle embraſſeroient un arc deux fois plus grand que l'arc GA (366). *Le ſinus de cet angle devenu angle inſcrit, ſans changer de nature, ſeroit donc la moitié de la corde qui ſoutient l'arc entier qu'il embraſſe :* puiſque le ſinus d'un angle & d'un arc eſt la moitié de la corde qui ſoutient un arc double ; & que l'angle inſcrit, reſtant toujours le même, embraſſe un arc double de celui qu'il embraſſeroit étant au centre. Ainſi la théorie des ſinus des angles au centre, convient auſſi aux ſinus des angles inſcrits.

II°. Quand un triangle eſt inſcrit dans un cercle, on ne voit pas tout de ſuite, pourquoi la moitié de la corde oppoſée à un angle quelconque, eſt le ſinus de cet angle. (*Fig.* 95.)

Pour le concevoir, placez par la penſée l'angle A au centre du cercle en *a*; en telle ſorte que ſon côté AB paſſe toujours par le point B. Alors le côté AC paſſera en *a*D; & l'angle A, placé en *a*, aura pour meſure la moitié de l'arc BDC, ou tout l'arc BD. Or puiſque le rayon *a*D diviſe l'arc BDC en deux parties égales; il diviſe auſſi la corde BC en deux parties égales; & diviſant cette corde en deux parties égales, il eſt perpendiculaire à cette corde (407). Par conſéquent cette corde BC eſt auſſi perpendiculaire au rayon *a*D; & la moitié B*d* de cette corde, eſt le ſinus de l'angle *a* égal à l'angle A.

III°. On peut appliquer la même théorie aux deux autres angles du triangle inſcrit ABC; & on démontrera de même, que chacun de ces angles a pour ſinus la moitié du côté oppoſé. Ainſi le ſinus de l'angle B

est la moitié de la corde ou du côté AC; & le sinus de l'angle C est la moitié de la corde ou du côté AB.

641. COROLLAIRE V. *Le sinus d'un arc moindre que le quart de la circonférence, devient d'autant plus grand, que l'arc augmente davantage.* (fig. 94.)

DÉMONSTRATION. Il est évident que GH, sinus de l'arc GA, est plus petit que EF; & que EF, sinus de l'arc EA, est plus petit que DC, qui est le sinus de l'angle droit DCA & de l'arc de 90 degrés ou du quart de la circonférence. C. Q. F. D.

642. COROLLAIRE VI. *Le sinus d'un arc plus grand que le quart de la circonférence, devient d'autant plus petit, que l'arc augmente davantage.* (fig. 94.)

DÉMONSTRATION. Il est évident que *DC*, *sinus* de l'arc BD, est plus grand que EF: que *EF*, sinus de l'arc BE, est plus grand que GH: que GH, sinus de l'arc BDG, est plus grand que *nm* & que tous les sinus des angles obtus plus grands que BCG.

643. COROLLAIRE VII. *Le plus grand de tous les sinus, est le rayon.* (fig. 94.)

DÉMONSTRATION. La chose est évidente: puisque, selon les deux derniers corollaires, le rayon est le sinus de l'angle droit; & que le sinus de tous les autres angles, aigus ou obtus, sont plus petits que le rayon. C'est pour cela que le rayon est appellé *sinus total*.

644. COROLLAIRE VIII. *Quoique les sinus des angles aigus augmentent, à mesure que ces angles deviennent plus grands, jusqu'à l'angle droit; ces sinus n'augmentent pas cependant dans la même proportion que les angles.* (fig. 97.)

DÉMONSTRATION. Quoique l'arc AEB soit double de l'arc ADE; cependant la corde ADB n'est pas double

de

de la corde AE : puisque la corde ADB n'est pas aussi grande que les deux cordes égales AE & BE prises ensemble. Or les sinus sont moitiés des cordes (639) ; donc *les sinus ne sont pas proportionnels à leurs arcs ou à leurs angles*. C. Q. F. D.

645. Corollaire IX. *Le sinus total est égal au rayon entier ; les sinus partiels sont égaux à des parties du rayon.* On peut donc comparer entre eux les sinus : puisqu'un tout peut toujours être comparé à ses parties ; & réciproquement.

646. Remarque I. Le rayon d'un cercle quelconque, est le *sinus total* dont il est ici question. On suppose ce rayon divisé en 100000 parties, ou en 10000000 de parties ; & alors les *autres sinus* sont des parties du sinus total.

I°. On n'a donné au sinus total un si grand nombre de parties, que pour pouvoir négliger sans erreur sensible, les fractions de l'unité qui restent après les divisions. Par exemple, si j'ai un cercle dont le rayon soit de 100000 toises ; le sinus total étant supposé de 100000 parties, chaque partie du sinus total ou du rayon sera une toise. Et après le calcul, s'il reste une fraction, on pourra la négliger ; parce que sa valeur ne sera qu'une partie d'une toise, laquelle n'est rien sur 100000 toises. A plus forte raison cette fraction pourra-t-elle être négligée, si on suppose le rayon ou le sinus total, égal à 10000000 de parties ou a un plus grand nombre encore. Nous le supposerons divisé en 10000000 de parties, dans la table des sinus qui termine cet ouvrage, & qui renferme les rapports des sinus partiels au sinus total.

II°. On conçoit donc le rayon d'un petit cercle, divisé en autant de parties, que le rayon d'un grand cercle : de même que l'on suppose la circonférence de tout cercle, grand ou petit, divisée en 360 degrés. On cherche ensuite combien les autres sinus, qui sont tous

moindres que le ſinus total, contiennent de parties égales à celles du rayon. Par exemple, le ſinus total étant ſuppoſé de 10000000 de parties; ſi on ſait que le ſinus d'un angle de 30 degrés eſt la moitié du ſinus de l'angle droit ou du ſinus total; on ſaura que le ſinus de l'angle de 30 degrés, contient 5000000 de parties du ſinus total.

Et quoique l'on ne connoiſſe pas la valeur abſolue des ſinus, cela n'empêche pas que l'on ne puiſſe trouver la valeur abſolue des côtés d'un triangle dont on connoît un côté & les angles. Car ſi dans un triangle, un ſinus de 10000000 de parties vaut 300 toiſes; l'autre ſinus de 5000000 de parties vaudra 150 toiſes.

III°. On voit par ce que nous venons de dire, *que les ſinus partiels ne ſont que des fractions du ſinus total, ou du rayon, pris pour unité.* Par exemple, le ſinus total ou le ſinus de 90 degrés, eſt $\frac{10000000}{10000000}=1$ : le ſinus de 30 degrés, eſt $\frac{5000000}{10000000}=\frac{1}{2}$; & ainſi du reſte. Ainſi les tables des ſinus ſont de vraies fractions, dont le dénominateur eſt omis & ſous-entendu : ce ſont des *fractions décimales*. (464.)

Les tangentes & les ſécantes ſont auſſi exprimées dans les tables, en fractions du rayon; fractions dont le dénominateur ſous-entendu eſt toujours le rayon ou le ſinus total; & dont le numérateur, plus grand ou plus petit que le dénominateur conſtant, rend la valeur de la fraction ou plus grande ou plus petite que l'unité, qui eſt toujours ici le ſinus total. (188.)

647. REMARQUE II. Le ſinus d'un arc ou d'un angle étant la moitié d'une corde qui ſoutient un arc double (639); *pour connoître tous les ſinus, il faut connoître toutes les cordes.* Quand on connoîtra toutes les cordes; en prenant toutes leurs moitiés, on aura les ſinus de tous les angles. C'eſt à cette recherche, que nous deſtinons les théorêmes & les problêmes ſuivans.

## THÉORÈME I.

648. *Dans deux cercles inégaux, les cordes des arcs semblables sont proportionnelles aux rayons.* (fig. 12.)

DÉMONSTRATION. Soient deux cercles inégaux CMN & Cmn, dans lesquels prenez deux angles égaux MCN & mCn, qui embrasseront des arcs semblables (340); & menez les lignes droites MN & mn, qui feront deux cordes d'arcs semblables.

Les deux triangles rectilignes MNC & mnC sont semblables : puisqu'ils ont un angle commun ; & que dans chaque triangle, les deux autres angles étant opposés à des côtés égaux, sont aussi égaux entre eux (389). Par conséquent, l'angle M ou N est la moitié du supplément à 180 degrés ; l'angle *m* où *n* est la moitié du même supplément à 180 degrés : donc l'angle M est égal à l'angle *m*; & l'angle N, égal à l'angle *n*. Donc les trois côtés du grand triangle sont proportionnels aux trois côtés du petit (403). Donc MC . mC :: MN . mn.

Or dans cette proportion, la premiere raison exprime le rapport des rayons ; & la seconde raison égale exprime le rapport des cordes : donc dans deux cercles inégaux, les cordes des arcs semblables sont proportionnelles aux rayons. C. Q. F. D.

649. COROLLAIRE. *Dans deux cercles inégaux, les sinus des arcs semblables sont aussi proportionnels aux rayons :* puisque ces sinus sont les moitiés des cordes qui soutiendroient des arcs doubles ; & que ces cordes qui soutiendroient des arcs doubles, étant entre elles comme les rayons, leurs moitiés sont aussi entre elles comme les rayons. (163.)

650. LEMME. *Quand on a à multiplier une ligne ou une grandeur quelconque par une autre ; on a le même*

*produit, soit qu'on multiplie toute la premiere par toute la seconde; soit qu'on multiplie toute la premiere par une portion quelconque, & ensuite par l'autre portion, de la seconde.* (fig. 103.)

DÉMONSTRATION. Soit une ligne ou une grandeur quelconque AM ou son égale AN, qu'il faille multiplier par la grandeur AB.

I°. Si on multiplie AM ou AN par AB; le produit sera le rectangle ABDM, égal aux deux rectangles AXRM + RXBD.

II°. Si on multiplie AM on AN par AX, & ensuite par XB; les deux produits seront les deux rectangles AXRM + RXBD, égaux au rectangle ABDM.

La même démonstration auroit lieu, *si on multiplioit toute la ligne AB par une portion de MA = NA*, & ensuite par l'autre portion de MA ou *NA*: & ainsi du reste. C. Q. F. D.

THÉORÊME FONDAMENTAL.

651. *Dans tout quadrilatere inscrit dans un cercle, la somme des deux rectangles des côtés opposés, est égale au rectangle des deux diagonales.* (fig. 99 & 100.)

EXPLICATION. Soit le quadrilatere quelconque AB DF, inscrit au cercle, & divisé par les deux diagonales AD & BF, lesquelles se coupent en un point quelconque V, dans le centre ou hors du centre, à angles égaux ou à angles inégaux. Un rectangle, égal en largeur à une diagonale quelconque AD, & égal en hauteur à l'autre diagonale BF, seroit le *rectangle des deux diagonales*. Deux autres rectangles, qu'on formeroit de même sur les côtés opposés du quadrilatere, en élevant perpendiculairement l'un sur l'autre ces côtés opposés, & en les multipliant l'un par l'autre, AB par FD, & AF par BD, seroient la somme des

deux *rectangles des côtés opposés* du quadrilatere.

Après ces observations, nécessaires pour bien faire entendre l'état de la question, il sera facile de démontrer le présent théorême, sur lequel uniquement est fondée toute la Trigonométrie. La même démonstration aura lieu, soit que les diagonales se coupent à angles droits, soit qu'elles se coupent à angles aigus & obtus : comme on le verra en faisant la démonstration indifféremment sur les deux figures que nous avons indiquées.

DÉMONSTRATION. Il s'agit de faire voir que AD × BF = AB × DF + AF × BD. Pour cela, il faut tirer la ligne AM, de maniere qu'elle fasse un angle *r* égal à l'angle *s*. Après quoi on démontrera aisément que le produit des deux diagonales, est égal aux deux produits réunis des côtés opposés.

I°. Il est évident que BD × AF = AD × FM. Car dans les deux triangles FAM & DAB, d'abord les deux angles *r* & *s* sont égaux, par la construction. Ensuite les deux angles AFM & ADB sont aussi égaux; puisqu'ils sont appuyés sur le même arc AB. Ces deux triangles sont donc semblables : donc BD . AD :: FM . AF. Par conséquent, BD × AF = AD × FM.

Donc le produit des deux côtés opposés BD & AF, est déjà égal au produit de la diagonale AD par la partie FM de l'autre diagonale FB.

II°. Il est encore évident que AB × FD = AD × MB. Pour le démontrer, il faut comparer les deux triangles AFDA & AMBA; & faire voir que ces deux triangles sont semblables. D'abord l'angle FAD est égal à l'angle BAM; à cause de l'angle commun MAV, qui est ajouté aux deux angles *r* & *s* égaux par la construction. Ensuite l'angle FDA du grand triangle est égal à l'angle MBA du petit : parce qu'ils sont appuyés l'un & l'autre sur le même arc FA. Ainsi les deux triangles sont semblables, & on a cette proportion : FD . MB ::

AD . AB. Par conséquent, FD × AB = MB × AD.

Donc le produit des deux côtés opposés AB & DF, est encore égal au produit de la diagonale AD par la partie restante MB de l'autre diagonale FB.

III°. Il est évident, comme nous l'avons fait voir & sentir dans le lemme précédent, que les deux produits de la diagonale entiere AD par les deux parties FM & MB de l'autre diagonale FB, valent ensemble le rectangle des deux diagonales multipliées en entier l'une par l'autre. Donc la somme des deux rectangles des côtés opposés du quadrilatere inscrit au cercle, est égale au rectangle des deux diagonales. C. Q. F. D.

652. REMARQUE. Ce théorême est l'unique proposition un peu difficile à saisir dans la Trigonométrie rectiligne : tout le reste n'en est qu'une *application* & une dépendance; comme on le verra *dans les problêmes suivans*. C'est pourquoi nous avons cru ne devoir rien négliger pour en rendre lumineuse & sensible la démonstration.

C'est d'après la théorie de ce théorême, qu'on a construit, une fois pour toutes, les fameuses *Tables des sinus*, qui sont la base de tous les *grands calculs* mathématiques & physico-mathématiques. Pour concevoir sur quels principes & en quelle maniere elles ont été construites, & comment on pourroit les construire soi-même, si elles ne l'étoient pas; il faut faire attention qu'en supposant le rayon d'un cercle quelconque, divisé en 10000000 de parties égales, par exemple; on connoît ce rayon & son quarré; on connoît la corde de 60 degrés, qui étant égale au rayon (477), est aussi de 10000000 de parties; on connoît aussi le diametre, qui étant double du rayon, est de 20000000 de parties. Par ces trois choses connues, on trouvera dans un cercle, les cordes de tous les arcs de ce cercle, depuis une minute jusqu'à 90 degrés : les moitiés de ces cordes donnent tous les sinus des 45 premiers degrés de l'angle droit. (639.)

Après quoi, par les sinus connus des 45 premiers degrés, on trouve tous les sinus du reste de l'angle de complément, jusqu'à 90 degrés : on va voir comment.

### PROBLÊME I.

653. *Connoissant la corde d'un arc, trouver la corde de son supplément.* (fig. 100.)

SOLUTION. Soit AB la corde connue : il s'agit de trouver la corde AF. Pour cela, je fais attention que l'angle FAB, formé par ces deux cordes, est un angle droit : puisqu'il est appuyé sur le diametre FB (368). Je fais encore attention que si du point A je mene sur le diametre la perpendiculaire AD ; j'aurai par le théorême précédent $FB \times AD = AB \times FD + BD \times AF$. Je fais enfin attention que le côté AF est égal au côté DF, & que AV est égal à DV (407). Par conséquent, en place de $AB \times FD$, je puis prendre $AB \times AF$ ; & ce produit sera égal au produit de la diagonale FB qui est ici le diametre, par la moitié AV de l'autre diagonale qui est ici perpendiculaire au diametre.

Après ces observations, il est facile de résoudre le problême. Car dans le triangle AFBA, rectangle en A ; si le rayon est de 100000 parties, le diametre sera de 200000 parties. Or le quarré du diametre FB, qui est ici l'hypothénuse, est égal au quarré des deux autres côtés AB & AF (517) : donc si du quarré du diametre, on extrait le quarré de la corde connue AB ; le reste sera le quarré de la corde AF. Par conséquent, si on extrait la racine quarrée de ce reste (189) ; cette racine quarrée exprimera la corde AF.

Si la corde connue AB est la corde d'un arc de 60 degrés, égale au rayon (477) ; la corde AF qu'on trouvera, sera la corde d'un arc de 120 degrés.

## PROBLÊME II.

654. *Connoiſſant les cordes de deux arcs, trouver la corde qui ſoutient un arc égal à la ſomme de ces deux arcs pris enſemble.* (fig. 100.)

SOLUTION. Soient les arcs AB & BD, dont on connoiſſe les cordes AB & BD. Il s'agit de trouver la corde AVD, qui ſoutient la ſomme de ces deux arcs.

Pour cela, du point B, où aboutiſſent les deux cordes connues, menez le diametre BF : menez auſſi les deux cordes AF & DF, qui ſoutiennent les arcs de ſupplément. Après quoi, par le problême précédent, cherchez & trouvez la valeur des deux cordes AF & BF ; & alors vous connoîtrez les quatre côtés du quadrilatere ABDFA.

Maintenant multipliez l'un par l'autre *les côtés opposés* de ce quadrilatere ; & ajoutez enſemble les deux produits : la ſomme ſera égale au produit des deux diagonales FB & AD. Par conſéquent, ſi vous diviſez cette ſomme par la diagonale FB, qui eſt un diametre connu ; vous aurez un quotient qui ſera la diagonale ou la corde cherchée AVD : *car tout produit, diviſé par une de ſes racines, donne un quotient égal à l'autre racine.*

Par exemple, connoiſſant que la corde de 30 degrés eſt de 51764 parties, & que la corde de 15 degrés eſt de 26106 parties ; on trouvera par la méthode de ce problême, que la corde de 45 degrés, qui ſoutient ces deux arcs, eſt de 76536 parties.

655. COROLLAIRE I. *Ayant la corde d'un arc, on trouvera par la même méthode, la corde d'un arc double.*

EXPLICATION. Si on connoît la corde d'un arc de 7 degrés & demi, on trouvera la corde d'un arc de 15 degrés. Ce n'eſt qu'une application du dernier problême, dans laquelle le calcul eſt plus court : parce

que dans ce cas, la corde AB devient égale à la corde AD; & la corde AF, à la corde DF.

656. COROLLAIRE II. *Ayant la corde d'un arc, on pourra aussi trouver la corde d'un arc triple, ou d'un arc quadruple, ou d'un arc quintuple, & ainsi du reste.*

EXPLICATION. I°. Pour trouver la corde d'un *arc triple*, on cherchera d'abord celle d'un arc double. Ensuite connoissant la corde de l'arc double & celle de l'arc simple, on trouvera la corde de la somme de ces deux arcs : c'est la corde de l'arc triple.

II°. Pour l'*arc quadruple*, on cherchera d'abord la corde de l'arc double; ensuite celle d'un arc qui soit double de celui dont on aura trouvé la corde; la derniere corde trouvée sera celle de l'arc quadruple de l'arc simple.

III°. Pour l'*arc quintuple*, on cherchera la corde de l'arc double; ensuite celle de l'arc triple, & enfin celle de la somme de ces deux arcs, dont l'un est double & l'autre triple : cette derniere corde sera celle d'un arc quintuple de l'arc simple. Tout cela suit évidemment du problême précédent.

## PROBLÊME III.

657. *Connoissant la corde d'un arc, trouver celle de la moitié de cet arc.* (fig. 100.)

SOLUTION. Soit AVD la corde connue de l'arc ABD : il s'agit de trouver la corde AB de la moitié de cet arc. Pour cela, du centre du cercle, que je suppose en C, je mene un diametre AMB perpendiculaire à la corde donnée AVD; ce diametre divise & la corde AD & son arc ABD en deux parties égales (407). On a donc le triangle AVB, rectangle en V; & la corde encore inconnue AB en est l'hypothénuse. Le quarré de la corde AB est égal aux deux quarrés des deux autres côtés AV & BV (517) : il s'agit donc de trouver la somme de ces deux derniers quarrés. Or,

I°. On connoît le côté AV, qui est la moitié de la corde donnée : il faut prendre le quarré de ce côté.

II°. On trouvera le côté BV en cette maniere. Ayant mené le rayon CA, on aura un autre triangle rectangle AVCA, dont le rayon CA = CB est l'hypothénuse. En extrayant du quarré du rayon CA le quarré du côté AV; on aura un reste, qui sera le quarré du côté CV. Si on extrait la racine quarrée de ce reste (129), on aura la partie CV du rayon : l'autre partie VB de ce même rayon, sera donc aussi connue.

III°. Ainsi dans le triangle rectangle AVBA, on connoît les deux côtés AV & BV : ces deux côtés étant élevés chacun à son quarré, leur somme sera égale au quarré de la corde AB qui est l'hypothénuse. *Si on extrait la racine quarrée de cette somme, on aura donc la valeur de la corde AB, en parties égales à celles du rayon.*

Par exemple, si la corde connue AB est la corde d'un arc de 60 degrés, égale à 100000 parties; on trouvera que la corde d'un arc de 30 degrés est de 51764 parties; que la corde d'un arc de 15 degrés est de 26106 parties; & ainsi du reste.

## PROBLÊME IV.

658. *Connoissant la corde d'un arc, trouver celle du tiers & de la cinquieme partie de cet arc.* (fig. 101.)

SOLUTION. Soit la corde connue MN, égale à 180000 parties : il faut trouver la corde NK de l'arc NK, que je suppose être le tiers de l'arc NKM.

I°. Il est certain que la corde cherchée NK est un peu plus grande que le tiers de la corde MN : puisqu'il est évident que la somme des cordes MK + KN est plus grande que la corde MN. Pour *trouver la corde* KN, on prendra donc un nombre de parties un peu plus grand que le tiers du nombre qui exprime

la corde connue MN : cette corde MN étant supposée de 180000 parties, on prendra donc un nombre un peu plus grand que 60000 parties, qui est le tiers de la corde connue.

II°. On supposera la corde KN, égale au nombre qu'on aura pris au hasard un peu plus grand que le tiers de la corde connue ; & d'après cette supposition, on cherchera la corde connue elle-même, par la méthode du second corollaire précédent (656) : c'est-à-dire, qu'on cherchera la corde d'un arc triple de celui dont on a pris la corde au hasard.

Si le nombre de parties qu'on a supposé à la corde KN, donne précisément la corde connue MN ; il est clair que le nombre supposé est la vraie valeur de la corde KN qui se trouve toute connue.

III°. Mais si le nombre de parties qu'on a supposé à la corde KN, donne la corde connue MN un peu trop grande ou un peu trop petite ; il est clair qu'on a fait une *fausse supposition*, qu'il faudra réformer par cette proportion (274) : la fausse corde trouvée MN est à la corde supposée KN, comme la vraie corde connue MN, est à la vraie corde encore inconnue KN. Les trois premiers termes connus donneront le quatrieme inconnu, qui exprimera la corde cherchée KN.

Cette proportion n'est pas parfaitement exacte : mais si le nombre de parties qu'on a d'abord supposé à la corde KN, & qu'on peut augmenter ou diminuer de tant d'unités qu'on voudra, ne donne enfin la corde MN qu'infiniment peu plus grande ou plus petite qu'elle n'est en réalité ; il n'y aura point d'erreur sensible dans l'application qu'on fera de cette proportion ou de cette regle de trois à de petits arcs. On ne s'en sert que pour trouver la corde d'un arc de 7 degrés 30 minutes, ou de quelqu'autre arc plus petit.

Au reste on peut toujours s'assurer si le nombre trouvé est effectivement la corde du tiers de l'arc dont

on connoît la corde ; on peut, dis-je, s'en assurer, en cherchant par le second corollaire précédent (656), quelle est la corde d'un arc triple : car le nombre qu'on trouvera doit être le même que celui qui exprime la corde connue.

IV°. La même méthode qui fait *trouver la corde du tiers d'un arc*, fait aussi *trouver la corde du cinquieme de cet arc*. Pour trouver la corde de la cinquieme partie d'un arc, en supposant que l'on connoît la corde qui soutient tout cet arc, on prendra un nombre un peu plus grand què la cinquieme partie de la corde connue ; & d'après cette supposition, on cherchera la corde connue elle-même, comme dans l'exemple où il s'agit de trouver la corde du tiers de cet arc.

Par exemple, la corde de 76 degrés étant de *123132* parties, on trouvera que celle de 25 degrés *20* minutes, qui est le tiers de 76 degrés, contient 43856 parties ; & que celle de 15 degrés 12 minutes, qui est le cinquieme de 76 degrés, contient 26452 parties. On suppose toujours ici le rayon de 100000 parties.

659. APPLICATION. On peut aisément trouver, par les problêmes précédens, les cordes de tous les arcs ; depuis celui de deux minutes, jusqu'à celui de 90 degrés.

I°. La corde de 60 degrés est égale au rayon (477), que je suppose de 100000 parties. On trouvera donc la corde de 30 degrés (657) : ensuite celle de 15 degrés ; enfin celle de 7 degrés 30 minutes.

II°. Quand on aura trouvé la corde 7 degrés 30 minutes ; on cherchera celle du tiers, c'est-à-dire, de 2 degrés 30 minutes. Ensuite on cherchera la corde de la cinquieme partie, qui est 30 minutes. Cette corde étant connue, on trouvera celle du tiers, ou de 10 minutes. La corde de 10 minutes donnera celle de 2 minutes, en cherchant la corde de la cinquieme partie de 10 minutes.

III°. On trouvera auſſi, par les problêmes précédens, les cordes des arcs de 4 minutes, de 6 minutes, de 8, de 12, de 14, de 16, de 18 minutes, & ainſi des autres arcs, de 2 minutes en 2 minutes, juſqu'à 90 degrés: les moitiés de toutes ces cordes, ſeront les ſinus des 45 premiers degrés, de minute en minute. Or quand on aura les ſinus des 45 premiers degrés; on trouvera ceux de tous les autres degrés juſqu'à 90, par le problême ſuivant.

## PROBLÊME V.

660. *Connoiſſant le ſinus d'un arc, trouver ſon co-ſinus, ou le ſinus de ſon complément.* (fig. 94.)

SOLUTION. En ſuppoſant que l'on connoît GH, ſinus de l'arc GA; il s'agit de trouver GL, ſinus de l'arc GD complément de GA.

Dans le triangle rectangle CHG, on connoît deux côtés, ſavoir l'hypothénuſe CG, qui eſt un rayon de 100000 parties, & le côté GH. Retranchez le quarré de GH, du quarré de CG: le reſte ſera le quarré de CH. Extrayez la racine quarrée de ce reſte: vous aurez le côté CH, égal à GL ſinus de l'arc GD, complément de l'arc GA.

Par exemple, étant donné le ſinus d'un angle de 32 degrés; vous pourrez trouver ſon co-ſinus, ou le ſinus de 58 degrés. Pour cela, du quarré du rayon, ſouſtrayez le quarré du ſinus connu: le reſte, ou la différence, ſera le quarré du ſinus de 58 degrés. Extrayez la racine quarrée de ce reſte: cette racine quarrée exprimera le ſinus cherché de l'angle de 58 degrés.

661. REMARQUE. C'eſt par cette méthode que l'on eſt venu à bout de *trouver la valeur de tous les ſinus des angles*, depuis une minute juſqu'à 90 degrés. On en a fait des tables, connues ſous le nom de *Tables des ſinus*, que nous placerons à la fin de cet ouvrage. Nous

ferons ensorte qu'elles aient toute l'exactitude que l'on peut desirer ; & nous ferons remarquer qu'il ne peut y avoir des fautes d'impression, sans qu'on les apperçoive tout de suite.

Il y a des tables des sinus, où le sinus total n'est supposé que de 100000 parties : il y en a d'autres où ce même sinus total est supposé de 10000000 de parties. Nous avons préféré celles-ci ; parce qu'elles donnent plus de précision dans les calculs, quand quelquefois on a besoin d'une extrême précision. Mais il est à propos d'avertir ici le lecteur, que dans les calculs ordinaires, on néglige *les deux derniers chiffres* de chaque sinus, séparés des chiffres précédens par un point intercalaire ; en observant simplement de donner *une* unité de plus au chiffre qui précede le *point intercallaire*, quand les deux derniers *chiffres valent* plus de 50. Par exemple, en cherchant le sinus de 10 degrés dans les tables, vous trouverez 17364.82 ; & vous prendrez pour sinus simplement 17365. En cherchant le sinus de 55 degrés, vous trouverez 81915.21 ; & vous prendrez simplement pour sinus 81915. Les chiffres qui suivent le point intercalaire, vaudroient un cent-millieme du rayon, si leur valeur étoit 100 : mais comme ils valent toujours moins de 100, ils valent toujours moins d'un cent-millieme du rayon. Quand ces deux derniers chiffres valent plus de 50, en ajoutant une unité au chiffre qui les précede, on rend le nombre qu'on prend pour sinus, plus approchant de la valeur du sinus exact. (*fig.* 94.)

On voit par la théorie que nous venons de donner sur l'art de trouver les sinus de tous les angles & d'en construire des tables ; que ces tables des sinus doivent exprimer & expriment réellement les rapports qu'ont entre elles & avec le rayon, dans un cercle quelconque, les lignes DC, EF, GH, perpendiculaires au rayon CA : ces lignes sont les sinus des différens arcs.

Si la ligne ou le sinus GH est égal à la moitié du rayon, qu'on suppose de 10000000 de parties; cette ligne ou ce sinus GH répondra dans les tables à un nombre de 5000000 de parties : & ainsi du reste.

La différence du sinus GH au sinus EF, est fort considérable : parce que les lignes HF & GE, qui les terminent, sont fort divergentes. La différence entre le sinus EF & le sinus DC, est beaucoup moindre : parce que les lignes FC & ED, qui les terminent, approchent beaucoup plus du parallélisme.

## PROBLÊME VI.

662. *Trouver le sinus verse d'un arc donné.* (fig. 94.)

SOLUTION. Le sinus verse d'un arc quelconque GA, est la partie HA du rayon, interceptée entre le sinus droit & la circonférence (635); & la valeur de ce sinus verse est le rayon moins le sinus de l'arc de complément. (638.)

Ainsi étant donné un arc AG; cherchez le sinus GL de son complément GD, dans les tables des sinus : vous aurez GL = HC (660). Par conséquent, du rayon entier CA, extrayez le sinus trouvé GL = HC : le reste de la somme exprimera le sinus verse HA.

Par exemple, étant donné l'arc AG de 36 degrés 20 minutes; le sinus GL de son complément GD est de 80558 parties. Extrayez du sinus total AC égal à 100000 parties, ce nombre 80558 parties : le reste 19442 parties sera le sinus verse HA. On néglige les deux chiffres qui suivent le point intercalaire (661). Le complément GD est de 53 degrés 40 minutes.

## PROBLÊME VII.

663. *Trouver à infiniment peu près, par la théorie des cordes, le rapport du diametre à la circonférence d'un cercle quelconque.* (fig. 69.)

SOLUTION. Nous avons observé dans la planimétrie, que la solution du fameux problême de la quadrature du cercle, consisteroit à trouver un rapport exact & parfait entre le diametre & la circonférence (483): que les plus profonds mathématiciens n'ont jamais pu le trouver ce rapport exact & parfait; mais que les rapports approchans trouvés par Archimede & par Métius, & adoptés par tous les Mathématiciens, sont suffisans pour donner toute la précision que l'on peut espérer d'atteindre dans la pratique (479). Pour satisfaire la curiosité, nous allons indiquer ici comment & par quelle méthode, on a pu découvrir ces rapports approchans du vrai rapport.

I°. Il est évident qu'on peut *inscrire un polygone régulier* de tant de côtés que l'on voudra, *à un cercle* ABDRA; & que plus le polygone aura *de côtés*, *plus* son périmetre se rapprochera de la circonférence du cercle : que si le polygone avoit une infinité de côtés; son périmetre seroit confondu avec la circonférence du cercle : mais que tant que le polygone sera d'un nombre fini de côtés, son périmetre sera *moindre* que la circonférence circonscrite; chaque arc étant plus grand que sa corde, qui est une ligne droite, & qui est un des côtés du polygone inscrit.

II°. Le *côté de l'exagone* régulier inscrit dans un cercle, est égal au rayon de ce cercle (477) : on connoît donc le rapport du rayon avec le côté de l'exagone. Le côté de l'exagone est la corde d'un arc de 60 degrés : cette corde d'un arc de 60 degrés fera trouver la corde de la moitié de cet arc ou la corde d'un arc de 30 degrés (657), laquelle sera le *côté d'un dodécagone*. La corde d'un arc de 30 degrés, fera trouver la corde d'un arc de 15 degrés, laquelle sera le côté d'un *polygone de 24 côtés*. On trouvera en suivant la même méthode, le côté d'un polygone de 48, de 96, de 192, de 384 côtés; & ainsi de suite à l'infini. On con-

noîtra

noîtra donc le rayon & le côté d'un polygone régulier inscrit, par exemple, de 384 côtés.

III°. Quand dans le calcul on aura donné assez de côtés au polygone régulier inscrit, pour juger que ses côtés se confondent sensiblement avec la circonférence du cercle; on pourra prendre, sans erreur sensible, le périmetre du polygone pour la circonférence du cercle. Ainsi ayant supposé le rayon connu, divisé en 100000 ou en 10000000 parties égales; on multipliera le nombre des mêmes parties qui expriment le côté trouvé, par le nombre des côtés qu'a le polygone inscrit : le produit donnera le périmetre de ce polygone, exprimé en parties égales à celles du rayon. On verra donc quel rapport a ce périmetre avec le rayon; & par-là même avec le diametre du cercle : & ce rapport pourra être pris, sans erreur sensible, pour le vrai rapport de la circonférence au rayon ou au diametre.

Ce rapport trouvé entre le diametre & la circonférence d'un cercle quelconque dont le rayon étoit connu, sera le rapport qui se trouve entre le diametre & la circonférence de tous les cercles possibles : parce que dans tous les cercles possibles, les circonférences sont entre elles comme les rayons & comme les diametres. (473.)

700. REMARQUE. On peut aussi, pour parvenir au même but, employer le polygone régulier, circonscrit au cercle *abdra*, dont le rayon est donné. (*fig.* 69.)

Il est évident que le périmetre d'un tel *polygone circonscrit*, par la multiplication de ses côtés, se confondroit à la fin sensiblement avec la circonférence inscrite. Le côté quelconque M*b*N d'un polygone régulier circonscrit, divisé en deux parties égales par le rayon C*b*, se transforme en deux tangentes *b*M, *b*N. Or comme on trouve les tangentes de tous les arcs (723),

on peut trouver le côté d'un polygone régulier circonſcrit de tant de côtés que l'on voudra ; & la ſomme de tous ces côtés, ſera le périmetre de ce polygone.

Comparant enſuite le rapport du rayon avec le *périmetre circonſcrit* qui eſt trop grand, & le rapport du même rayon avec le *périmetre inſcrit* qui eſt trop petit; on pourra déterminer avec la plus grande préciſion, non peut-être quel eſt le vrai rapport, mais entre quels termes ſe trouve le *vrai rapport* du rayon & du diametre à la circonférence.

Archimede, en cherchant le rapport du diametre à la circonférence, n'a employé que des polygones inſcrits & circonſcrits de 96 côtés : Métius & Ludolphe de Ceulen ont employé des polygones inſcrits & circonſcrits, d'un plus grand nombre de côtés : *ce qui a plus rapproché les périmetres des polygones vers la circonférence inſcrite ou circonſcrite. De-là un peu plus d'exactitude & de préciſion dans les rapports donnés par ces deux derniers.* (479.)

## PARAGRAPHE SECOND.

### *USAGE DES SINUS.*

### THÉORÊME.

701. *DANS tout triangle, les ſinus des angles ſont proportionnels aux côtés oppoſés à ces angles.* (fig. 95.)

DÉMONSTRATION. Les moitiés ſont proportionnelles aux touts : or les ſinus des angles ſont les moitiés des côtés oppoſés. Car ſi l'on inſcrit dans un cercle un triangle quelconque ABC, ce qui eſt toujours poſſible ; les trois côtés deviennent trois cordes, dont les moitiés ſont les ſinus des angles oppoſés (639). Donc le ſinus de l'angle A eſt la moitié de la corde BC : le ſinus

de l'angle C est la moitié de la corde AB : le sinus de l'angle B est la moitié de la corde AC. Donc chaque sinus est proportionnel au côté opposé. C. Q. F. D.

## PROBLÊME I.

702. *Etant donnés deux angles & un côté d'un triangle quelconque* ABC, *trouver les deux côtés inconnus*. (fig. 95.)

SOLUTION. I°. Deux angles étant connus, on aura le troisieme angle, qui est le supplément des deux autres à 180 degrés. (387.)

II°. Un côté quelconque BC étant connu, aussi bien que les trois angles; on connoîtra le côté AC, par cette proportion : le sinus connu de l'angle A, ou par abréviation S-A, est au côté opposé BC connu; comme le sinus connu de l'angle B, est au côté opposé AC inconnu. On connoîtra de même le côté AB, par cette autre proportion : le sinus connu de l'angle A, est au côté opposé BC connu; comme le sinus connu de l'angle C, est au côté opposé AB inconnu (701). On exprime ces proportions, dans lesquelles entrent les sinus, en cette maniere :

S-A . BC :: S-B . AC : ou *altern.* S-A . S-B :: BC . AC.
S-A . BC :: S-C . AB : ou *altern.* S-A . S-C :: BC . AB.

III°. Si on suppose l'angle B, de 45 degrés 24 minutes; & l'angle C, de 71 degrés 42 minutes; l'angle A inconnu sera de 62 degrés 54 minutes. Si on suppose aussi le côté connu BC, de 2160 toises; en prenant les sinus des angles A & C dans les tables, la premiere proportion S-A . BC :: S-B . AC, se réduira à celle-ci : 89021, 2160 :: 94943 . x.

Le premier terme 89021 est le sinus de l'angle A : le second terme 2160 est le côté BC : le troisieme terme 94943 est le sinus de l'angle C : le quatrieme terme x représente le côté AB inconnu, qu'il faut

chercher par la regle de trois. Or en faisant cette regle, on trouve pour quotient presque 2304 : ainsi le côté AB contient environ 2304 toises. On voit par-là comment il faudra s'y prendre pour trouver l'autre côté AC. On néglige dans les tables des sinus, les chiffres qui suivent le point.

703. REMARQUE. Si l'un des trois angles étoit obtus, par exemple, de 125 degrés & 30 minutes, on ne trouveroit pas cet angle dans les tables des sinus. Pour avoir le sinus de cet angle obtus, il faudra chercher son supplément qui est l'angle de 54 degrés & 30 minutes ; & prendre le sinus de cet angle de 54 degrés & 30 minutes, lequel a le même sinus que l'angle dont il est supplément, ou que l'angle de 125 degrés & 30 minutes; comme on l'a fait voir ailleurs. *(636.)*

On mettra donc le sinus de l'angle de 54 *degrés &* 30 minutes dans la proportion, à la place de l'angle de 125 degrés & 30 minutes ; & le résultat donnera également le rapport des côtés, en parties du rayon du cercle circonscrit au triangle, & par-là même en parties d'un des côtés connus du triangle. Par exemple (*fig.* 96),

Supposons que dans le triangle CAB, l'angle A soit de 125 degrés & 30 minutes ; l'angle C, de 20 degrés & 46 minutes ; & que la base ou le côté connu AB, soit de 200 toises. On aura cette proportion ; S-C . AB :: S-A . CB ; & en chiffres, 35456 . 200 :: 81412 . $x$ (*661*). En divisant le produit des deux moyens par le premier extrême, vous aurez un quotient qui exprimera en toises le côté inconnu CB.

### PROBLÊME II.

704. *Trouver la surface d'un triangle, dont on connoît les trois angles & les trois côtés.*

SOLUTION. I°. Si le triangle est rectangle (*fig.* 83);

les deux côtés AB & BC qui forment l'angle droit, sont la base & la hauteur de ce triangle : multipliez l'une par la moitié de l'autre ; & le produit donnera la surface cherchée. (448.)

II°. Si le triangle n'est pas rectangle (*fig.* 98.) ; du sommet du plus grand angle, abaissez par la pensée une perpendiculaire BD sur le côté opposé : elle divisera le triangle donné en deux triangles rectangles, tels que le précédent. Vous trouverez la valeur de cette perpendiculaire BD, par cette proportion ; S-D. AB : : S-A . BD. La perpendiculaire BD & la base AC étant connues, multipliez l'une par la moitié de l'autre : le produit donnera la surface cherchée.

On connoît facilement quel est le plus grand angle d'un triangle dont les côtés sont connus : parce que le plus grand angle est opposé au plus grand côté (389). Si le triangle étoit équilatéral, on peut abaisser la perpendiculaire, du sommet d'un angle quelconque, sur le côté opposé.

### PROBLÊME III.

705. *Etant donnés deux côtés d'un triangle, & l'angle compris entre ces deux côtés ; trouver le troisieme côté inconnu.*

SOLUTION. L'angle donné & compris entre les côtés donnés, est ou droit, ou aigu, ou obtus.

I°. *Si l'angle* B *donné & compris entre les côtés donnés, est droit* (fig. 85) ; le côté opposé & inconnu AC est l'hypothénuse, dont le quarré est égal aux deux quarrés des côtés donnés (517). Prenez donc la somme des quarrés des côtés donnés AB, BC ; & extrayez-en la racine : cette racine donnera le côté cherché AC.

II°. *Si l'angle* A *donné & compris entre les côtés donnés, est aigu* (fig. 98) ; du sommet du plus grand

des angles inconnus, j'abaiſſe la perpendiculaire BD ſur le côté oppoſé : ce qui donne le triangle rectangle BDA, dont on connoîtra le côté ou la perpendiculaire BD, par cette proportion, dans laquelle les trois premiers termes ſont connus : S-D . AB :: S-A . BD.

Après quoi, ſi du quarré de l'hypothénuſe BA, on extrait le quarré du côté BD; le reſte ſera le quarré du ſegment AD, dont il faut extraire la racine, laquelle exprimera la grandeur du côté AD.

Le ſegment AD eſt donc connu; le côté AC eſt connu par la ſuppoſition : donc ſi je retranche *AD* de AC, il me reſte DC connu. Dans le petit triangle rectangle BDC, je connois donc le côté DC, *auſſi* bien que le côté BD : la ſomme de leurs *quarrés* eſt égale au quarré de l'hypothénuſe BC : *donc, ſi j'en* extrais la racine, j'aurai le côté BC *connu.*

IIIº. *Si l'angle* A *donné & compris entre les côtés donnés, eſt obtus* (fig. 96); je prolonge BA autant qu'il le faut, pour que CD lui ſoit perpendiculaire. Or dans le triangle rectangle ACD, je connois le côté AC, qui eſt donné; l'angle D, *qui eſt droit*; l'angle DAC, qui eſt le ſupplément de l'angle BAC donné (542); & par conſéquent le troiſieme angle DCA, qui eſt ſupplément à deux angles droits : donc je connoîtrai les deux côtés DA, DC. (702.)

Maintenant, ſi j'ajoute le côté trouvé DA, au côté donné BA; j'aurai le côté BD connu. Ainſi dans le triangle rectangle DBC, je connois BD & DC, & par conſéquent l'hypothénuſe BC, par ce qui vient d'être dit au premier cas de ce problême.

## PROBLÊME IV.

706. *Etant donnés les deux côtés d'un triangle, & l'angle compris entre ces deux côtés ; trouver la ſurface du triangle.*

SOLUTION. I°. Dans le premier cas (705), on a la hauteur AB & la base BC : donc on a la surface qui est le produit de l'une par la moitié de l'autre. (*fig.* 83.)

II°. Dans le second cas, on a la base donnée AC ; & on a trouvé la hauteur BD : donc on aura encore la surface. (*fig.* 98.)

III°. Dans le troisieme cas (*fig.* 96), j'aurai la surface du triangle ACB ; en multipliant le côté AB que je prends pour base, par la moitié de la perpendiculaire CD trouvée. (448. II°.)

## PROBLÊME V.

707. *Etant donnés les côtés d'un triangle & un des angles ; trouver les deux autres angles.* (fig. 96.)

SOLUTION. Soit un triangle quelconque ACB, dont on ait donné ou dont on ait trouvé les trois côtés, & dans lequel on connoisse un angle quelconque A.

Supposons l'angle A de 125 degrés ; le côté AB de 1000 toises ; le côté AC, de 1850 toises ; le côté CB, de 2428 toises. Comme l'angle obtus A n'a point de sinus par lui-même ; on lui donnera pour sinus, le sinus de son supplément, ou le sinus de l'angle de 55 degrés. (636.)

I°. Observez d'abord que puisque les sinus connus sont proportionnels aux côtés opposés, connus ou inconnus (701) ; de même les côtés connus sont proportionnels aux sinus des angles opposés, connus ou inconnus. Vous aurez donc ces proportions, qui vous feront trouver les sinus inconnus des angles C ou B....

S-C . AB :: S-A . CB : ou x . 1000 :: 70711 . 2428 ;
S-B . AC :: S-A . CB : ou x . 1850 :: 70711 . 2428.

Ainsi, en divisant le produit des moyens connus, par le dernier extrême connu, vous aurez un quotient

qui exprimera le ſinus de l'angle quelconque inconnu C.

II°. Obſervez encore, que les ſinus des angles vont en croiſſant dans les tables des ſinus, depuis zero juſqu'à 10000000 : cherchez donc dans cette ſuite croiſſante de nombres, le quotient trouvé ; & l'angle que marquera ce quotient ou ce *ſinus trouvé*, ſera l'angle que vous cherchez.

Par exemple, le quotient trouvé pour le ſinus de l'angle inconnu C, étant 17168 plus une fraction qu'on néglige ; vous trouverez que ce nombre approche le plus dans les tables des ſinus, du nombre 17164 qui eſt le ſinus de l'angle de 9 degrés 53 minutes (661). Ainſi l'angle C ſera un angle de 9 degrés 53 minutes, plus une fraction de minute *que l'on néglige*, ou que l'on évalue par un à-peu près.

III°. Obſervez enfin qu'ayant trouvé l'un des deux angles inconnus C, l'autre angle inconnu B eſt tout trouvé : puiſque cet angle inconnu B eſt le ſupplément à l'angle donné A & à l'angle trouvé C. (386.)

## *DES LOGARITHMES.*

708. OBSERVATION. On ſait que l'addition & la ſouſtraction ſont des opérations plus ſimples & plus faciles que la multiplication & la diviſion. On ſait pareillement que la multiplication & la diviſion ſont un calcul moins compoſé & moins pénible, que l'exaltation & l'extraction. Il ſeroit donc très-avantageux de trouver une méthode qui pût changer en additions & en ſouſtractions, toutes les eſpeces de multiplications & de diviſions ; & l'on voit qu'une pareille méthode ſimplifieroit beaucoup les opérations du calcul.

Or cette méthode a été trouvée par le fameux Nepper, géometre Ecoſſois ; lequel a donné l'art de ſubſtituer des nombres artificiels, à la place des nombres

ordinaires ; pour faire ſur ces nombres artificiels, par voie d'addition & de ſouſtraction, ce qu'il faudroit faire ſur les nombres ordinaires, par voie de multiplication & de diviſion. Ces nombres artificiels, ſubſtitués aux nombres naturels, ſont ce que l'on appelle *logarithmes ;* & l'uſage qu'on en fait, s'appelle *calcul logarithmique.*

Les logarithmes ſont des nombres en proportion arithmétique, correſpondans à d'autres nombres qui ſont en proportion géométrique. Par leur moyen, les multiplications & les diviſions qu'il faut faire pour trouver les côtés ou les ſinus des angles, dans un triangle à réſoudre en lui-même, ſe convertiſſent en ſimples additions & ſouſtractions ; & le calcul devient très-aiſé & très-court.

Les perſonnes qui ſont obligées de faire fréquemment de grands calculs trigonométriques, ne peuvent guere ſe diſpenſer d'avoir des tables des logarithmes. Elles trouveront dans la théorie qui les précede & qui en explique les principes & l'uſage, tout ce qui concerne cette eſpece de calcul, l'une des plus belles inventions des mathématiques modernes.

Mais il y a auſſi une infinité de perſonnes, qui éclairées & verſées dans l'étude des mathématiques & de la phyſique, ſans être géometres & aſtronomes de profeſſion, peuvent ſe diſpenſer aiſément des tables des logarithmes, & trouver dans les ſimples tables des ſinus, de quoi ſatisfaire leur curioſité ; quand elles veulent quelquefois ſe donner le plaiſir de réſoudre quelque triangle par la méthode trigonométrique. Il leur en coûtera un quart d'heure de tems de plus : mais elles ſeront diſpenſées de ſe procurer ces tables des logarithmes, & de ſe donner la peine d'apprendre à en faire uſage.

## PARAGRAPHE TROISIEME.

### SINUS DES SECONDES.

709. OBSERVATION. Les tables des ſinus ne contiennent que les ſinus des degrés & des minutes, ſans faire aucune mention des ſinus des ſecondes. Pour ſimplifier en tout les connoiſſances humaines, nous avons imaginé une *méthode ſimple & facile*, qui apprend à transformer les ſinus de ces tables, en *ſinus des ſecondes*, dont on a beſoin pour quelques calculs aſtronomiques.

Voici & les principes & la maniere de cette transformation, dont nous ne devons l'idée à *perſonne*.

### THÉORÊME I.

710. *Dans un cercle, les arcs de deux minutes, & tous les arcs plus petits, ſe confondent équivalemment avec leurs cordes.* (fig. 69.)

DÉMONSTRATION. I°. Si dans un même cercle, on inſcrit ſucceſſivement des polygones réguliers de 6 côtés, de 12 côtés, de 24 côtés, de 48 côtés, de 96 côtés; ou conçoit que les côtés MN, MB, M$x$, s'approchent d'autant plus de l'arc qu'ils ſoutiennent & dont ils ſont les cordes, que le polygone a plus de côtés. Donc en augmentant ſucceſſivement le nombre des côtés du polygone inſcrit, on parviendra à rendre les côtés M$x$ du polygone, équivalemment égaux aux arcs M$x$ qu'ils ſoutiennent : enſorte que ces côtés qui ſont des cordes, ne différeront des arcs qu'ils ſoutiennent, que d'une quantité infiniment petite, qu'on pourra négliger ſans crainte d'aucune erreur ſenſible.

Par exemple, la corde MB eſt le côté d'un dodéca-

gone : la corde M$x$ eſt le côté d'un polygone de 24 côtés : la corde du quart de l'arc M$x$ ſera le côté d'un polygone de 96 côtés. Or ſi la corde M$x$ paroît déjà ſe confondre avec ſon arc, il eſt clair que la corde d'un arc quatre fois plus petit, ne différera plus de ſon arc que d'une quantité infiniment petite ; & qu'on pourra ſans erreur ſenſible, prendre la corde pour l'arc, & l'arc pour la corde.

II°. Archimede, en cherchant le rapport du diametre à la circonférence d'un cercle (663), a trouvé que dans un polygone régulier de 96 côtés inſcrit au cercle, les côtés ſe confondent déjà équivalemment avec les arcs qu'ils ſoutiennent : enſorte que la différence des cordes & des arcs eſt déjà aſſez petite, pour qu'on puiſſe la négliger dans les calculs ; quand les circonférences ne ſont pas bien grandes.

Si on veut ſe donner la peine de chercher la corde de la moitié d'un arc ſoutenu par le côté d'un polygone régulier de 96 côtés ; on trouvera (657) que cette corde, priſe deux fois, n'excede que comme infiniment peu la corde de l'arc entier. Car ſi le côté d'un polygone régulier de 96 côtés, eſt d'une toiſe ; les deux côtés qui répondront au même arc dans un polygone qui aura le double de côtés, ne feront, étant réunis en une même ſomme, que d'une toiſe plus environ la trois mille deux cents cinquante-huitieme partie d'une toiſe, qui ne fait pas le quart d'une ligne.

III°. Le côté d'un polygone régulier de 96 côtés, eſt une corde qui ſoutient un arc de 3 degrés & 45 minutes. Or ſi une telle corde ſe confond déjà équivalemment avec ſon arc, en telle ſorte qu'on puiſſe prendre l'arc pour la corde, & la corde pour l'arc ; à combien plus forte raiſon, une corde qui ſoutient un arc de deux minutes, & qui ſe rapproche bien davantage de ſon arc, ſe confondra-t-elle équivalemment avec cet arc : puiſqu'une telle corde eſt le côté d'un

polygone régulier de 10800 côtés, inſcrit au cercle? C. Q. F. D.

711. COROLLAIRE. *Dans un cercle, les arcs d'une minute, & tous les arcs plus petits, ſe confondent équivalemment avec leurs ſinus; en telle ſorte qu'on puiſſe prendre les ſinus pour les arcs, & les arcs pour les ſinus.*

DÉMONSTRATION. I°. Dans un cercle, un ſinus d'une minute eſt la moitié d'une corde d'un arc de deux minutes (639) : or la corde d'un arc de deux minutes, ſe confond équivalemment avec ſon arc; comme on vient de l'expliquer & de le démontrer : donc la moitié de cette corde, qui eſt le ſinus d'un arc d'une minute, ſe confond auſſi équivalemment avec ſon arc; en telle ſorte qu'on puiſſe *prendre ſans* aucune erreur ſenſible, l'arc pour le *ſinus*, & *le ſinus* pour l'arc.

II°. On peut obſerver dans les tables des ſinus, que dans tous les arcs qui ſont au-deſſous de 12 minutes, les ſinus, trouvés par le calcul le plus rigoureux, ſont déjà entre eux comme leurs arcs : par exemple, que le ſinus d'un arc de 2 minutes, eſt au *ſinus d'un* arc de 4 minutes; comme l'arc de 2 minutes eſt à l'arc de 4 minutes; & ainſi du reſte juſqu'à 12 minutes : au-delà les ſinus ceſſent d'être en proportion avec leurs arcs (644). Les ſinus ſeront donc également & à plus forte raiſon entre eux comme leurs arcs, dans les arcs moindres que ceux d'une minute, dans les arcs des ſecondes & des tierces.

*On aura donc cette proportion :* le ſinus d'un arc d'une minute, eſt au ſinus d'un arc d'une demi-minute ou de 30 ſecondes; comme un arc d'une minute eſt à un arc de 30 ſecondes; comme un arc de 30 ſecondes, eſt à un arc de 15 ſecondes; & ainſi de ſuite (*fig.* 94.)

III°. Si l'arc GA eſt un arc d'une minute, ou un arc encore plus petit, la ligne AG eſt une ligne ſenſi-

blement & équivalemment droite ; & alors les deux triangles GHA & *nm*A sont deux triangles semblables, qui donnent cette proportion : GH . *nm* : : GA . *n*A ; & ainsi du reste. C. Q. F. D.

712. REMARQUE. Cette derniere proportion n'est pas parfaitement exacte dans toute la rigueur géométrique : parce que l'arc d'une minute excede réellement son sinus d'une quantité infiniment petite ; & que cet excès de l'arc d'une minute sur son sinus, est proportionnellement un peu plus grand que l'excès de l'arc de 30 secondes sur son sinus qui se rapproche plus de l'arc. Mais le défaut de parfaite exactitude dans cette proportion n'étant que d'une quantité infiniment petite & inassignable en parties du rayon, on peut la négliger sans aucune erreur sensible (238). On peut par conséquent regarder cette proportion, comme parfaitement exacte dans la pratique.

J'ai dit que le défaut de parfaite exactitude dans cette proportion, n'est qu'une quantité infiniment petite & inassignable en parties du rayon. La preuve en est, que le rayon étant supposé de 10000000 parties, le sinus d'une minute, pris deux fois, est en nombres ronds, de 5818 parties du rayon, aussi bien que le sinus de deux minutes : que le sinus de deux minutes, pris deux fois, est en nombres ronds, de 11636 parties du rayon, aussi bien que le sinus de quatre minutes. Donc dans tous les sinus, depuis une minute jusqu'à 12 minutes le défaut de proportion n'est pas un dix-millionieme du rayon : puisque si cela étoit, le sinus d'une minute, pris deux fois, seroit plus grand au moins d'une unité, que le sinus de deux minutes ; & le sinus de deux minutes, pris deux fois, plus grand au moins d'une unité, que le sinus de quatre minutes.

Or si le défaut de parfaite exactitude dans cette proportion, défaut moindre qu'un dix-millionieme du rayon, est inassignable en parties du rayon ; dans

tous les arcs qui sont au-dessous de 12 minutes; combien plus inassignable en parties du rayon, ne sera-t-il pas dans les arcs moindres que l'arc d'une minute, dans les arcs des secondes & des tierces. On pourra donc toujours, dans ces arcs des secondes & des tierces, prendre l'arc pour le sinus & le sinus pour l'arc, sans aucune erreur assignable en parties du rayon.

THÉORÈME II.

713. *On peut mettre un même nombre de zeros à la fin de tous les sinus à la fois, sans changer leur rapport.*

DÉMONSTRATION. Mettre un même nombre de zeros à la fin de tous les sinus à la fois, c'est les multiplier tous par une même quantité: *par exemple*, mettre un zero à la fin de tous les sinus, *c'est les multiplier* tous par 10: y mettre deux zeros, c'est les multiplier tous par 100: y mettre trois zeros, c'est les multiplier tous par 1000; & ainsi du reste (42). Or, quand on multiplie deux ou plusieurs nombres par une même quantité quelconque, *on ne change point* leur rapport: les produits sont entre eux, comme étoient entre elles les racines, ou les nombres eux-mêmes, avant la multiplication. (164.)

Par exemple, dans les tables des sinus, le sinus total est de 10000000 parties; & le sinus de 30 degrés, est de 5000000 parties: l'un est double de l'autre. Ajoutons deux zeros à tous les sinus: ce qui est la même chose que si on les multiplioit tous par 100. Le sinus total sera de 1000000000 parties; & le sinus de 30 degrés, sera de 500000000 parties: l'un sera encore double de l'autre; & leur même rapport reste. On peut dire la même chose de tous les autres sinus. C. Q. F. D.

714. COROLLAIRE. Il résulte de ces deux théo-

rèmes, qu'*on aura les sinus des secondes, en supposant tous les sinus augmentés de deux zeros, & en divisant le sinus d'une minute en des parties correspondantes à des secondes.*

Par exemple, le sinus d'un angle ou d'un arc *d'une minute* étant de 290900 parties; la moitié de ce nombre sera le sinus d'un angle ou d'un arc d'une demi-minute, ou de 30 secondes (711); le quart de ce nombre sera le sinus d'un angle ou d'un arc de 15 secondes; la soixantieme partie de ce nombre sera le sinus d'un angle ou d'un arc d'*une seconde*; la cent-vingtieme partie de ce nombre sera le sinus d'un angle ou d'un arc d'une demi-seconde ou de 30 tierces; & ainsi du reste. C. Q. F. D.

## THÉORÊME III.

715. *Si on retranche un même nombre d'unités, à deux nombres inégaux; on diminue proportionnellement le moindre nombre, plus que le nombre plus grand.*

DÉMONSTRATION. Soient deux nombres inégaux 20 & 20000, qui sont entre eux comme 1 à 1000. Si on retranche 10 unités à chacun de ces deux nombres, les restes seront 10 & 19990: le premier aura perdu la moitié de sa valeur; tandis que le second n'aura perdu que la deux-millieme partie de la sienne. C. Q. F. D.

## THÉORÊME IV.

716. *Quand la différence de deux nombres est immensément grande, si on retranche un certain nombre d'unités au nombre plus grand, sans rien retrancher au nombre plus petit; le même rapport reste à très-peu près entre ces deux nombres.*

DÉMONSTRATION. Soient les deux nombres 2909;

qui est le sinus d'une minute ; & 29090000, qui est dix mille fois plus grand : le rapport de ces deux nombres est celui de 1 à 10000.

Si on retranche au nombre plus grand, 50 unités ; le reste sera 29089950. Or le rapport de 2909 à 29089950, rapport qu'on trouvera en divisant séparément ces deux nombres par un même nombre 2909, est le rapport de 1 à $9999 + \frac{2819}{2909}$, rapport égal, à infiniment peu près, à celui de 1 à 10000 : de sorte que ces deux rapports ne different que comme infiniment peu l'un de l'autre, & que l'on peut prendre l'un pour l'autre sans aucune erreur sensible. C. Q. F. D.

## PROBLÊME I.

717. *Construire une table des sinus des secondes.*

SOLUTION. I°. Dans des tables des sinus, ou le sinus total sera supposé de 10000000 parties, je prends le sinus de l'arc d'une minute : ce sinus est de 2909 parties, donc chacune est un dix-millionieme du rayon.

II°. Je suppose tous les sinus, tels qu'ils sont dans les tables qui terminent cet ouvrage, suivis de deux zeros placés à la fin de leur dernier chiffre : ces sinus, suivis de deux zeros, conserveront entre eux leur même rapport. (713.)

III°. Je prends le sinus d'une minute, augmenté de deux zeros ; & je divise ce sinus 290900 proportionnellement à son arc. La moitié de ce sinus, ou la moitié de 290900 me donne le sinus de l'arc de 30 secondes : le quart de 290900 me donne le sinus de l'arc de 15 secondes : la soixantieme partie de 290900 me donne le sinus de l'arc d'*une seconde* : la cent-vingtieme partie de 290900 me donne le sinus de l'arc de 30 tierces ; & ainsi du reste (714). Ainsi en divisant successivement 290900, par 2, par 4, par 60, par 120, j'aurai des quotiens qui exprimeront les sinus de

30

30 secondes, de 15 secondes, d'une seconde, de 30 tierces; & ainsi de suite. Ces sinus seront proportionnels aux sinus des tables augmentés ou suivis de deux zeros. (713.)

IV°. D'après ces principes évidens, a été construite la table suivante des sinus des secondes, depuis une seconde jusqu'à 60 secondes qui font une minute. Dans cette table, le sinus total est supposé de 1000000000 parties: en supposant tous les sinus des tables, suivis de deux zeros, leur sinus total sera aussi de 1000000000 parties. Dans ce problême & dans le suivant, l'on prend tous les chiffres de chaque sinus, même ceux qui suivent le point intercalaire; & on leur ajoute à tous, deux zeros à la fin.

## PROBLÊME.

718. *Résoudre un triangle, dont on connoisse un côté, un angle de quelques secondes, & un autre angle.* (fig. 102.)

SOLUTION. Ce problême sert principalement à résoudre des triangles parallactiques, dont nous parlons dans la partie astronomique de notre Physique, & à faire trouver la distance des différentes planetes à la terre. (*Phy*. 1221.)

Soit un triangle ACB, dont on connoisse l'angle A & l'angle B, avec le côté AC que je suppose de 1430 lieues communes de France. Que l'angle A soit droit; & l'angle B, de 10 secondes & 30 tierces: l'angle C, supplément à deux angles droits, sera de 89 degrés 59 minutes 49 secondes & demie (387). Pour trouver l'un des côtés inconnus, par exemple, le côté BC, on fera cette proportion: le sinus connu de l'angle B, est au côté opposé & connu AC; comme le sinus connu de l'angle A, est au côté opposé & inconnu CB. (702.)

I°. Pour avoir le sinus de l'angle B, il faut prendre

# TABLE DES SINUS DES SECONDES.

| Secondes. | Sinus. | Second. | Sinus. |
|---|---|---|---|
| 1 | 4848. | 36 | 174540. |
| 2 | 9697. | 37 | 179388. |
| 3 | 14545. | 38 | 184237. |
| 4 | 19393. | 39 | 189085. |
| 5. | 24242. | 40 | 193933. |
| 6 | 29090. | 41 | 198782. |
| 7 | 33938. | 42 | 203630. |
| 8 | 38787. | 43 | 208478. |
| 9 | 43635. | 44 | 213327. |
| 10 | 48483. | 45 | 218175. |
| 11 | 53332. | 46 | 223023. |
| 12 | 58180. | 47 | 227872. |
| 13 | 63028. | 48 | 232720. |
| 14 | 67877. | 49 | 237568. |
| 15 | 72725. | 50 | 242417. |
| 16 | 77573. | 51 | 247265. |
| 17 | 82422. | 52 | 252113. |
| 18 | 87270. | 53 | 256962. |
| 19 | 92118. | 54 | 261810. |
| 20 | 96967. | 55 | 266658. |
| 21 | 101815. | 56 | 271507. |
| 22 | 106663. | 57 | 276355. |
| 23 | 111512. | 58 | 281203. |
| 24 | 116360. | 59 | 286052. |
| 25 | 121208. | 60 | 290900. |
| 26 | 126057. | *Sinus de 2 minutes,* | 581800. |
| 27 | 130905. | *Sinus de 85 degrés,* | 996194700. |
| 28 | 135753. | *Sinus total,* | 1000000000. |
| 29 | 140602. | *Sinus de 30 tierces,* | 2424. |
| 30 | 145450. | | |
| 31 | 150298. | | |
| 32 | 155147. | | |
| 33 | 159995. | | |
| 34 | 164843. | | |
| 35 | 169692. | | |

dans la table précédente le sinus de 10 secondes, plus la moitié du sinus d'une seconde : ces deux sommes 48483 + 2424, réunies en une même somme, seront le sinus de l'angle B, sinus égal à 50907 parties du rayon.

II°. Le sinus de l'angle droit A, est de 1000000000 parties, selon la table précédente. Ainsi, ayant le sinus des deux angles B & A, on fera en chiffres la proportion que nous avons annoncée : 50907 . 1430 :: 1000000000 . *x*.

En divisant le produit 1430000000000 des deux moyens, par le premier extrême, on aura un quotient 28090439, plus une fraction qu'on néglige, lequel exprimera la grandeur du côté CB, ou le nombre de lieues communes qu'il contient. Telle est la méthode par laquelle on peut trouver la distance d'un astre au centre de la terre, par exemple, du soleil, quand on connoît l'angle B qui est l'angle de sa parallaxe horisontale. (*Phy.* 1216 & 1221.)

III°. Pour trouver l'autre côté BA, il faut faire cette proportion entre les sinus & les côtés ; S — B . AC :: S — C . AB. Or pour avoir le sinus C, il faut prendre dans les tables, le sinus de 89 degrés 59 minutes ; & mettre deux zeros à la fin de tous les chiffres de ce sinus : on aura pour ce sinus, 999999900 parties. Il manque à ce sinus, pour être le sinus exact de 89 degrés 59 minutes 49 secondes & demi, environ 50 unités. Mais on peut se dispenser d'ajouter à ce sinus & à tout autre sinus semblable, ce petit nombre d'unités : parce que ce petit nombre d'unités, qui est toujours au-dessous de 100, ne répondant qu'aux deux derniers chiffres, ne change que d'une quantité infiniment petite le rapport du sinus 50907 avec le sinus 999999900, auquel on le compare ici (716). On peut donc prendre ce sinus 999999900 pour le sinus exact de l'angle en question C.

Ayant donc les sinus des deux angles B & C, on fera en chiffres la proportion que nous avons annoncée : 50907 . 1430 :: 999999900 . $x$. En divisant le produit des deux moyens par le premier extrême, on aura un quotient qui exprimera la grandeur du côté A C, qui est la distance de l'astre B au point A de la terre. On voit par-là, comment il faudroit opérer, si l'angle A, au lieu d'être droit, comme nous l'avons supposé, étoit aigu ou obtus.

719. REMARQUE. Dans la résolution d'un tel triangle, on seroit assuré de trouver les côtés CB & AB dans la plus grande précision ; si les angles & le côté donnés étoient parfaitement exacts. Mais comme on ne peut jamais être assuré d'avoir les angles des minutes & des secondes avec une précision entiere & parfaite, non plus que le côté AC ; il est inutile de chercher à mettre plus de précision dans des calculs qui ne peuvent donner que des à peu près, suffisans dans la théorie & dans la pratique.

## PARAGRAPHE QUATRIEME.

### *TANGENTES ET SÉCANTES.*

720. DÉFINITION. I. ON nomme *tangente d'un arc* ou d'un angle, une ligne AN, perpendiculaire au rayon BA qui passe par une extrêmité de l'arc ; laquelle ligne AN est terminée par la rencontre d'un autre rayon prolongé BN, qui passe par l'autre extrêmité $n$ de l'arc. (*fig.* 104.)

Ainsi la ligne NA est la tangente de l'angle AB$n$, & de l'arc A$n$. De même la ligne MA est la tangente de l'angle AB$m$, & de l'arc A$m$.

721. DÉFINITION II. On nomme *sécante d'un arc*, le rayon prolongé jusqu'à la rencontre de la tangente.

Ainsi BN est la sécante de l'arc A*n*, & de l'angle ABN. De même, BM est la sécante de l'arc A*m*, & de l'angle ABM.

### THÉORÊME.

722. *La tangente est au sinus total, comme le sinus de son angle est au sinus de l'angle de complément.* (fig. 104.)

DÉMONSTRATION. Soit un triangle quelconque NBA, formé par le rayon AB, par la sécante BN, & par la tangente NA. Ce triangle est rectangle en A; & son sinus est *na*.

I°. On a donc deux triangles semblables, savoir ANB & *an*B: puisque l'angle ABN est commun; & que les angles NAB & *na*B, formés l'un par la tangente NA & l'autre par le sinus *na*, l'une & l'autre perpendiculaires au rayon BA, sont droits. On a donc cette proportion : NA . AB : : *na* . *a*B.

Or *a*B est égal au co-sinus *nb*, qui est le sinus de l'angle de complément NBD (637) : donc on a aussi cette proportion; NA . AB : : *na* . *nb*.

Mais cette derniere proportion est celle qu'exprime le théorême : donc la tangente inconnue, est au sinus total connu; comme le sinus connu de l'angle ABN qui l'intercepte, est au sinus connu de l'angle NB*b* du complément.

II°. Il est évident que la même démonstration auroit lieu pour le triangle ABM, dont MA est la tangente. Car les triangles MBA & *m*B*d*, sont semblables : puisque l'angle MBA est commun; & que les angles MAB & *md*B, formés l'un par la tangente MA & l'autre par le sinus *md*, sont droits. C. Q. F. D.

## PROBLÊME I.

723. *Étant donné un angle quelconque, trouver sa tangente.*

SOLUTION. Faites cette analogie, qui est celle du théorême précédent : la tangente inconnue est au sinus total connu ; comme le sinus connu de l'angle donné, est au sinus connu de l'angle de complément ; & les trois termes connus vous donneront le quatrieme inconnu, qui sera la tangente cherchée.

I°. Par exemple, pour *trouver la tangente d'un angle* ou d'un arc de 10 degrés & 25 minutes ; nommez la tangente inconnue $x$ : prenez le sinus total 100000 dans les tables ordinaires : prenez aussi le *sinus 18081* de l'angle donné ; & le sinus 98352 de *l'angle de complément*, qui est de 79 degrés 35 minutes. *Vous* aurez la proportion suivante : $x$ . 100000 : : 18081 . 98352.

Divisez le produit 1808100000 des deux moyens, par le dernier extrême : le quotient 18384 exprimera la tangente de l'angle de 10 degrés 25 *minutes*. On néglige ici les deux chiffres qui suivent le point intercalaire.

II°. Si vous renversez la derniere raison de cette proportion, vous aurez une autre proportion, qui vous donnera la *tangente de l'angle de complément*, savoir : $x$ . 100000 : : 98352 . 18081.

Divisez le produit 9835200000 des deux moyens, par le dernier extrême : le quotient 543966 exprimera la tangente de l'angle de 79 degrés 35 minutes, en parties égales à celles du rayon. (646.)

## PROBLÊME II.

724. *Étant donnée ou trouvée la tangente d'un angle, trouver la sécante de ce même angle.* (fig. 104.)

SOLUTION. Dans les triangles ABN ou ABM, la ſécante BN ou BM eſt l'hypothénuſe : puiſque ces triangles ſont rectangles en A. Donc le quarré de la ſécante quelconque BN, eſt égal aux deux quarrés, de la tangente NA & du rayon BA (517). Donc ſi vous ajoutez le quarré de la tangente au quarré du rayon, vous aurez le quarré de la ſécante : extrayez donc la racine quarrée de cette ſomme (129) ; & cette racine quarrée ſera la ſécante elle-même.

725. REMARQUE. La ſécante ſert entre autres choſes, à déterminer la courbure du niveau réel au-deſſous du niveau apparent, dont nous avons parlé ailleurs (434). La ſécante d'un arc très-petit n'excede preſque point le rayon : mais à meſure que l'arc devient grand, la ſécante augmente conſidérablement. La ſécante d'un angle de 60 degrés eſt le double du rayon ; & la ſécante devient infinie, quand elle atteint l'angle droit, où elle devient parallele à la tangente.

## ARTICLE SECOND.

### *TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE.*

726. OBSERVATION. LA *Trigonométrie ſphérique* eſt une ſcience qui apprend à réſoudre par le calcul, des triangles formés ſur la ſurface d'une ſphere, ou des triangles dont les côtés ſont des arcs de grand cercle. Les petits cercles de la ſphere n'entrent pas dans les calculs de la trigonométrie : ſoit parce que leurs rayons n'ont pas une même grandeur, comme les rayons des grands cercles ; ſoit parce que leurs plans ne ſont pas aſſujettis à couper un même axe, ni à paſſer par un même point central, comme le plan des grands cercles. Nous nous bornerons à donner ſur cet objet, les

notions les plus ſimples & les plus néceſſaires pour la géographie & pour l'aſtronomie, & à montrer comment la trigonométrie rectiligne s'applique aux triangles dont un côté eſt un arc de grand cercle. Mais il faudra ſe rappeller ici ce que nous avons dit ailleurs ſur la formation & ſur les propriétés de la ſphere (554 & 557) : ce qui forme comme la partie préliminaire de cet article & de ſes dépendances.

I°. On peut conſidérer principalement dans une ſphere trois ſortes de triangles ; des triangles rectilignes, formés par deux rayons & une corde ; des triangles mixtilignes, formés par deux rayons & un arc de grand cercle appuyé ſur ces deux rayons ; des triangles ſphériques, formés par la rencontre de trois grands cercles, ou par trois arcs de grands cercles.

Dans un *triangle rectiligne*, pris dans la ſphere ou hors de la ſphere, les angles & les côtés ont toujours les mêmes propriétés que nous avons développées dans la longimétrie, dans la planimétrie, dans la trigonométrie rectiligne. Chaque angle rectiligne a pour meſure l'ouverture rectiligne interceptée entre les deux lignes droites qui le forment. La théorie de ces triangles n'a rien de commun avec la trigonométrie ſphérique.

Dans un *triangle mixtiligne*, formé par la rencontre de deux rayons & d'un arc de grand cercle appuyé ſur ces deux rayons, chaque angle mixtiligne a pour meſure l'ouverture interceptée entre l'arc & le rayon.

Dans un *triangle ſphérique*, formé par trois arcs de grand cercle, par exemple, du méridien, de l'équateur, & d'un grand cercle qui coupe obliquement l'équateur & le méridien, chaque *angle ſphérique* a pour meſure l'ouverture interceptée entre les deux arcs qui le forment.

II°. Pour *trouver le diametre inconnu d'une ſphere*, ſur laquelle vous voulez tracer différens cercles, placez

cette ſphere entre deux plans ZO, YQ, paralleles entre eux & contigus à la ſphere : la diſtance des deux plans ſera le diametre de cette ſphere ; la moitié de cette diſtance en ſera le rayon AC. (*fig.* 86.)

III°. Pour *tracer un grand cercle ſur une ſphere dont on connoît le rayon :* avec un compas ordinaire, décrivez ſur un plan, un cercle APBRA, qui ait pour rayon le rayon de la ſphère donné : ce ſera un cercle égal à un grand cercle de la ſphere. Coupez ce cercle en quatre parties égales par deux diametres AB & PR, perpendiculaires l'un à l'autre ; & de l'extrêmité A d'un diametre, prenez une ouverture de compas qui aboutiſſe à une extrêmité P de l'autre diametre : cette ouverture AP ſera la corde d'un arc de 90 degrés d'un grand cercle de la ſphere.

Enſuite, avec un compas à jambes recourbées en dedans (qu'on nomme *compas ſphérique*), prenez ſur le cercle décrit ſur un plan, une ouverture égale à la corde AP de 90 degrés ; & poſant une pointe du compas ſphérique ſur un point P, donné ou pris à volonté dans la ſphere, décrivez avez l'autre pointe recourbée une circonférence ABA ; ce ſera un grand cercle de la ſphere. Le point fixe P, d'où ce grand cercle eſt décrit, ſera un de ſes poles. (fig. 86.)

IV°. Pour *tracer un grand cercle perpendiculaire à un autre grand cercle ſur une ſphere ;* avec le même compas & de la même ouverture AP que la précédente, décrivez, d'un point B, donné ou pris à volonté ſur le cercle que vous venez de décrire, un nouveau cercle : ce nouveau cercle PRP ſera par-tout éloigné de 90 degrés du point d'où il eſt décrit ; & ſera perpendiculaire au premier cercle ABA.

On conçoit par-là comment on peut *décrire tant de grand cercles qu'on voudra ſur une ſphere*, perpendiculaires ou obliques les uns aux autres.

727. DÉFINITION I. On nomme *axe d'un grand cercle*, une perpendiculaire qui enfile son centre de part & d'autre ; & qui de part & d'autre est égale au rayon de ce cercle. (*fig.* 110.)

I°. La ligne droite DCF est l'axe du cercle ABA : la ligne droite ACB est l'axe du cercle DFD : la ligne droite PCR est l'axe du cercle MNM. Les extrêmités de l'axe sont les *poles du cercle*.

II°. L'axe DCF d'un grand cercle ABA, est aussi l'axe de tous les petits cercles paralleles MRM : puisque cet axe DCF passe par les centres du grand cercle ABA & des petits cercles paralleles MRM pris dans la même sphere ; & que cet axe étant perpendiculaire au plan du grand cercle, est aussi nécessairement perpendiculaire aux petits cercles paralleles.

III°. Le *plan d'un cercle* est l'aire ou la surface plane & sans profondeur de ce cercle, interceptée & terminée par la circonférence. Toute ligne droite qui se confond avec plus de deux points de cette surface circulaire, est dans le plan de ce cercle.

728. DÉFINITION II. On nomme *angle sphérique*, l'ouverture interceptée entre deux arcs de grand cercle qui s'entre-coupent dans une même sphere. Cet angle est ou droit, ou aigu, ou obtus. (*fig.* 110.)

I°. *Un angle sphérique* A*v*D *est droit* ; quand ses deux côtés prolongés l'un & l'autre jusqu'à 90 degrés au-delà de leur point d'intersection *v*, embrassent précisément un arc AMD de grand cercle, de 90 degrés.

II°. *Un angle sphérique* A*m*M *est aigu* ; quand ses deux côtés prolongés l'un & l'autre jusqu'à 90 degrés au-delà de leur point d'intersection *m*, embrassent un arc AM de grand cercle, qui a moins de 90 degrés.

III° *Un angle sphérique* M*m*B *est obtus* ; quand ses deux côtés prolongés l'un & l'autre jusqu'à 90 degrés au-delà de leur point d'intersection *m*, embrassent

un arc MDB de grand cercle, qui a plus de 90 degrés.

En général, la *grandeur d'un angle sphérique*, intercepté entre deux grands cercles d'une même sphere, est *le plus court chemin circulaire* qu'on puisse parcourir pour aller de l'un à l'autre, en partant des deux points correspondans de leurs circonférences qui sont les plus éloignés l'un de l'autre; c'est-à-dire, en partant des deux points correspondans des deux arcs indéfiniment prolongés, qui sont à 90 degrés de leur sommet ou de leur commune intersection.

Ainsi, la grandeur de l'arc sphérique A*n*M, est l'arc AM; en supposant que les points A & M soient à 90 degrés de la commune intersection *n* des deux cercles ABA & MNM.

### THÉORÊME I.

729. *Si deux grands cercles d'une même sphere sont perpendiculaires l'un à l'autre; l'axe de l'un est le diametre de l'autre.* (fig. 110.)

DÉMONSTRATION. Soient ABA & DFD deux grands cercles, dont les plans (523) soient perpendiculaires l'un à l'autre. Selon la définition du diametre & de l'axe, il est clair que DCF est diametre du cercle DFD, & axe du cercle ABA; & que ACB est diametre du cercle ABA, & axe du cercle DFD. On peut dire & démontrer la même chose, sur deux grands cercles quelconques, dont l'un sera perpendiculaire à l'autre. C. Q. F. D.

### THÉORÊME II.

730. *Quand l'axe d'un grand cercle est un diametre d'un autre grand cercle, ces deux cercles sont perpendiculaires l'un à l'autre; & leurs poles sont éloignés l'un de l'autre de 90 degrés.* (fig. 110.)

DÉMONSTRATION. Soient les deux plans circulaires ABA & DFD; en telle sorte que le plan DFD renferme l'axe DCF du cercle ABA. Dans ce cas, l'axe DCF d'un cercle ABA, est un diametre de l'autre cercle DFD; & réciproquement. Or il est clair que ces deux diametres ACB & DCF, perpendiculaires l'un à l'autre, représentent la position de leurs plans: donc les diametres & les axes ACB & DCF étant perpendiculaires l'un à l'autre; les plans ABA & DFD le sont aussi. C. Q. F. D.

## THÉORÊME III.

731. *Quand les plans de deux grands cercles sont inclinés l'un à l'autre, leur inclinaison se mesure par l'arc d'un grand cercle, pris à 90 degrés de la commune interjection de leurs circonférences.* (fig. 110.)

DÉMONSTRATION. Soient les deux grands cercles ABA & MVM, dont les plans sont inclinés l'un vers l'autre, & dont les circonférences s'entre-coupent en *m* & en *n*. On conçoit d'abord aisément que l'angle sphérique A*n* M, par exemple, est égal à l'angle rectiligne que formeroient au point d'intersection *n* deux tangentes aux arcs *n* A & *n* M; & que pour évaluer la grandeur de l'arc intercepté entre ces deux tangentes, en degrés égaux à ceux de l'un des deux cercles égaux, il faudra que cet arc soit décrit du point d'intersection *n* ou *m*, avec un rayon égal au rayon CA de la sphere.

I°. Il est évident que les côtés de l'angle sphérique A*m* M vont en s'écartant de plus en plus jusqu'à 90 degrés en A & en M; & qu'au-delà de 90 degrés, les côtés du même angle sphérique A*m* M vont en se rapprochant de plus en plus jusqu'en *n*.

II°. Il est encore évident que si le plan circulaire DFD fait une révolution sur son diametre DCF; la

demi-circonférence D$xv$F de ce plan, coupera d'abord inégalement les circonférences ABA & MNM : car la section $mr$ sera plus grande que la section $mv$.

Mais quand par la révolution continuée, ce même plan roulant sur son diametre DCF sera placé en ADBFA, à 90 degrés des intersections $m$ & $n$; alors ce plan circulaire passera par les poles PR & DF des deux cercles ABA & MNM, & sera perpendiculaire à l'un & l'autre cercle : puisque l'axe de ce cercle ADBFA sera un diametre du cercle ABA & du cercle MNM. (730.)

Par conséquent, l'arc MA du grand cercle ADBFA, perpendiculaire à la fois aux deux cercles ABA & MNM, mesurera la vraie ouverture de l'angle sphérique M$m$A : ce qui n'auroit point lieu, si l'arc AM étoit perpendiculaire à l'un des cercles & oblique à l'autre; ou oblique à l'un, & plus oblique à l'autre. (728). C. Q. F. D.

## *DIVERS COROLLAIRES.*

732. COROLLAIRE I. *La mesure de l'arc intercepté entre deux cercles, est donc un arc d'un nouveau cercle perpendiculaire à la fois aux deux premiers cercles.* (fig. 110.)

EXPLICATION. I°. Quand deux cercles ABA & MRM, égaux ou inégaux, sont paralleles; la mesure de l'arc qui les sépare, est l'arc quelconque $xv$ qu'ils interceptent d'un grand cercle DFD qui passe par leurs poles communs : puisque ce cercle, passant par les poles D & F, qui sont communs aux deux cercles paralleles ABA & MRM, est perpendiculaire à l'un & à l'autre cercle parallele.

II°. Quand deux grands cercles sont obliques l'un à l'autre; la mesure de l'arc qui les sépare, est l'arc qu'ils interceptent d'un grand cercle qui passe par leurs quatre poles : puisque cet arc, intercepté entre leurs plans &

perpendiculaire à l'un & à l'autre plan, mesure la vraie distance & la vraie ouverture de ces plans. Cet arc est toujours à 90 degrés des deux intersections.

III°. Dans la sphere céleste & terrestre, tous les méridiens sont *perpendiculaires à l'équateur* : puisque l'axe de tout méridien est un diametre de l'équateur. Tous les méridiens sont *obliques à l'écliptique*, à l'exception des deux méridiens qui sont à 90 degrés des points d'intersection de l'écliptique & de l'équateur : puisque l'axe de ces deux seuls méridiens est un diametre de l'écliptique confondue en ces deux seuls points avec l'équateur. Tous les méridiens, en coupant perpendiculairement l'équateur, coupent aussi perpendiculairement tous les *cercles paralleles à l'équateur* : puisque ces paralleles à l'équateur ont le même axe que l'équateur lui-même.

733. COROLLAIRE II. *L'espace intercepté entre deux cercles paralleles* ABA *&* MRM, *est une zone, dont la largeur est l'arc d'un grand cercle perpendiculaire aux deux cercles paralleles* : puisque cet arc MA ou RB mesure perpendiculairement le plus court chemin circulaire qu'on puisse parcourir en allant du cercle MRM au cercle parallele ABA.

734. COROLLAIRE III. *La surface d'une zone est le produit de la circonférence d'un grand cercle, par la partie de l'axe interceptée entre les deux cercles paralleles* : puisque cette zone est égale en surface, à la surface d'une partie correspondante du cylindre circonscrit à la sphere. (576.)

## *HYPOTHESE OU APPLICATION.*

735. *Si la sphere* ADBFA *est le globe terrestre ou le globe céleste* (fig. 110.) :

I°. Le point C sera le *centre* de la terre & le *centre sensible* de l'univers. Il est clair que de ce centre, on

peut mener par la pensée tant de lignes droites & indéfinies qu'on voudra, vers la surface de la terre ou du firmament.

II°. Si le globe terrestre ou céleste tourne sur lui-même autour de la ligne DCF ; cette ligne sera l'*axe* de la terre & du monde ; & les points D & F en seront les *poles*. Le cercle ABA sera l'*équateur* : le cercle MRM sera un *cercle parallele* à l'équateur : l'espace MRBA sera une *zone* : le cercle MNM sera un *cercle incliné à l'équateur* : la ligne droite $m$ C $n$ sera la *commune intersection* de ces deux cercles ABA & MNM, & les divisera l'un & l'autre en deux portions égales : les deux points $m$ & $n$, où les circonférences de ces deux cercles s'entre-coupent, seront ce qu'on appelle leurs *nœuds*. L'arc MA, dont les deux extrêmités sont de part & d'autre à 90 degrés des nœuds $m$ & $n$, est la mesure de l'inclinaison de ces deux cercles.

III°. Deux rayons CA & CM, menés du centre aux deux extrêmités de l'arc MA, formeront un triangle mixtiligne ACM, dont MS sera le *sinus droit*, & dont SA sera le *sinus verse*. On pourra donc appliquer à ce triangle ACMA, toute la théorie des sinus, des tangentes, des sécantes, que nous avons donnée dans la trigonométrie rectiligne.

## PROBLÊME I.

736. *Mesurer dans le ciel un arc sphérique, intercepté entre deux cercles paralleles.* (fig. 110.)

SOLUTION. Soient dans le ciel, deux cercles paralleles ABA & MRM : il s'agit de mesurer l'arc MA ou RB d'un cercle ADBFA qui leur est perpendiculaire, ou dont le plan passe par leurs poles communs D & F. Ces deux cercles étant paralleles ; il est évident que l'arc intercepté entre leurs circonférences, est par-tout le même & d'égale grandeur. Ainsi l'arc perpendiculaire que l'on trouvera entre deux points

quelconques, sera l'arc perpendiculaire qui est intercepté entre tous les autres points.

I°. Pour mesurer cet arc, on aura un grand quart de cercle astronomique (421); & on fixera ce quart de cercle, en telle sorte que son plan soit perpendiculaire au plan des deux cercles paralleles, ou soit dirigé vers leurs deux poles. Par exemple,

Si on veut mesurer l'arc intercepté entre l'équateur céleste ABA & un cercle parallele MRN; après avoir placé le plan du quart de cercle dans le plan du méridien DAFBD, on dirigera la regle mobile vers un point A de l'équateur, & ensuite la même regle mobile vers le point M du cercle parallele; & on comptera exactement sur le quart de cercle, le nombre de degrés, de minutes & de secondes : ce *qui donnera la* mesure de l'angle ACM, intercepté *entre ces deux* cercles.

Car le rayon du globe terrestre n'étant qu'une quantité infiniment petite en comparaison de la distance du firmament (*Phy.* 1354); le quart de cercle, placé sur la surface de la terre est comme *s'il* étoit placé au centre du firmament. Or dans ce cas, *la regle* mobile & le rayon visuel qu'elle dirige, se confondroient avec les rayons CA & CM; & l'angle ACM seroit mesuré sur le quart de cercle (*fig.* 3.), par le nombre de degrés, de minutes & de secondes, qu'interceptent les deux directions de la regle mobile.

II°. Il est important de remarquer ici, que *dans l'astronomie les sinus viennent souvent se mettre à la place de leurs arcs.* Pour le faire comprendre, je suppose qu'une planete A décrive une orbite ADFHA, autour d'un centre C; & que je sois placé en O, pour observer son mouvement. (*fig.* 121.)

Cette planete A, en partant de la ligne ACO des centres, décrira un arc AB que je ne puis mesurer en lui-même : elle ne me paroîtra en B, éloignée de la ligne

ligne des centres, que de la quantité BS, qui eſt le ſinus de l'arc AB décrit par la planete.

Quand la planete aura parcouru l'arc ABD de 90 degrés, elle ſera dans ſon plus grand éloignement de la ligne CO des centres; & j'eſtimerai cet éloignement, par la ligne CD, qui eſt le ſinus de l'angle droit ACD. Le point D ſera ſa plus grande diſtance de la ligne des centres, & le commencement de ſon rebrouſſement. Après quoi, elle ira en E, où ſa diſtance apparente de la ligne des centres, ſera le ſinus ET: elle ira enſuite en F, où ſa diſtance de la ligne des centres, ſera zero.

La planete paſſera enſuite en G, en H, en K; & j'eſtimerai de même ſa diſtance de la ligne des centres, par les ſinus GT, HC, KS; ſinus qui ſeront en ſens contraire des précédens: de ſorte que ſi les premiers ſinus ſont poſitifs, les derniers ſeront négatifs. Si la planete en D eſt du côté de l'orient, par rapport à la ligne ACO des centres en H; la même planete ſera du côté de l'occident, relativement à la même ligne des centres.

## PROBLÊME II.

737. *Meſurer dans le ciel, un arc ſphérique, intercepté entre deux grands cercles qui s'entre-coupent.* (fig. 110.)

SOLUTION. Que l'arc à meſurer, ſoit l'arc intercepté entre les deux cercles ABA & MNM, dont les poles ſont DF & PR. Placez le quart de cercle, dont nous venons de parler, en telle ſorte que ſon plan indéfiniment prolongé atteigne les quatre poles DF & PR des deux cercles dont vous voulez meſurer l'inclinaiſon.

Il eſt clair qu'un rayon indéfini, qui feroit une révolution ſur le plan de ce quart de cercle, décri-

roit un cercle ADBFA, perpendiculaire aux deux cercles dont on veut mesurer l'arc : puisque son plan passeroit par les poles de ces deux cercles (730). Par conséquent, si d'un point C, pris sur la surface de la terre, on dirige une regle & un rayon visuel vers A, & la même regle & un autre rayon visuel vers M; l'angle MCA, mesuré sur le quart de cercle, donnera le nombre de degrés, de minutes & de secondes, de l'arc MA; comme dans le problême précédent. (*fig.* 5.)

On comprend aisément qu'on peut mesurer ces arcs célestes, en plus d'une autre maniere. Nous prétendons ici uniquement faire voir que cette mesure est possible, en montrant une maniere de l'effectuer.

# PRINCIPES
## *DU CALCUL*
## ET DE LA GÉOMÉTRIE,
OU
## *ÉLÉMENS DE MATHÉMATIQUES.*
# GÉOMÉTRIE.

## CINQUIEME TRAITÉ.

### *Introduction aux Sections coniques.*

La théorie des Sections coniques, théorie créée par Platon ou par son École, étendue & perfectionnée par Archimede & par Apollonius de Perge, est une des brillantes parties des Mathématiques, celle par où elles commencent à sortir de la sphere des simples élémens. Nous ne prétendons donner sur cet objet, que quelques notions fondamentales; celles qui sont absolument nécessaires pour l'intelligence des grands phénomenes de la Physique, dont tout le monde aime à être instruit. Les personnes qui voudront porter plus loin leurs connoissances en ce genre, pourront se donner de plus grandes lumieres sur cette partie des

Mathématiques, dans une foule d'ouvrages où elle est traitée dans toute son étendue.

## *IDÉE GÉNÉRALE DES SECTIONS CONIQUES.*

738. OBSERVATION. On nomme *Sections coniques*, certaines figures planes, qui sont terminées par des lignes courbes; & qui ressemblent aux sections que feroit un *plan tranchant* (522), en coupant un cône, droit ou incliné, selon différentes directions. Par exemple, (*fig.* 107):

I°. Si le plan, en coupant le cône droit ou incliné BAD, commence la section par le sommet A; cette section, soit qu'elle passe par le centre C de la base toujours circulaire du cône, soit qu'elle passe à côté de ce centre C, sera *un triangle* plus ou moins *ouvert* BAD.

II°. Si le plan, en coupant le cône droit ou incliné, forme une section parallele à la base circulaire du cône; la section sera *un cercle* plus ou moins grand *bdb*, VXV, *vxv*. (fig. 107 & 112.)

Dans un cercle ADXDA, envisagé comme section conique, ou considéré relativement aux sections coniques (*fig.* 111); on nomme *axe*, un diametre quelconque AX: on nomme *sommet*, une extrêmité quelconque A de l'axe: on nomme *ordonnées*, des perpendiculaires à l'axe, telles que MB, MK, MG, MH: on nomme *abscisses*, les sections AB, AK, AG, AH, de l'axe, prises depuis le sommet A de l'axe jusqu'aux ordonnées correspondantes. Le mot d'abscisses, dans toutes les sections coniques, est latin dans son origine: *Partes axis ab ordinatâ quâvis abscissa.*

Dans le cercle, & dans les trois sections coniques dont nous allons parler, on désigne ordinairement les ordonnées des courbes, par *y*; & les abscisses, par *x*; c'est leur expression algébrique: ensorte que dans le discours familier, on dit les *x* & les *y* d'une courbe;

pour désigner ses abscisses & ses ordonnées quelconques, grandes ou petites.

Ces deux sections coniques, la section triangulaire & la section circulaire, ou le *triangle* & le *cercle*, dont on connoît les propriétés par la Géométrie élémentaire, ne sont point mises par les Géometres, au rang des sections coniques proprement dites; & c'est aux trois sections suivantes, qu'est uniquement & exclusivement affecté ce nom. Les propriétés connues de la section triangulaire & de la section circulaire, sont uniquement destinées dans cette théorie, à faire connoître les propriétés des trois *sections coniques proprement dites*; ou de la Parabole, de l'Ellipse, de l'Hyperbole, dont nous allons voir la formation.

*Sections coniques dans le cône.*

III°. Si le plan, en coupant le cône droit ou incliné, commence la section hors du sommet, en un point quelconque S; & si cette section est *parallele à l'un des côtés* AB du cône, ou à un plan posé sur ce côté AB; cette section MSM est *une parabole*: & si le cône BAD est supposé prolongé & augmenté à l'infini, en conservant la même ouverture BAD; cette section parabolique MSM, prolongée à l'infini, ne sortira jamais du cône. (*fig.* 107.)

Dans cette courbe MSM, il n'y a qu'un seul axe SN, lequel peut être prolongé à l'infini, divisant toujours la courbe en deux parties égales. Les ordonnées à cette courbe, perpendiculaires à l'axe SN, sont *nm*, NM. Les abscisses de cette courbe, se prennent sur l'axe, depuis le sommet S jusqu'à la rencontre de l'ordonnée correspondante: ces abscisses sont S*n*, SN.

IV°. Si le plan, en coupant le cône droit ou incliné (*fig.* 112), commence la section hors du sommet, en un point quelconque E; & si la section, indéfiniment prolongée, sort du cône, sans en atteindre la base, &

sans être parallele à cette base; cette section sera *une ellipse* plus ou moins alongée indéfiniment EMRME. (*fig.* 112.)

Dans cette courbe RER, il y a un *grand axe* ENR, & un *petit axe* qui coupe perpendiculairement le grand axe par le milieu. Les ordonnées, perpendiculaires au grand axe, sont *mn*, MN. Les abscisses de cette courbe se prennent depuis un sommet E ou R, à l'extrêmité du grand axe, jusqu'à la rencontre de l'ordonnée correspondante: ces abscisses sont E*n*, EN.

V°. Si le plan, en coupant le cône droit ou incliné BAD (*fig.* 125), commence la section hors du sommet, en un point quelconqe H; & si la section PHI est ou parallele à l'axe AX du cône, ou *inclinée à cet* axe sans être parallele à aucun des côtés *AB & AD*; cette section IHP sera *une hyperbole:* & si le cône est infini; cette section, prolongée à l'infini, ne sortira jamais du cône. (*fig.* 125.)

Si au sommet A du cône BAD, on suppose placé un autre cône ZAV, qui ait le même axe XA *x* que le premier; le plan qui vient de former *la section HIPH*, indéfiniment prolongé, formera une autre section semblable *hiph*, qu'on appelle *hyperbole conjuguée*.

Dans une hyperbole quelconque IHP, il y a deux axes, placés l'un & l'autre hors de la courbe. On nomme *premier axe*, la ligne OH, qui joint les sommets des deux hyperboles opposées; & qui prolongée diviseroit les hyperboles en deux parties égales: c'est sur ce prolongement HK, que se prennent les abscisses & les ordonnées de l'hyperbole IHP. On nomme *second axe*, une droite AS, qui est perpendiculaire au grand axe OH; qui le coupe par le milieu & qui en est coupée aussi par le milieu: ce second axe AS peut être ou égal ou inégal au premier axe. Le centre d'une hyperbole IHP ou *ihp*, est en dehors en C.

Dans cette courbe IHP, les ordonnées PK sont des

perpendiculaires menées d'un point de la courbe sur le prolongement HK du premier axe OH ; & les *abscisses* HK se prennent depuis le sommet H de la courbe, jusqu'à la rencontre de l'ordonnée correspondante PK. Mais en faisant le rectangle d'une abscisse HK, on multiplie cette abscisse, par elle-même augmentée du premier axe : ainsi le rectangle de l'abscisse HK est HK × OK.

VI°. Nous ferons voir ailleurs, qu'un plan, en coupant un cône droit ou incliné, ne peut pas faire des sections différentes des cinq sections dont nous venons d'observer la formation. La *théorie de la parabole* est relative à la chûte des graves, lancés parallélement ou obliquement à l'horison (*Phy.* 381). La *théorie de l'ellipse* est nécessaire dans la dioptrique & dans la catoptrique, pour la construction de certains miroirs ardens ; dans l'acoustique, pour la direction du son ; dans l'astronomie, pour saisir & pour suivre les mouvemens des planetes & des cometes, qui toutes décrivent des ellipses autour de leur centre de mouvement (*Phy.* 1307). La *théorie de l'hyperbole* a ses usages dans la dioptrique, dans la catoptrique, dans quelques parties de l'astronomie : mais comme nous n'en faisons pas mention dans notre Physique ; nous nous bornerons à en donner une idée générale, sans en suivre & sans en développer les propriétés particulieres.

### *Sections coniques sur un plan.*

Après avoir pris une idée générale des trois sections coniques, en les considérant dans le cône ; il ne sera pas inutile d'en prendre encore une idée générale, en les considérant sur un plan. (*fig.* 115.)

VII°. Les *trois sections coniques*, la parabole, l'ellipse, l'hyperbole, sont des figures planes terminées par des lignes courbes *mm* SMM, qui s'infléchissent

ſelon différentes loix relativement à une ligne droite AGG, priſe hors de la courbe, & relativement à une autre ligne droite SPP, priſe dans la courbe.

Pour *déterminer la poſition d'un point*, & par-là même, la poſition d'une ſuite de points & d'une courbe entiere, ſur un plan; la maniere la plus commode & la plus uſitée chez les géometres, c'eſt de rapporter ce point & ſucceſſivement chaque autre point de la courbe, à deux lignes droites, différemment poſées ſur ce plan : ce qui ſe fait fort facilement, lorſque l'on connoît la diſtance de ce point à chacune de ces droites, & de quel côté il eſt placé à leur égard. Par exemple (*fig.* 105):

Si on dit qu'un point *s* eſt éloigné d'une ligne ZR, de la quantité *sr*, & d'une autre ligne SH, de la *quantité s*X; il ſera facile de déterminer la *poſition s de* ce point.

VIII°. Dans les trois ſections coniques, on fait d'abord principalement attention à ſix choſes, ſavoir (*fig.* 115):

A une ligne droite GAG, priſe hors de la courbe, & qu'on nomme la *directrice*.

A une autre ligne droite SX qui eſt perpendiculaire à la directrice, qui diviſe la courbe en deux parties égales, & qu'on nomme l'*axe* de la courbe.

A un point F, pris dans la courbe, & qu'on nomme le *foyer* de la courbe.

A des perpendiculaires MP, *m*P, menées d'un point de la courbe ſur la ligne SPX, & qu'on nomme les *ordonnées* ou les *y* de la courbe.

A une de ces ordonnées *p*F*p*, qui paſſe par le foyer de la courbe, & qu'on nomme le *parametre* de la courbe.

A des lignes SF, SP, priſes ſur l'axe ou ſur le prolongement de l'axe; & qu'on nomme les *abſciſſes* ou les *x* de la courbe.

IX°. Il y a certaines différences générales à observer dans les trois sections coniques. (*fig.* 115.)

Dans la parabole, le sommet S est *à égale distance* & de la directrice A & du foyer F. Dans l'ellipse, le sommet S est *plus loin* de la directrice A, que du foyer F. Dans l'hyperbole, le sommet S est *moins loin* de la directrice A, que du foyer F.

Si au sommet S de chacune des trois sections coniques, on éleve une *tangente* SB, qui soit égale à la distance SF du sommet au foyer de la courbe; & que du point A de la directrice, pris dans la direction de l'axe prolongé, on mene par l'extrêmité B de cette tangente, une droite indéfinie ABDD; l'angle SAB sera *de* 45 *degrés* pour la parabole; de *moins de* 45 *degrés*, pour l'ellipse; de *plus de* 45 *degrés*, pour l'hyperbole.

On démontre dans tout traité des sections coniques, & nous supposerons ici démontré, que dans la parabole, le quarré d'une ordonnée quelconque MP, est *égal* au rectangle de l'abscisse correspondante SP par le parametre $pFp$: que dans l'ellipse, le quarré d'une ordonnée quelconque MP, est *plus petit* que le rectangle de l'abscisse correspondante SP par le parametre $pFp$: que dans l'hyperbole, le quarré d'une ordonnée quelconque MP, est *plus grand* que le rectangle de l'abscisse correspondante SP par le parametre $pFp$: ou algébriquement (75), dans la parabole, $yy = px$; dans l'ellipse, $yy < px$; dans l'hyperbole, $yy > px$.

De tout cela résulte l'étymologie du nom propre & particulier de chacune des sections coniques, qui signifient *égalité*, *défaut*, *excès*. Parabole; de παραβολη, *similitudo*, *æqualitas*: ellipse, de ἐλλειπω, *deficio*: *figura ab æqualitate deficiens*: hyperbole; de ὑπὲρβολη; *figura excedens æqualitatem*.

X°. Si les courbes que nous examinons dans ce

traité, se formoient & s'infléchissoient au hasard & sans aucune regle fixe; la géométrie n'auroit point prise sur elles : parce qu'elle ne pourroit pas partir de certains rapports connus, pour s'élever à la connoissance des rapports qui restent à connoître. Mais si ces courbes se forment & s'infléchissent selon certaines loix fixes & persévéramment les mêmes pour chaque espece de courbe; la géométrie a prise sur elles : & par certains rapports donnés ou trouvés, elle peut saisir & suivre toutes les propriétés de la courbe, dans tous ses accroissemens & dans toutes ses inflexions possibles; & l'expression algébrique qui marque selon quelle loi chaque section conique se forme & s'infléchit, s'appelle l'*équation à la courbe*. Par exemple, si la parabole est une courbe telle que *les quarrés de ses ordonnées soient entre eux comme les produits des abscisses correspondantes par le parametre*; l'équation de cette courbe sera $yy = px$; & ainsi du reste.

Nous supposerons, dans tout ce traité, qu'on a toujours présentes à l'esprit, & la *propriété fondamentale du triangle rectangle*, savoir, que le quarré de l'hypothénuse est égal à la somme des deux quarrés faits sur les deux autres côtés (517); & la *propriété fondamentale du cercle*, savoir que le quarré d'une ordonnée quelconque MG (*fig.* 111), est égal au rectangle formé par les deux segmens AG & GX du diametre ou de l'axe AX, ou que $\overline{MG}^2 = AG \times GX$ (410); ou algébriquement, en nommant $a$ le demi-axe, & $2a$ l'axe entier, que $yy = 2ax - xx$. C'est l'équation au cercle; équation qui sert à faire trouver l'équation aux autres courbes.

Pour connoître la nature & les propriétés de la parabole & de l'ellipse; nous allons les considérer, d'abord sur un plan, ensuite dans le cône.

## PARAGRAPHE PREMIER.

### *LA PARABOLE, SUR UN PLAN.*

739. PROBLÊME. *CONSTRUIRE ou décrire une parabole, ſur un plan.* (fig. 105.)

SOLUTION. Soit une droite indéfinie ZDR, poſée ſur ce plan : ce ſera la *directrice* de la parabole MMS*mm* que nous allons décrire.

I°. Sur un point quelconque D de cette droite ou de cette directrice, élevez une perpendiculaire indéfinie DX, & ſur cette perpendiculaire prenez à volonté un point F : ce point ſera le *foyer de la parabole* à décrire.

II°. Diviſez la ligne FD en deux parties égales au point S : ce point ſera le *ſommet de la parabole* à décrire. La ligne SX indéfiniment prolongée, ſera l'*axe de la même parabole :* la ligne VST ſera une tangente à la parabole, la *tangente au ſommet.*

III°. Sur tant de points que vous voudrez, pris dans l'axe indéfini SX, menez des paralleles indéfinies à la directrice ZDR : ces paralleles BM, EM, HM, B*m*, E*m*, H*m*, perpendiculaires à l'axe, ſeront les *ordonnées à la parabole ;* & les parties SB, SE, SG, SH de l'axe, compriſes entre le ſommet & chaque ordonnée, ſeront les *abſciſſes de la parabole.*

IV°. Comme les ordonnées ſont encore indéfinies, il s'agit de déterminer la grandeur de chacune : la courbe qui paſſera par l'extrêmité déterminée M de chaque ordonnée, ſera la parabole qu'il falloit décrire.

Pour déterminer la longueur de chaque ordonnée ; du point où une ordonnée quelconque ME atteint ou coupe l'axe, prenez avec une ouverture de compas, la diſtance ED de l'ordonnée à la directrice ; & poſant une jambe du compas ſur le foyer F, coupez par l'autre

pointe l'ordonnée EM : le point M, où le compas coupera l'ordonnée EM, sera la longueur de cette ordonnée EM, auparavant indéfinie & maintenant déterminée.

Faites la même opération pour toutes les autres ordonnées MB, MG, MH; en telle sorte que chaque M soit toujours égal à la distance BD, GD, HD, de l'ordonnée quelconque à la directrice : vous aurez les extrêmités déterminées de toutes les ordonnées BM, GM, HM, B*m*, G*m*, H*m*.

V°. Faites passer une courbe par toutes les extrêmités SMM de ces ordonnées, extrêmités par-tout également distantes & de la directrice & du foyer : cette courbe SMM sera *une parabole*. Si vous faites passer de même une courbe par toutes les extrêmités S*mm* des mêmes ordonnées de l'autre côté de l'axe; cette courbe S*mm* sera aussi *une parabole*.

VI°. Une ligne droite, quadruple de DS=SF, est le *parametre de la parabole* : nous ferons voir que ce parametre est toujours égal à la double ordonnée *p*F*p*, qui passe par le foyer F. La propriété fondamentale de cette courbe, est que le quarré d'une ordonnée quelconque EM, soit toujours égal au rectangle de son abscisse ES, par le parametre 4DS ou 4SF; & que les quarrés des ordonnées soient entre eux comme les abscisses correspondantes.

VII°. Une ligne MN, ou *mn*, menée d'un point quelconque de la courbe parabolique, parallélement à l'axe SX, est un *diametre de la parabole*.

Nous ferons voir que la courbe que nous venons de décrire, est une vraie parabole : puisqu'elle a les *mêmes propriétés* que la parabole que nous avons déjà examinée & que nous examinerons encore dans le cercle. (741 & 766.) On suppose ici que la ligne M*s*MMS *mm*C est parfaitement courbe; ou que les lignes SM, MM, ne sont chacune que de deux points contigus.

## THÉORÊME I.

740. *Dans la courbe qu'on vient de décrire, ou dans une parabole quelconque; le quarré d'une ordonnée quelconque, est égal au rectangle de l'abscisse correspondante par le parametre.* (fig. 105.)

DÉMONSTRATION. L'ordonnée, perpendiculaire à l'axe SX, peut être prise ou au-dessous du foyer, ou ou au-dessus du foyer, ou dans le foyer même F.

I°. Soit d'abord l'ordonnée EM, prise *au-dessous du foyer*. Nommons $y$ l'ordonnée EM; nommons $x$ l'abscisse SE; nommons $a$ la quantité constante SD ou SF, qui est le quart du parametre. Dans le triangle rectangle FEM; on aura, par la construction, $FM = MZ = ES + SD = x + a$. On aura encore & de même $EF = ES - SF = x - a$.

Or ce triangle rectangle FEM, donne $\overline{FM}^2 = \overline{EM}^2 + \overline{EF}^2$: il donne donc algébriquement . . .

d'abord, $x + a \times x + a = xx + 2ax + aa = \overline{FM}^2$:

ensuite, . . . . . . . $y \times y = yy = \overline{EM}^2$;

enfin, . . $x - a \times x - a = xx - 2ax + aa = \overline{EF}^2$.

Prenant donc & disposant ces divers produits, selon l'exigence de l'équation donnée par le triangle rectangle FEM; . . . . . . . . . :

on aura, $xx + 2ax + aa = yy + xx - 2ax + aa$;

& en transpos. $yy = xx + 2ax + aa - xx + 2ax - aa$;

& en réduisant. . . . . . . $yy = + 4ax$.

Or selon la définition du parametre, $4a = p$: donc, en mettant $p$ à la place de son égale $4a$, on aura $yy = px$.

On conçoit aisément qu'on démontrera la même chose dans un triangle rectangle quelconque FMH, FmG, où l'ordonnée HM, Gm, sera prise au-dessous

du foyer : donc le quarré d'une ordonnée quelconque $y$, prise au-dessous du foyer, est toujours & par-tout égal au rectangle ou au produit de son abscisse par le parametre.

II°. Soit ensuite l'ordonnée BM, prise *au-dessus du foyer*. Dans le triangle rectangle BMF; on aura, par la construction, $FM = MK = BS + SD = x + a$. On aura de même $BS = SF - SB = a - x$.

Or ce triangle rectangle BMF, donne $\overline{MF}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{BF}^2$ : il donne donc algébriquement, . . .

d'abord $\quad \overline{x+a} \times \overline{x+a} = xx + 2ax + aa = \overline{MF}^2$;

ensuite, . . . . $y \times y = yy = \overline{BM}^2$;

Enfin, $\quad \overline{a-x} \times \overline{a-x} = aa - 2ax + xx = \overline{BF}^2$.

Prenant donc & disposant ces divers *produits*, *selon* l'exigence de l'équation donnée par le triangle rectangle BMF, . . . . . . . . . .

on aura $\quad xx + 2ax + aa = yy + aa - 2ax + xx$;

& en transpos. $\quad yy = xx + 2ax + aa - aa + 2ax - xx$;

& en réduisant, . . . $yy = 4ax = px$.

III°. Soit enfin l'ordonnée $Fp$, prise *au foyer même*. Par la construction, on a $Fp = pv = 2a$ : on a aussi $SF = x = a$ : l'ordonnée est donc ici comme 2, & l'abscisse comme 1. Or le quarré de l'ordonnée 2, est 4; & le rectangle ou le produit de l'abscisse 1 par le parametre 4, est aussi 4 : donc le quarré $yy$ ou $2 \times 2 = 4$ de l'ordonnée, est encore ici égal au produit $1 \times 4 = 4$ de l'abscisse correspondante $x$ ou 1, par le parametre constant $p$ ou 4. C. Q. F. D.

## *DIVERS COROLLAIRES.*

741. COROLLAIRE I. *Dans la courbe qu'on vient de décrire ; les quarrés des ordonnées sont entre eux comme les abscisses correspondantes.* (fig. 105.)

DÉMONSTRATION. La quantité $p$, qui eſt le parametre, étant conſtante; on peut à ſa place ſubſtituer l'unité: donc l'expreſſion $yy = px$, deviendra $yy = 1x = x$, pour chaque ordonnée & pour chaque abſciſſe correſpondante.

Par conſéquent on aura cette proportion : le quarré d'une ordonnée quelconque HM $= yy$, eſt à ſon abſciſſe HS $= x$; comme le quarré d'une autre ordonnée quelconque EM $= yy$, eſt à ſon abſciſſe BS $= x$; & ainſi du reſte.

Par conſéquent encore, les abſciſſes SB, SG, SX; croiſſant à l'infini; les ordonnées correſpondantes à ces abſciſſes, croîtront proportionnellement à l'infini : à cauſe de $yy$, toujours proportionnel à $x$.

Par conſéquent enfin, à cauſe de $yy = px$; les ordonnées $y$ ſeront toujours égales aux racines quarrées du produit des abſciſſes par le parametre. Ainſi étant donné le parametre d'une parabole, parametre égal à 4 toiſes, par exemple; on trouvera la valeur d'une ordonnée à une diſtance quelconque du ſommet, par exemple, à la diſtance de 1000 toiſes; en extrayant la racine quarrée de 4000 toiſes, produit de l'abſciſſe $x$ par le parametre $p$: cette racine quarrée exprimera l'ordonnée correſpondante à cette abſciſſe de 1000 toiſes; & ainſi du reſte. C. Q. F. D.

742. COROLLAIRE II. *Le parametre eſt une troiſieme proportionnelle à l'abſciſſe & à l'ordonnée correſpondante:* car puiſque $yy = px$; il s'enſuit que $x . y :: y . p$; ou que $\div x . y . p$. (173.)

743. COROLLAIRE III. *Sur cette propriété du parametre eſt fondé ſon uſage, qui conſiſte à déterminer le rapport entre la longueur & la largeur de la parabole, lequel eſt le même que celui qui regne entre l'ordonnée & l'abſciſſe correſpondante.*

EXPLICATION. En effet, dans l'équation $yy = px$;

ſuppoſons $p = 1$ : cette équation deviendra $yy = x$. Or alors,

I°. Si l'on ſuppoſe l'abſciſſe $x = \frac{1}{9}$ du parametre; l'on aura $yy = \frac{1}{9}$, & $y = \frac{1}{3}$. C'eſt-à-dire, que lorſque l'abſciſſe eſt un neuvieme du parametre, l'ordonnée en eſt le tiers : par conſéquent, la parabole alors croît davantage ſelon la largeur qui ſe prend ſur l'ordonnée, que ſelon la longueur qui ſe prend d'un point de l'axe au ſommet.

II°. Si l'on ſuppoſe l'abſciſſe $x = \frac{1}{4}$ du parametre; l'on aura $yy = \frac{1}{4}$, & $y = \frac{1}{2}$ : c'eſt-à-dire, qu'alors l'ordonnée eſt la moitié du parametre. Or le point de l'axe où l'abſciſſe eſt $\frac{1}{4}$ du parametre, eſt le foyer : puiſque ſelon la définition du parametre, le parametre eſt quatre fois la diſtance du ſommet au foyer. *D'où l'on* conclut que *dans la parabole, la double ordonnée qui paſſe par le foyer, eſt égale au parametre* ; & que dans ce cas, la parabole a encore plus de largeur que de longueur.

III°. Si l'on ſuppoſe l'abſciſſe $x = 1$, ou égale au parametre; l'on aura $yy = 1$, & $y = 1$ : c'eſt-à-dire, que dans ce cas, l'ordonnée & l'abſciſſe ſont égales; & que la parabole a autant de largeur que de longueur.

IV°. Si l'on ſuppoſe l'abſciſſe $x = 4$, ou quadruple du parametre; l'on aura $yy = 4$; & $y = 2$ : c'eſt-à-dire, que l'ordonnée n'eſt que double du parametre; & qu'alors la parabole croît davantage ſelon la largeur.

V°. En général, lorſque les abſciſſes ſont repréſentées par les fractions de l'unité $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{4}$; les ordonnées ſont repréſentées par leurs racines $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, qui croiſſent dans un plus grand rapport. Mais lorſque les abſciſſes ſont repréſentées par les nombres 1, 4, 9, 16, 25; les ordonnées ſont comme les nombres 1, 2, 3, 4, 5, qui ſont dans un moindre rapport que leurs quarrés.

Par

Par conséquent, dans le premier cas, la parabole a plus de largeur que de longueur, ou s'écarte plus de l'axe que de la directrice. Mais dans le second cas, la parabole a plus de longueur que de largeur, ou s'écarte plus de la directrice que de l'axe.

## *TANGENTES A LA PARABOLE.*

744. DÉFINITION. On nomme *tangente à une courbe* quelconque, une ligne droite qui touche cette courbe en un seul point, & qui indéfiniment prolongée de part & d'autre, ne toucheroit toujours la courbe qu'en un seul point, sans pénétrer dans le plan qu'embrasse cette courbe. La tangente au cercle est toujours perpendiculaire au rayon : il n'en est pas de même de la tangente à la parabole, à l'ellipse, & à l'hyperbole.

## PROBLÊME.

745. *Trouver une tangente à un point quelconque d'une parabole.* (fig. 109.)

SOLUTION. I°. Du point donné quelconque M, menez une parallele MV à l'axe SX, laquelle aboutisse à la directrice en V; & du foyer F, menez une ligne droite FV au même point V.

II°. Coupez en deux parties égales cette ligne FV, par une perpendiculaire P$m$ : cette perpendiculaire indéfiniment prolongée en N, sera une tangente à la parabole, la tangente au point M.

DÉMONSTRATION. I°. Les deux côtés VM & MF du triangle VFM, sont égaux; par la construction : donc si du point M, avec un rayon MV ou MF, on décrit un arc de cercle VF; le point M sera à la fois, un point de la parabole, le sommet du triangle isocele MVF, & le centre de l'arc circulaire VF.

II°. Si la ligne ou la corde V$m$F, est coupée en

deux parties égales par une perpendiculaire P*m*; cette perpendiculaire, indéfiniment prolongée, passera par le centre du cercle en M (407), lequel centre du cercle est un point de la parabole.

III°. Cette perpendiculaire PM, indéfiniment prolongée jusqu'en N, ne coupera point la parabole : car elle passera par tous les points également éloignés de V & de F (320). Or les points de la parabole, qui sont au-dessous de M, s'éloignent toujours plus de V que de F : parce qu'ils sont tous, par la construction, à égale distance du foyer & de la directrice. Par conséquent ces points de la parabole, tels que R, seront plus près du foyer F que du point V, & ne seront point atteints par la perpendiculaire PMN, qui passe par tous les points également éloignés de F & de V. *Il est* clair que la ligne RF = RZ, n'est *point égale à la ligne* RV : puisque la ligne RZ est perpendiculaire & que la ligne RV est oblique à la directrice ZVD. (398.)

De même du point F menez une ligne droite au point Z, & du milieu de cette ligne menez une droite au point R : cette droite sera la tangente au point R : & ainsi de tout autre point de la parabole. C. Q. F. D.

## *MIROIRS PARABOLIQUES.*

746. REMARQUE I. L'angle VMF est divisé en deux parties égales par la ligne PMN (407) : donc VMP = FMP. Or VMP = NMH (343) : donc NMH = PMF. Par conséquent (*fig.* 109) :

I°. Si un rayon de lumiere est dirigé selon la ligne HM parallélement à l'axe SX ; ce rayon de lumiere se réfléchira au foyer F ; en faisant un angle de réflexion PMF, égal à son angle d'incidence HMN, sur un point quelconque de la parabole. Pareillement & pour la même raison, si un rayon de lumiere est dirigé du foyer F vers un point quelconque M de la parabole;

il se réfléchira, & après la réflexion il se mouvra dans la direction MH, parallélement à l'axe.

II°. Si la courbe parabolique RMS, venoit à faire une révolution sur elle-même, autour de son axe SX; elle décriroit un *solide à concavité parabolique*, propre à réfléchir vers un même point F, tous les rayons de lumiere qui viendroient heurter sa concavité dans une direction parallele à l'axe; & à réfléchir dans une direction parallele à l'axe, tous les rayons de lumiere qui partiroient en tout sens du foyer F, & qui atteindroient un point quelconque de sa concavité.

Telle est la figure & tels sont les effets des *miroirs à concavité parabolique*. Telle est aussi pour le fond des choses, une portion du *porte-voix*; instrument destiné à donner une même direction parallele à toutes les molécules aëriennes que la langue & la bouche & le métal ont modifiées de concert avec la plus grande force & de la maniere la plus convenable. (*Phy*. 778.)

III°. Une ligne quelconque MH, parallele à l'axe SX, est un diametre de la parabole : cette ligne MH, prolongée à l'infini, aboutiroit sensiblement à l'autre foyer de la parabole, lequel est dans l'axe à une distance infinie du foyer F. D'où il résulte que selon la remarque précédente, un rayon de lumiere, parti d'un foyer & dirigé vers un point quelconque de la concavité parabolique, seroit réfléchi à l'autre foyer. (*fig*. 109.)

IV°. Dans cette courbe, toute ligne droite FM, FR, menée du foyer F à un point quelconque de la parabole, se nomme *rayon vecteur*.

747. REMARQUE II. Nous venons d'observer & de démontrer, que dans la parabole le quarré des ordonnées est toujours égal au rectangle des abscisses correspondantes par le parametre; & que les ordonnées sont entre elles comme les racines quarrées du produit des abscisses correspondantes par le parametre. Par conséquent. (*fig*. 105):

I°. Si le parametre & les abscisses SB, SE, SG, SH, restant les mêmes, les ordonnées BM, EM, GM, HM, devenoient toutes proportionnellement plus grandes; la courbe SMM cesseroit d'être une parabole, & deviendroit une *hyperbole*.

II°. Si au contraire le parametre & les mêmes abscisses restant les mêmes, les ordonnées devenoient toutes proportionnellement plus petites; la courbe SMM cesseroit d'être une parabole, & deviendroit une *ellipse* ou une *portion d'ellipse*.

III°. Dans la *parabole*, le quarré d'une ordonnée quelconque est toujours égal au rectangle de son abscisse par le parametre. Dans l'*ellipse*, le quarré d'une ordonnée au grand axe, est toujours égal au rectangle de son abscisse par une ligne moindre que le *parametre* de cet axe. Dans l'*hyperbole*, le quarré d'une ordonnée est plus grand que le rectangle de son abscisse par le parametre. De-là, comme nous l'avons déjà observé ailleurs (738. IX°), l'étymologie des trois dénominations de ces courbes.

748. PROBLÊME. *Mesurer un espace parabolique, intercepté entre l'axe, la courbe, & une ordonnée quelconque.* (fig. 107.)

SOLUTION Soit SXC*mm*S, l'espace ou la surface parabolique à mesurer: on suppose ici que cet espace est terminé par une courbe exactement parabolique & sans angles sensibles. Autour de cet espace, je décris le rectangle circonscrit STCXS; & je démontre que *les deux tiers de ce rectangle sont la valeur de l'espace parabolique à mesurer*. Pour cela,

I°. Je conçois que la ligne ST soit divisée en une infinité de parties égales infiniment petites S*b*, *be*, *e*T; & que des points de division soient menés à la courbe, une infinité de droites *bm*, *em*, TC, lesquelles seront les *élémens* du complément S*mm*CTS, ou les

surfaces d'une infiniment petite largeur qui partant toutes de la ligne ST vont se terminer à la courbe exactement parabolique S*m*C.

De l'extrêmité de chacun de ces *élémens du complément*, je mene par la pensée, une infinité d'ordonnées *m*B, *m*E, CX, à l'axe SX. Il est clair qu'alors tous les élémens *bm*, *em*, TC, du complément, seront égaux aux abscisses correpondantes SB, SE, SX; & que les distances S*b*, S*e*, ST, des droites ou des élemens *bm*, *em*, TC, au sommet S du complément, seront égales aux ordonnées correspondantes *m*B, *m*E, CX.

Or par la propriété de la parabole (741 & 766), les abscisses SB, SE, SX, sont entre elles comme les quarrés de leurs ordonnées *m*B, *m*E, CX : donc les élémens *bm*, *em*, TC, du complément, seront entre eux comme les quarrés de leurs distances au sommet S., ou comme les quarrés des lignes S*b*, S*e*, ST.

II°. Nous avons démontré ailleurs (590); que si l'on coupe une pyramide par une infinité de plans paralleles à sa base; ces plans sont entre eux comme les quarrés de leurs hauteurs, ou comme les quarrés de leurs distances au sommet de la pyramide : donc les élémens *bm*, *em*, TC, du complément, qui sont entre eux comme les quarrés de leurs distances au sommet S, sont aussi entre eux comme les plans élémentaires d'une pyramide.

Mais la somme des plans élémentaires d'une pyramide, somme qui forme sa solidité, est égale au produit de la base multipliée par le tiers de sa hauteur ou de sa distance au sommet (604) : donc la somme des élémens *bm*, *em*, TC du complément S*mm*CTS, est égale au produit de la base ou du plus grand élément CT, par le tiers de la hauteur TS, ou par le tiers de la distance du plus grand élément au sommet S où se trouve le premier & le plus petit des élémens de ce complément.

III°. Or la base CT du complément, multipliée par toute la hauteur ST de ce complément, donne le rectangle SXCTS; & la base CT multipliée par le tiers de cette hauteur, ou CT × $\frac{1}{3}$ST, donne précisément le tiers du même rectangle : donc la somme des élémens du complément, somme qui n'est autre chose que le complément lui-même ou sa surface, est égale au tiers de ce rectangle SXCTS. Donc si de ce rectangle on retranche le complément S*mm*CTS, qui est géométriquement le tiers du rectangle; le reste est la demi-parabole S*mm*CXS : donc cette demi-parabole est exactement le tiers du rectangle SXCTS.

Et comme on peut démontrer de la même maniere que l'autre demi-parabole SX*s*MMS est égale aux deux tiers d'un semblable rectangle *circonscrit; il s'ensuit* que cette parabole & toute parabole *quelconque*, est les deux tiers du rectangle circonscrit : & par-là on a la *quadrature de la parabole*.

IV°. Si du sommet S de la parabole, on mene une ligne droite à l'extrêmité C de sa derniere ordonnée; cette ligne droite SC divisera le rectangle STCXS, en deux parties égales : & alors, si le rectangle est supposé = 1; la demi-parabole sera $\frac{2}{3}$, & le triangle SCXS sera $\frac{1}{2}$.

Ainsi, en réduisant tout au même dénominateur; le rectangle, la demi-parabole, le triangle inscrit, seront entre eux comme $\frac{6}{6}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{3}{6}$, ou comme 6, 4, 3.

Or, en retranchant de la demi-parabole, le triangle inscrit SCXS; le reste est la valeur du segment parabolique SC*mm*S : donc le rectangle circonscrit, la demi-parabole, le triangle inscrit, & le segment parabolique, sont entre eux comme 6, 4, 3, 1.

On aura les mêmes rapports, si au lieu de la demi-parabole, on prend la parabole entiere & un rectangle circonscit à cette parabole : puisque les touts sont entre eux, dans le même rapport que leurs moitiés.

## PARAGRAPHE SECOND.

### *L'Ellipse sur un Plan.*

749. Problême. Construire *ou décrire une ellipse sur un plan.* (fig. 111.)

Solution. Nous supposerons ici ce que nous démontrerons ailleurs (767), savoir, que *dans une ellipse quelconque, les quarrés des ordonnées sont entre eux, comme les rectangles de leurs abscisses correspondantes.* C'est d'après cette propriété fondamentale de l'ellipse, que doit être résolu le présent problême.

Soient deux lignes droites inégales AX & *ax*, qui se coupent l'une & l'autre à angles droits par le milieu : ce milieu C sera le *centre de l'ellipse* que vous allez décrire.

I°. Du point d'intersection C, avec une ouverture de compas CA, décrivez un cercle ADXDA : ce cercle sera un *cercle circonscrit à l'ellipse* que vous allez décrire ; & il va vous servir de regle pour décrire cette ellipse, dont ACX sera le *grand axe*, & dont *a*C*x* sera le *petit axe.*

II°. Sur le grand axe ACX, élevez tant de perpendiculaires qu'il vous plaira ; en telle sorte que ces perpendiculaires aboutissent toutes de part & d'autre à la circonférence du cercle circonscrit : ces perpendiculaires BM, CD, GM, HM, seront les ordonnées au cercle circonscrit, sur lesquelles on trouvera les parties B*m*, C*a*, G*m*, H*m*, qui seront les *ordonnées à l'ellipse* qu'il faut décrire.

Une ordonnée quelconque GM divise le grand axe AX en deux parties AG & GX : ces deux portions de l'axe sont les *abscisses de l'ellipse* & du cercle circonscrit.

La principale propriété de l'ellipse, est que les quarrés des ordonnées sont entre eux, comme les rectangles des deux parties de l'axe qu'elles coupent, ou

comme les rectangles des deux abſciſſes ; ainſi que nous le démontrerons ailleurs (767). Selon cette propriété fondamentale de l'ellipſe, $\overline{Hm}^2 . \overline{Gm}^2 :: HA \times HX . GA \times GX$.

III°. Dans le cercle, le quarré d'une ordonnée quelconque eſt égal au rectangle de ſes deux abſciſſes. Car dans le cercle, AG . GM :: GM . GX (410). Par conſéquent $AG \times GX = GM \times GM$. Il s'agit de conſtruire l'ellipſe, de telle ſorte que le quarré d'une ordonnée quelconque G*m*, ſoit au rectangle $GA \times GX$ des deux abſciſſes ou des deux parties de l'axe qu'elle coupe ; comme le quarré d'une autre ordonnée quelconque H*m*, eſt au rectangle $AH \times HX$ des deux parties de l'axe qu'elle coupe auſſi.

Pour cela il faut rendre toutes les *ordonnées de* l'ellipſe à décrire, proportionnellement *plus* petites que les ordonnées correſpondantes du cercle circonſcrit. Car alors les quarrés des ordonnées au cercle étant *égaux* aux rectangles de leurs abſciſſes ; les quarrés des ordonnées à l'ellipſe ſeront *proportionnels* aux rectangles des abſciſſes, qui ſont les *mêmes que celles* du cercle.

IV°. Ainſi pour avoir la grandeur d'une ordonnée quelconque à l'ellipſe, par exemple, de l'ordonnée G*m*; cherchez une quatrieme proportionnelle au rayon du cercle CA = CD, au demi-petit axe C*a* de l'ellipſe, & à l'ordonnée GM du cercle, par cette proportion : CD . C*a* :: GM . *x* = G*m* (413). Vous aurez l'ordonnée G*m* à l'ellipſe, proportionnelle à l'ordonnée GM au cercle.

Cherchez de même la grandeur de l'ordonnée H*m* à l'ellipſe, en faiſant cette proportion : CD . C*a* :: HM . *x*. Vous aurez l'ordonnée H*m* à l'ellipſe, proportionnelle à l'ordonnée HM au cercle. En faiſant la même opération ſur toutes les ordonnées au cercle, on aura toutes les ordonnées à l'ellipſe, toujours propor-

tionnelles aux ordonnées correſpondantes du cercle.

V°. La courbe A*mamXmxm*A, qui paſſera par l'extrêmité de toutes ces ordonnées, proportionnelles aux ordonnées au cercle circonſcrit, ſera l'*ellipſe qu'il falloit décrire*. Donc, en conſtruiſant l'ellipſe ou en ſuppoſant l'ellipſe conſtruite d'après cette théorie, on pourra en connoître la nature & les propriétés principales.

Selon cette théorie, on peut ſuppoſer l'ellipſe toute conſtruite ſur cette proportion continue ∺ CD = CA. C*a*. GM. G*m*. HM. H*m*; & ainſi de ſuite à l'infini.

VI°. Par la propriété fondamentale du cercle, le quarré d'une ordonnée quelconque KM eſt égal au rectangle des abſciſſes KA × KX : donc, puiſque l'ordonnée K*m* de la courbe qu'on vient de décrire, eſt proportionnelle à l'ordonnée KM du cercle; il s'enſuit que le quarré de l'ordonnée K*m* ſera, non égal, mais proportionnel au même rectangle des abſciſſes KA × KX, leſquelles abſciſſes ſont les mêmes pour le cercle & pour l'ellipſe. On peut dire la même choſe de chaque ordonnée au cercle & à l'ellipſe : donc dans la courbe qu'on vient de décrire, les quarrés des ordonnées ſont par-tout entre eux, comme les rectangles des abſciſſes.

Or cette propriété eſt la propriété caractériſtique de l'ellipſe, comme nous le ferons voir dans la ſuite; donc la courbe que nous venons de décrire, eſt l'ellipſe même dont nous avons vu la formation dans le cône.

VII°. Une ligne *m*C*m*, menée d'un point quelconque de cette courbe par le centre C à un point oppoſé, eſt un *diametre de l'ellipſe*.

L'ordonnée *p*F*p*, qui paſſe par l'un des deux foyers indifféremment, eſt le *parametre de l'ellipſe*.

VIII°. On peut également conſtruire une ellipſe, en menant les ordonnées au petit axe. (*fig.* 114.)

Pour cela, décrivez un cercle N*a*M*b*N, dont le petit axe donné NCM ſoit le diametre; & ayant mené

le grand axe donné ACB perpendiculairement sur le milieu C du petit axe, cherchez tant d'ordonnées *rs*, *rs*, qu'il vous plaira, telles que chaque ordonnée à l'ellipse que vous voulez décrire, soit à l'ordonnée correspondante & plus petite du cercle inscrit; comme le grand axe est au petit axe : la courbe NAMBN, qui passera par l'extrêmité déterminée de toutes ces ordonnées, sera une ellipse; & elle aura les mêmes propriétés que la précédente.

## *DIVERS COROLLAIRES.*

750. COROLLAIRE I. *La somme de toutes les ordonnées au cercle, est à la somme de toutes les ordonnées à l'ellipse; comme une ordonnée au cercle, est à l'ordonnée correspondante à l'ellipse.* (fig. 111.)

DÉMONSTRATION. Il est évident qu'il y a un rapport quelconque entre l'ordonnée CD au cercle, & l'ordonnée correspondante C*a* à l'ellipse. Or par la construction, ce même rapport se trouve entre toutes les ordonnées correspondantes du cercle & de l'ellipse. Donc toutes les ordonnées au cercle sont les antécédens, & toutes les ordonnées à l'ellipse sont les conséquens de tout autant de raisons géométriques, dans lesquelles la somme des antécédens est à la somme des conséquens, comme un seul antécédent est à son conséquent. (222.) C. Q. F. D.

751. COROLLAIRE II. *La surface d'un cercle circonscrit à l'ellipse, est à la surface de l'ellipse inscrite, comme le grand axe de l'ellipse est à son petit axe.* (fig. 111.)

DÉMONSTRATION. Comme la somme de toutes les ordonnées qu'on peut mener dans un cercle, est évidemment égale à la surface de ce cercle; & que la somme de toutes les ordonnées qu'on peut mener dans l'ellipse, est aussi évidemment égale à la surface de

l'ellipse; il est clair que la surface du cercle est à la surface de l'ellipse, comme la somme de toutes les ordonnées au cercle est à la somme de toutes les ordonnées à l'ellipse.

Or par le corollaire précédent, la somme de toutes les ordonnées au cercle circonscrit, est à la somme de toutes les ordonnées à l'ellipse inscrite; comme une ordonnée quelconque CD du cercle, est à l'ordonnée correspondante C*a* de l'ellipse.

Mais CD=CA est la moitié du grand axe de l'ellipse; & C*a*=C*x* est la moitié du petit axe de l'ellipse: donc les moitiés étant entre elles comme leurs touts (163), la surface du cercle sera aussi à la surface de l'ellipse; comme le double de CD ou de CA, est au double de C*a*, ou comme le grand axe est au petit axe.

Par conséquent, si le grand axe AX est au petit axe *ax*, comme 6 est à 3, ou comme 9 est à 10, ou comme 1000 est à 999; la surface du cercle circonscrit sera à la surface de l'ellipse inscrite, comme 6 est à 3, ou comme 9 est à 10, ou comme 1000 est à 999: & ainsi du reste. C. Q. F. D.

752. Corollaire III. *La surface d'une ellipse est égale à la surface d'un cercle, dont le diametre est moyen proportionnel entre le grand axe & le petit axe de l'ellipse.* (fig. 111.)

Démonstration. Nommons C, la surface du cercle décrit sur le grand axe de l'ellipse: nommons E, la surface de l'ellipse: nommons M, la surface du cercle décrit sur la moyenne proportionnelle: nommons *a* & *b*, le grand axe & le petit axe de l'ellipse: nommons *m*, la moyenne proportionnelle (414) entre le grand axe & le petit axe.

1°. Par l'hypothese, on aura d'abord cette proportion continue: $\div a . m . b$. Dans cette proportion con-

tinue, le premier terme eſt au troiſieme, comme le quarré du premier eſt au quarré du ſecond (234). Donc on aura auſſi cette proportion : $a . b :: aa . mm$.

Or par le corollaire précédent : $C . E :: a . b$ : par conſéquent (168), on aura auſſi : $C . E :: aa . mm$.

II°. Mais les ſurfaces des cercles étant entre elles, comme les quarrés de leurs rayons & de leurs diametres (501) ; la ſurface du cercle C, conſtruit ſur le grand axe *a*, ſera à la ſurface du cercle M, conſtruit ſur la moyenne proportionnelle *m* ; comme *aa* eſt à *mm*. On aura par conſéquent, $C . M :: aa . mm$.

III°. On vient de voir que $C . E :: aa . mm$. Donc E eſt égal à M : puiſque ces deux grandeurs E & M ont un même rapport avec la grandeur *mm*. Par conſéquent la ſurface E de l'ellipſe, eſt égale à la ſurface d'un cercle, dont le diametre eſt moyen proportionnel entre le grand axe & le petit axe de l'ellipſe. C. Q. F. D.

753. PROBLÊME I. *Trouver à très-peu près la ſurface d'une ellipſe, dont on connoît le grand axe & le petit axe.* (fig. 111.)

SOLUTION. Trouvez une moyenne proportionnelle entre le grand axe & le petit axe (414) : cette moyenne proportionnelle ſera l'axe ou le diametre d'un cercle égal en ſurface à l'ellipſe ; ſelon le corollaire précédent. Par conſéquent, en prenant le produit de la circonférence de ce cercle par la moitié de ſon rayon, on aura à très-peu près la ſurface de ce cercle (481) : on aura par-là même, la ſurface de l'ellipſe en queſtion, qui eſt égale à celle de ce cercle. (752.)

Si on pouvoit avoir géométriquement la quadrature du cercle, on auroit avec la même préciſion la quadrature de l'ellipſe : mais comme on ne peut avoir qu'à peu près la quadrature de celui-là, on n'a auſſi qu'à peu près la quadrature de celle-ci.

754. PROBLÊME II. *Trouver la solidité d'un sphéroïde ellipsoïdal, dont on connoît le grand axe & le petit axe.* (fig. 111.)

SOLUTION. Soient une ellipse, & un cercle circonscrit à cette ellipse. Nommons $a$, le grand axe de l'ellipse & le diametre du cercle : nommons $b$, le petit axe de l'ellipse : nommons $x$, les ordonnées au cercle : nommons $y$ les ordonnées à l'ellipse. Par la construction (749), on a $x.y::a.b$; & $x^2.y^2::aa.bb$. (225.)

I°. Si le demi-cercle ADXCA, & la demi-ellipse A$a$XCA, font ensemble une révolution autour de leur axe commun ACX; il est clair que les ordonnées BM, KM, GM, HM, au cercle, décriront une *sphere*; & que les ordonnées correspondantes à l'ellipse, décriront un *sphéroïde ellipsoïdal*. Il est clair que la solidité de la sphere, sera la somme des plans circulaires décrits par les ordonnées au cercle; & que la solidité du sphéroïde ellipsoïdal, sera la somme égale des plans circulaires décrits par la révolution des ordonnées à l'ellipse. Ces plans circulaires sont entre eux comme les quarrés de leurs rayons (500), lesquels rayons sont d'une part les ordonnées au cercle; & de l'autre les ordonnées à l'ellipse. On aura donc cette proportion : la solidité S de la sphere, est à la solidité E du sphéroïde ellipsoïdal, comme $x^2$ est à $y^2$; ou $S.E::x^2.y^2$.

Par conséquent, ayant cherché & trouvé la solidité S de la sphere (608); on aura dans cette derniere proportion, trois termes connus, qui feront trouver le quatrieme inconnu E, ou la solidité du sphéroïde ellipsoïdal. Ou bien,

II°. Concevez deux cylindres décrits par la révolution des lignes ST & OP, autour de l'axe AX. Ces deux cylindres, circonscrits l'un à la sphere & l'autre

au ſphéroïde, auront même hauteur AX : ils seront donc entre eux en ſolidité, comme leurs baſes qui ſont des cercles décrits l'un par le grand axe, & l'autre par le petit axe : donc ils ſeront entre eux en ſolidité, comme le quarré du grand axe eſt au quarré du petit axe. Nommant donc ces deux cylindres C & $c$ ; on aura C . $c$ : : $aa$ . $bb$.

Or puiſqu'on a déjà $x^2 . y^2 :: aa . bb$ ; & S . E : : $aa . bb$ ; on aura auſſi, S . E : : C . $c$. C'eſt-à-dire, la ſolidité de la ſphere, eſt à la ſolidité du ſphéroïde ellipſoïdal ; comme la ſolidité du cylindre circonſcrit à la ſphere, eſt à la ſolidité du cylindre circonſcrit à l'ellipſe. Or la ſphere eſt les deux tiers du cylindre circonſcrit (624) : donc le ſolide ellipſoïdal ſera auſſi les deux tiers du cylindre circonſcrit, ou du cylindre *qui a pour* diametre le petit axe, & pour hauteur le grand axe.

IV°. Il faut obſerver ici que *la même ſolution & la même démonſtration auroient lieu ; ſi les ordonnées, au lieu d'être menées au grand axe, étoient menées au petit axe.* (fig. 114.)

Soient une ellipſe ANBMA, & un cercle *aNbMa* inſcrit au petit axe de l'ellipſe. Les ordonnées $rs$, $rs$, ſeroient proportionnelles aux ordonnées correſpondantes d'un cercle dont ACB ſeroit le diametre ; par la conſtruction (749) : elles ſeront donc auſſi proportionnelles aux ordonnées correſpondantes d'un cercle dont $a$C$b$ eſt le diametre ; puiſque dans deux cercles inégaux, tous les diametres, tous les rayons, toutes les cordes, tous les arcs, toutes les parties ſemblables, ſont des grandeurs proportionnelles (475 & 648). Par conſéquent ſi la demi-ellipſe NAMCN, & le demi-cercle N$a$MCN, font enſemble une révolution autour de leur axe commun NCM ; ils décriront, l'une un ſolide ellipſoïdal, l'autre une ſphere, dont les ſolidités ſeront reſpectivement la ſomme

égale des plans circulaires inégaux, décrits pendant la révolution, d'une part par les ordonnées à l'ellipse ; de l'autre, par les ordonnées au cercle.

En faisant donc les mêmes raisonnemens & les mêmes proportions que ci-dessus ; on trouvera que la solidité E du sphéroïde ellipsoïdal ANBMA, est à la solidité S de la sphere inscrite *a*N*b*M*a* ; comme le quarré *aa* du grand axe, est au quarré *bb* du petit axe ; ou comme le cylindre STVX circonscrit au grand axe, est au cylindre OPKL circonscrit au petit axe.

### *SOLIDITÉ ET SURFACE DU GLOBE TERRESTRE.*

755. OBSERVATION. Le problême que nous venons de résoudre, sert à faire *trouver à très-peu près le rapport du sphéroïde terrestre, avec une vraie sphere :* comme nous allons l'expliquer. (*fig.* 114.)

I°. On sait que la Terre n'est point un vrai globe, mais une espece de sphéroïde ANBMA, applati vers ses poles N & M, & alongé vers son équateur ACB. Si l'on conçoit *un plan*, qui passant par le centre & par les poles de la terre, du midi au nord, divise cette énorme masse en deux parties égales ; ce plan formera dans la terre une section AMBNA, qui sans être peut-être une vraie ellipse, ne différera que fort peu d'une ellipse dont AB seroit le grand axe ; & NM, le petit axe ; & si cette section fait une révolution sur le petit axe NM, elle décrira, abstraction faite des montagnes, un *sphéroïde ellipsoïdal* qui sera notre globe terraqué, renflé vers l'équateur & applati vers les poles.

En supposant que l'on connoît le grand axe & le petit axe de ce sphéroïde (*Phy.* 1375) ; on en trouvera, par le problême précédent, la solidité, telle à peu près que nous l'avons marquée ailleurs.

II°. Quant à la *surface de ce sphéroïde*, on ne peut

guere la trouver géométriquement, ſans le ſecours du calcul différentiel & du calcul intégral, ou ſans le ſecours de quelques autres méthodes à peu près auſſi compliquées & auſſi difficiles : reſſources aſſez inutiles dans la queſtion préſente, dans laquelle on ne peut avoir, avec la préciſion géométrique, ni le grand axe, ni le petit axe ; & dans laquelle, avec le ſecours des calculs les plus géométriques & les plus rigoureux, on ne peut avoir dans la réalité, que des *à peu près*, tels que nous allons les trouver ſans grand appareil.

Si la terre étoit une vraie ſphere N*a*M*b*N, ayant pour diametre le petit axe NM$=ab$; ſa ſurface ſeroit égale à la ſurface convexe du cylindre circonſcrit OPQR : ſi la terre étoit une autre vraie ſphere, qui eût pour diametre le grand axe ACB; ſa ſurface ſeroit égale à la ſurface convexe du cylindre circonſcrit STVX. (573.)

La ſurface de l'ellipſe ANBMA eſt égale à la ſurface d'un cercle *v*N*v*M*v*, dont le diametre *v*C*v* eſt moyen proportionnel entre le grand axe & le petit axe de l'ellipſe (752). En ſuppoſant donc, (comme on peut le ſuppoſer ſans crainte d'aucune erreur bien conſidérable, dans un ſphéroïde auſſi peu applati que l'eſt la terre ); en ſuppoſant, dis-je, que la ſurface du ſphéroïde terreſtre ſoit égale à la ſurface d'une ſphere dont *v*C*v* ſeroit le diametre; on trouvera que cette ſurface eſt la même que la ſurface convexe du cylindre GHKL, circonſcrit au cercle dont le diametre *v*C*v* eſt moyen proportionnel entre le grand axe & le petit axe.

Cette ſurface convexe du cylindre GHKL, ne ſera pas dans la rigueur géométrique, la ſurface exacte & préciſe du ſphéroïde terreſtre : mais elle en approchera aſſez pour qu'on puiſſe ſe diſpenſer de la chercher & déſeſpérer de la trouver avec plus de préciſion dans la réalité. On trouvera cette *ſurface du ſphéroïde terreſtre*, telle

telle à peu près que nous l'avons marquée dans le second volume de la théorie des êtres sensibles. (*Phy.* 496.)

## *L'ELLIPSE ENCORE SUR UN PLAN.*

756. *Décrire d'une autre maniere, une ellipse sur un plan.* (fig. 105.)

SOLUTION. Sur un plan, plantez un petit piquet cylindrique & perpendiculaire en C, auquel vous attacherez les deux extrêmités d'une ficelle qui puisse tourner autour du piquet.

I°. Si un crayon perpendiculaire au plan, & placé à l'extrêmité des deux branches de la ficelle qu'il tend toujours également, fait une révolution autour du piquet C; ce crayon décrira sur le plan un cercle AD XDA.

II°. Mais si sur le même plan, au lieu d'un seul piquet, vous en plantez deux, l'un en F & l'autre en *f*, auxquels vous attacherez les deux extrêmités de la même ficelle; le même crayon perpendiculaire au plan, & toujours placé à l'extrêmité des deux branches égales ou inégales de la ficelle, décrira une autre courbe A*a*X*x*A, dont les deux axes AX & *ax* seront inégaux: *cette courbe sera une ellipse;* comme nous le ferons voir bientôt.

On peut donc considérer une ellipse, comme un cercle dont le centre C s'est écarté également de part & d'autre en F & en *f;* dont un diametre AX s'est alongé plus ou moins aux dépens du diametre perpendiculaire *ax*.

757. DÉFINITION I. Ces deux points F & *f* du grand axe, sont les *foyers de l'ellipse;* & chaque foyer est éloigné des deux extrêmités du petit axe *ax*, de la grandeur du demi-grand axe CA ou CX. Ces deux foyers sont à égale distance du centre C de l'ellipse;

& la distance plus ou moins grande FC d'un foyer quelconque au centre, est l'*excentricité de l'ellipse.*

Telle est la courbe plus ou moins excentrique que décrivent dans les espaces céléstes, tous les globes opaques autour de leur centre de mouvement, qui est le soleil pour les cometes & pour les planetes principales; qui est une planete principale pour les planetes secondaires (*Phy.* 1198). Le centre de mouvement, immobile ou mobile, est toujours, non au centre C de l'ellipse, mais hors du centre & dans un des foyers F, sur le grand axe de l'ellipse plus ou moins alongée A*a*X*x*A.

758. DÉFINITION II. L'ellipse a un parametre, aussi bien que la parabole. Ce *parametre de l'ellipse*, est une troisième proportionnelle au grand axe & au petit axe (413). Ainsi pour avoir le parametre d'une ellipse dont on connoît les deux axes, on n'a qu'à faire cette proportion : le grand axe A, est au petit axe *a*, comme ce petit axe *a*, est au parametre *p*; c'est-à-dire, A. *a* :: *a* . *p*. Ainsi A*p* = *aa*.

On démontre dans tout traité *complet des sections coniques* que ce parametre de *l'ellipse est égal à la* double ordonnée *p*F*p* ou *pfp*, qui passe par l'un des foyers & qui est perpendiculaire au grand axe AX.

Pour rendre plus sensible cette théorie de l'ellipse, nous allons en donner une nouvelle formation, qui n'est qu'une application du problême précédent. (*fig.* 106.)

759. APPLICATION. Etant donnée sur un plan une ligne droite d'une grandeur quelconque AX, sur laquelle on aura pris ou donné à volonté deux points F & *f* également distans des deux extrémités A & X; prenez hors de cette ligne une infinité de points successifs AB*a*DXE*x*GA, tels que la somme des distances de chacun de ces points aux deux points F & *f* soit constante & toujours égale à la ligne donnée AX.

*la courbe qui passera par tous ces points sera une ellipse.* (fig. 106.)

Ou bien, la ligne donnée AX étant indéfinie, plantez un piquet à chacun des points donnés F & *f*; & attachez les deux extrêmités d'un fil plus ou moins long, à chaque piquet. Après quoi, avec un crayon que vous tiendrez toujours perpendiculaire au plan, & qui tendra toujours également les deux branches du fil, décrivez une courbe autour des deux piquets: *cette courbe sera encore une ellipse.* La ligne AX en sera le grand axe: la ligne *ax* en sera le petit axe: le point C en sera le centre; les points F & *f*, également éloignés du centre, également éloignés des deux extrêmités du grand axe, en sont les foyers.

I°. Par la construction, la ligne quelconque FB*f* ou FE*f*, menée d'un foyer à la circonférence & de la circonférence à l'autre foyer, est égale au grand axe AX; puisque les deux parties de cette ligne FB*f* sont egales à toute la longueur du fil tendu, aussi bien que la ligne FX*f* = AX.

II°. Par la construction encore, la courbure de cette ellipse est égale de part & d'autre, à égale distance d'une extrêmité quelconque du grand axe. Ainsi la courbure est égale en D & en E, en A & en X, en G & en B, en *a* & en *x*.

Mais cette courbure va en diminuant de part & d'autre, depuis une extrêmité quelconque du grand axe, jusqu'aux extrêmités du petit axe: de sorte que l'ellipse a son plus grand applatissement en *a* & en *x*, & son moindre applatissement ou sa plus grande courbure en A & en X.

III°. Par la construction enfin, les points *a* & *x* sont également éloignés des deux foyers: les deux lignes F*a* & *fa*, prises ensembles, sont égales au grand axe AB: chaque foyer est à égale distance du centre, à égale distance des deux extrêmités du grand axe, à

égale diſtance auſſi des deux extrêmités du petit axe.

760. REMARQUE. Si on ſuppoſe que le centre d'une planète ou d'une comete décrive cette courbe autour du ſoleil immobile dans un foyer F (*fig.* 106.) :

I°. Une ligne droite quelconque FA, FD, FE, FX, menée du centre du ſoleil au centre de la planete ou comete, s'appelle un *rayon vecteur* de cette planete ou comete.

II°. La planete ou comete ſera dans ſa *moyenne diſtance* en *a* & en *x* : elle ſera dans ſa plus *grande diſtance* ou dans ſon *aphélie* en X : elle ſera dans ſa plus *petite diſtance* ou dans ſon *périhélie* en A : la ligne FC ſera ſon *excentricité*.

## *CERCLES OSCULATEURS.*

761. OBSERVATION. Comme l'ellipſe eſt une courbe d'une infinité de côtés d'inégale courbure ; il eſt clair que trois points contigus d'un arc elliptique, peuvent être communs avec trois points contigus d'une circonférence de cercle plus ou moins grand. (*fig.* 106.)

Car en ſuppoſant le point du milieu de l'arc elliptique BAG, placé ſur le point du milieu de l'arc circulaire *b* A *g* ; on conçoit que l'arc circulaire peut s'ouvrir ou ſe reſſerrer à l'infini, juſqu'à ce que les deux points contigus de l'arc circulaire, ſe confondent avec les deux points contigus de l'arc elliptique.

762. DÉFINITION. Un cercle, dont trois points contigus ſe confondent avec trois points contigus d'une ellipſe, ſe nomme *cercle oſculateur*. Ce cercle eſt évidemment poſſible, ſelon l'obſervation précédente : nous allons donner une idée de ſa nature & de ſes uſages. (*fig.* 106.)

I°. Il eſt évident que le cercle oſculateur devient d'autant *plus grand*, que l'arc infiniment petit qu'il touche dans la partie concave de l'ellipſe, eſt plus applati ; & que le cercle oſculateur devient d'autant *plus*

*petit*, que l'arc elliptique qu'il atteint, est plus courbe ou moins applati.

Ainsi il y a autant de différens cercles osculateurs à l'ellipse, qu'il y a de points dans tout l'arc AB*a*, qui en embrasse le quart. Le cercle osculateur du point A ou du point X, est le plus petit: au lieu que le cercle osculateur du point *a* ou du point *x*, est le plus grand. Le rayon du cercle osculateur va en croissant, depuis le point A jusqu'au point *a*: il va ensuite en décroissant, depuis le point *a* jusqu'au point X. De même, le rayon du cercle osculateur va en croissant, depuis le point X jusqu'au point *x*; & en décroissant, depuis le point *x* jusqu'au point A.

II°. Le rayon du cercle osculateur, en A & en X, se confond avec une partie du grand axe AX; mais il n'atteint pas jusqu'au centre C de l'ellipse: parce que la courbure de l'ellipse est plus grande en A & en X, que celle d'un cercle qui auroit pour rayon la moitié CA du grand axe. Il faut par conséquent que l'arc du cercle se resserre davantage, & que son rayon AF se raccourcisse en-deçà du centre C.

Le rayon du cercle osculateur, en *a* & en *x*, se confond avec une partie du petit axe; mais il aboutit en *n*, plus ou moins au-delà du centre C de l'ellipse: parce que la courbure de l'ellipse est moindre en *a* & en *x*, que celle d'un cercle qui auroit pour rayon la moitié du petit axe. Il faut donc que l'arc du cercle s'ouvre davantage, & que son rayon s'alonge au-delà du centre C.

Dans les points intermédiaires, le rayon du cercle osculateur devient alternativement plus court & plus long, à mesure que l'arc devient plus courbe ou plus applati: mais alors le rayon ne se confond plus avec les axes, & n'est plus dirigé vers le centre C de l'ellipse.

III°. Les Astronomes ont imaginé le *cercle oscula-*

teur, pour pouvoir rapporter les différens arcs d'une courbe différente du cercle, aux arcs d'un cercle; ou pour pouvoir prendre chaque arc infiniment petit d'une courbe différente du cercle, pour l'arc d'un cercle qui auroit la même courbure que cet arc infiniment petit avec lequel se confondroit un arc égal du cercle. Cet arc infiniment petit de la courbe différente du cercle, par exemple, d'une ellipse, aura évidemment les mêmes propriétés & donnera les mêmes résultats, que s'il appartenoit au cercle avec lequel on le compare. Le cercle osculateur a lieu dans la parabole & dans l'hyperbole, ainsi que dans l'ellipse.

## PROBLÊME.

763. *Trouver une tangente à un point quelconque d'une ellipse, dont on connoît le grand axe & le rayon vecteur.* (fig. 108.)

SOLUTION. I°. Étant donné sur l'ellipse S*x*X*s*S un point quelconque M, prolongez le rayon vecteur *f*M, de façon que MV soit égal à MF; & menez du point F, une ligne droite au point V.

II°. Divisez par le milieu *m* cette ligne FV, par une perpendiculaire PMN : cette perpendiculaire sera une tangente à l'ellipse, la *tangente au point* M.

DÉMONSTRATION. I°. Dans le triangle rectiligne MFVM, les deux côtés MV & MF sont égaux, par la construction. Donc si du point M, avec un rayon MV ou MF, on décrit un arc de cercle VPF; le point M sera à la fois, un point de l'ellipse, le sommet du triangle MFVM, & le centre de l'arc circulaire VPF.

II°. Si la ligne ou la corde V*m*F, est coupée en deux parties égales par la perpendiculaire NP; cette perpendiculaire, indéfiniment prolongée, passera par le centre du cercle en M (467), lequel centre du cercle est un point de l'ellipse.

II°. Cette perpendiculaire PMN, indéfiniment prolongée, ne coupera point l'ellipse : car elle passera par tous les points également éloignés de F & de V (320). Or les points de l'ellipse, qui sont au-dessus ou au-dessous du point M, s'éloignent toujours plus de V que de F : par conséquent tous les points de l'ellipse qui sont au-dessus & au-dessous de M, seront plus près de F que de V ; & se trouveront au-dessous & hors de la tangente PMN qui passe par tous les points également distans de F & de V. Il est évident que tout point *x* de l'ellipse, pris au-dessus ou au-dessous du point M, est plus près du point F que du point V. Par conséquent la ligne PMN ne touche l'ellipse qu'en un seul point M, & est la tangente à ce point M.

De même, & pour les mêmes raisons, la ligne ST, qui divise en deux parties égales l'arc FSK, est la tangente au point *a*.

III°. Si l'on prend pour rayon vecteur le rayon FM ; il faudra prolonger ce rayon, jusqu'à ce que M*v* soit égal à M*f*. Après quoi, on décrira l'arc *v*N*f* ; & la ligne NM, qui divise & cet arc & sa corde en deux parties, sera la tangente au point M : ce que l'on démontrera, comme nous venons de démontrer que la ligne PM est tangente à ce même point. C. Q. F. D.

## *MIROIRS ELLIPTIQUES.*

764. REMARQUE. L'angle VMF est divisé en deux parties égales par la ligne ou par la tangente NMP (407) : donc PMV = PMF. Or PMV = NM*f* (343) : donc PMF = NM*f*. Par conséquent (*fig.* 108.),

I°. Si un rayon de lumiere est dirigé d'un foyer quelconque F, à un point quelconque M de la circonférence intérieure de l'ellipse ; ce rayon se réfléchira à l'autre foyer *f*, en faisant un angle de réflexion

NM$f$ égal à son angle d'incidence FMP. Car le point M de l'ellipse, où ce rayon se réfléchit, est un plan infiniment petit qui fait partie de la tangente PMN.

II°. L'angle $v$M$f$ est divisé de même en deux parties égales, par la tangente NM : ainsi l'angle $f$MN est égal à l'angle $v$MN; & celui-ci est égal à l'angle opposé au sommet FMP. Par conséquent, un rayon de lumiere $f$M, parti du point $f$, se réfléchira en F; faisant un angle de réflexion PMF, égal à son angle d'incidence NM$f$.

De même l'angle F$a$K est divisé en deux parties égales par la tangente ST; & un rayon de lumiere $fa$ se réfléchira en F, faisant un angle de réflexion S$a$F, égal à son angle d'incidence T$af$.

III°. Si la courbe elliptique SMX venoit à *faire une* révolution sur elle-même, autour de son axe *SX; elle* décriroit un *solide à concavité elliptique*, propre à réfléchir dans un même point F tous les rayons d'une bougie allumée au point $f$; & réciproquement. Un segment $x$S$s$ de ce solide concave, sera un *miroir concave elliptique.*

## PARAGRAPHE TROISIEME.

### *Sections coniques dans le cone.*

765. OBSERVATION. Nous avons fait voir au commencement de ce Traité, comment se forment les sections coniques dans le cône, par le moyen d'un plan qui coupe de différentes manieres ce cône, droit ou incliné, & d'une grandeur quelconque indéfiniment (738). Il nous reste à démontrer ici, que ces courbes ont dans le cône lui-même, les mêmes propriétés fondamentales que nous leur avons supposées sur un plan; & que par conséquent, les courbes que nous

avons observées sur un plan, sont les vraies sections coniques tirées du cône.

## THÉORÊME I.

766. *Dans la parabole, les quarrés des ordonnées sont entre eux comme les abscisses correspondantes.* (fig. 107.)

DÉMONSTRATION. Concevez que par le point *d* passe le plan d'un cercle parallele à la base du cône : concevez encore que par le sommet A du cône, soit faite une section triangulaire BAD, perpendiculaire à la base du cône.

I°. Si par le point S on fait une section parabolique MSM, perpendiculaire sur le plan du triangle BAD; le plan du cercle *bdb* ou BDB, & le plan de la parabole, se couperont aux points *mm* ou MM. Or le plan du cercle & le plan de la parabole sont chacun perpendiculaires au plan du triangle; donc leur commune section *mnm* ou MNM, sera perpendiculaire au plan du triangle; puisque cette section est une ligne du plan de la parabole, lequel est supposé perpendiculaire au plan du triangle. Donc *nm* ou NM sera aussi perpendiculaire tant au diametre *bd* ou BD du cercle, qu'à l'axe SN de la parabole. Donc les lignes *nm* & NM sont des ordonnées communes aux cercles & à la parabole.

II°. Or, par la propriété fondamentale du cercle, on a cette proportion ; $\overline{nm}^2 . \overline{NM}^2 :: nb \times nd . NB \times ND$ :

Et à cause des paralleles AB & SN, qui donnent $nb = NB$, on aura $\overline{nm}^2 . \overline{NM}^2 :: nd . ND$. (220.)

III°. Mais à cause des triangles semblables S*nd* & SND, on a cette autre proportion : $nd . ND :: Sn . SN$.

Par conséquent, en comparant avec cette derniere

proportion, la proportion qui précede, on aura : $\overline{nm}$. $\overline{NM}$ :: S$n$ . SN. (168.)

Or cette derniere proportion signifie que les quarrés des ordonnées $nm$ & NM, sont entre eux comme les abscisses correspondantes $n$S & NS. Par conséquent cette courbe MSM est une parabole, semblable à celle que nous avons construite sur un plan : puisqu'elle a les mêmes propriétés, ayant un même rapport entre ses ordonnées & ses abscisses (741). C.Q.F.D.

## THÉORÊME II.

767. *Dans l'ellipse, les quarrés des ordonnées sont entre eux, comme les rectangles des abscisses correspondantes.* (fig. 112.)

DÉMONSTRATION. I°. Faites passer par la section elliptique RER, deux plans paralleles à la base du cône : vous aurez deux cercles $vxv$ & VXV, qui couperont le plan de la section elliptique ; & on verra, comme dans le théorême précédent, que $nm$ & NM sont des ordonnées communes aux cercles & à l'ellipse. Faites aussi passer un plan par le point A & par l'axe ENR de la section elliptique : vous aurez un triangle BAD, dont les côtés passeront par les extrêmités du grand axe de la section elliptique.

II°. Par la propriété fondamentale du cercle (410), vous aurez : $\overline{nm}$ . $\overline{NM}$ :: $nx \times nv$ . NX $\times$ NV.

Mais les triangles semblables E$nv$ & ENV, donnent d'une part, $nv$ . NV :: E$n$ . EN.

Et les autres triangles semblables RNX & R$nx$, donnent d'une autre part, : $nx$ . NX :: R$n$ . RN.

III°. Multipliez ces deux dernieres proportions l'une par l'autre : les produits feront encore en proportion (224) ; & vous aurez : $nv \times nx$ . NV $\times$ NX :: E$n \times n$R . EN $\times$ RN.

Reprenant donc la premiere proportion, vous aurez: $\overline{nm}^2 . \overline{NM}^2 :: En \times nR . EN \times RN$. (168.)

Or dans cette derniere proportion, les deux derniers termes, qui forment la seconde raison, sont les rectangles des abscisses correspondantes : donc dans cette courbe, les quarrés des ordonnées sont entre eux comme les rectangles des abscisses correspondantes.

IV°. Si on construit une ellipse sur un plan, d'après la théorie que nous avons donnée ailleurs (749); après l'avoir coupée obliquement par deux cercles dont les circonférences atteignent chacune deux points de la courbe elliptique également éloignés du sommet E ou R, on trouvera & on démontrera de la même maniere, que dans cette ellipse les quarrés des ordonnées sont entre eux comme les rectangles des abscisses correspondantes. Par conséquent, cette courbe RER est une ellipse, de même que celle que nous avons observée sur un plan : puisqu'elle a la même nature & les mêmes propriétés, ayant un même rapport entre les quarrés de ses ordonnées & les rectangles de ses abscisses correspondantes. On peut donc appliquer à la courbe REN, tout ce que nous avons dit ailleurs de l'ellipse considérée sur un plan. C.Q.F.D.

## THÉORÊME III.

768. *Dans une hyperbole quelconque; les quarrés des ordonnées sont entre eux, comme les produits ou les rectangles des abscisses correspondantes.* (fig. 125.)

DÉMONSTRATION. Soit l'hyperbole IHP, dont une ordonnée est PK, & dont les abscisses correspondantes à cette ordonnée, sont HK & OK (738. V°.). Il s'agit de démontrer que $\overline{PK}^2 . \overline{pk}^2 :: HK \times OK . Hk \times Ok$.

I°. A cause des cercles paralleles BDB & *bdb*, on a,

par la propriété fondamentale du cercle, $\overline{PK}^2 = KD \times KB$, & $\overline{pk}^2 = kd \times kb$ : donc $\overline{PK}^2 . \overline{pk}^2 :: KD \times KB . kd \times kb$.

II°. A cause des deux triangles semblables BKO & *bk*O, on a KB . *kb* :: KO . *k*O.

Et à cause des deux autres triangles semblables HKD & H*kd*, on a aussi KD . *kd* :: HK . H*k*.

Multipliant donc les uns par les autres les termes de ces deux dernieres proportions, on aura la proportion suivante : $KD \times KB . kd \times kb :: HK \times OK . Hk \times Ok$.

III°. On a eu d'abord $\overline{PK}^2 . \overline{pk}^2 :: HK \times OK . Hk \times OK$. Donc puisque dans ces deux dernieres proportions, la seconde raison est la même ; *les deux premieres raisons sont égales entre elles, & on peut substituer l'une à l'autre* : donc $\overline{PK}^2 . \overline{pk}^2 :: HK \times OK . Hk \times OK$. Or cette derniere proportion signifie précisément que les quarrés des ordonnées sont entre eux, comme les rectangles des abscisses correspondantes : ainsi que l'énonce le théorême. C. Q. F. D.

769. HYPOTHESE. *Soit un cône droit* BAD, *d'une grandeur indéfinie*. (fig. 125.)

I°. Coupons ce cône par le sommet A, avec un plan perpendiculaire à la base : la section sera un triangle MAN.

Coupons le même par le côté en H, avec un plan perpendiculaire à la base, & parallele à celui qui vient de donner le triangle : la section sera une hyperbole IHP.

II°. Si l'on conçoit que la section triangulaire & la section hyperbolique soient posées sur un même plan, en telle sorte que les côtés du triangle embrassent les *branches* de la courbe hyperbolique, sans la toucher ;

ces côtés du triangle seront les *asymptotes de l'hyperbole*. Nous allons nous borner à considérer ici les branches & les asymptotes de l'hyperbole, dans le cône.

## THÉORÈME IV.

770. *Dans l'hyperbole, les branches s'approchent toujours de plus en plus des asymptotes, sans jamais les toucher, quelque prolongées qu'on les suppose.* (fig. 125.)

DÉMONSTRATION. I°. En supposant ici les deux sections dont nous venons de parler dans l'hypothese précédente; il est clair que les côtés du triangle MAN, seront appuyés sur le diametre MN du cercle qui forme la base du cône; & que les branches de l'hyperbole parallele IHP, seront appuyées sur une corde PI du même cercle, corde parallele au diametre.

Or plus le cône sera prolongé, plus le cercle de la base deviendra grand; & plus ce cercle deviendra grand, plus la corde qui n'est éloignée du centre du cercle que d'une quantité déterminée, par exemple, d'un pied, approchera de l'égalité avec le diametre de ce cercle. Donc les branches de l'hyperbole, appuyées sur la corde parallele au diametre, s'approcheront toujours de plus en plus à l'infini des côtés du triangle appuyé sur le diametre.

II°. Mais quelque prolongé qu'on suppose le cône, ou quelque grand que l'on suppose le cercle de la base; on conçoit clairement que la corde differera toujours du diametre, & sera toujours plus petite que le diametre : donc les branches de l'hyperbole n'auront jamais une ouverture égale à celle des côtés du triangle.

III°. Mais si l'on conçoit pour un moment que les branches de l'hyperbole sont sur un même plan que

les côtés du triangle ; ces côtés du triangle seront les asymptotes de l'hyperbole : donc dans l'hyperbole, les branches s'approchent de plus en plus à l'infini des asymptotes, sans pouvoir jamais les atteindre & les toucher, quelque prolongées qu'on les suppose. C. Q. F. D.

## THÉORÈME V.

171. *Un plan qui coupe un cône, ne peut pas y faire des sections d'où résultent des figures différentes du triangle, du cercle, de l'ellipse, de la parabole, & de l'hyperbole.* (fig. 107 & 112.)

DÉMONSTRATION. Le plan coupant commence nécessairement sa section ou par le sommet du cône, ou par un point de la surface du cône.

I°. Si le plan commence sa section au sommet du cône ; il est évident que la section sera un triangle BAD, perpendiculaire ou oblique à la base du cône.

II°. Si le plan commence sa section à un point de la surface du cône ; il peut arriver ou que le plan coupant, indéfiniment prolongé, sorte du cône indéfiniment prolongé ; ou que ce même plan reste toujours en dedans du cône dont la base devient toujours plus grande, à mesure qu'elle s'éloigne indéfiniment du sommet.

Dans le *premier cas*, le plan coupant qui sort du cône, sera ou parallele à la base, & alors la section donnera un cercle ; ou incliné à la base, & alors la section donnera une ellipse.

Dans le *second cas*, le plan coupant qui reste toujours en dedans du cône indéfiniment prolongé, sera ou parallele au côté du cône, & alors la section sera une parabole ; ou non parallele au côté du cône, & alors la section sera une hyperbole (738). Donc il n'est pas possible qu'un plan fasse dans un cône, d'autres

ſections que celles que nous venons de nommer & qu'on appelle les cinq ſections coniques. C. Q. F. D.

772. COROLLAIRE. *Dans les ſections coniques, le cercle & l'ellipſe ſont les deux ſeules courbes régulieres, qui rentrent ſur elles-mêmes* : puiſque le triangle, la parabole & l'hyperbole vont en s'écartant à l'infini ſur la ſurface toujours croiſſante du cône indéfiniment prolongé.

773. CONCLUSION. Telles ſont les connoiſſances les plus ſimples & les plus intéreſſantes, que peut fournir la théorie des ſections coniques. Ces connoiſſances, jointes à celles que donnent les autres parties de cet Ouvrage, ſuffiſent abondamment pour conduire un amateur des ſciences & des arts, dans toute la partie la plus brillante & la plus intéreſſante de la Nature, dans tout ce que les ſciences phyſico-mathématiques renferment de plus utile & de plus curieux, de plus propre à étendre, à ſatisfaire, à enrichir & à perfectionner les lumieres de l'Eſprit humain.

*FIN DE LA GÉOMÉTRIE.*

# TABLE DES SINUS.

## AVERTISSEMENT.

Nous avons fait voir dans la Trigonométrie rectiligne, comment on a pu trouver les ſinus de tous les angles & de tous les arcs quelconques (697); & quel eſt l'uſage de ces ſinus, dont on a formé des Tables completes, d'après des calculs infiniment précis (702). La *Table des Sinus*, que nous donnons ici, eſt tirée des grandes Tables d'Ulac & d'Ozanam, dont tous les Géometres connoiſſent l'exactitude.

Comme on a beſoin preſque ſans ceſſe d'une Table des ſinus, dans l'étude de la Géométrie & de la Phyſique; nous avons penſé qu'on ſeroit *bien aiſe de* trouver dans un ſeul & même ouvrage, tout ce qui eſt abſolument néceſſaire dans l'étude de ces deux Sciences. (708.)

### Observation I.

I°. On trouvera dans cette Table, les ſinus de tous les *angles aigus*, juſqu'à *l'angle droit*; *ou les* ſinus de tous les angles, depuis une *minute*, *juſ-*qu'à 90 degrés incluſivement.

II°. Les ſinus des *angles obtus* étant les mêmes que les ſinus des angles aigus qui ſont leur ſupplément (636); il s'enſuit que pour avoir le ſinus d'un angle obtus, il faut prendre le ſinus de ſon ſupplément. Par exemple, pour avoir dans les Tables, le ſinus d'un angle de 124 degrés & 17 minutes, il faut ſouſtraire de 180 degrés = 179 degrés + 60 minutes, l'angle obtus donné 124 degrés + 17 minutes : le reſte 55 degrés 43 minutes, ſera l'angle de ſupplément; & le ſinus de cet angle 55 degrés 43 minutes, ſera le ſinus de l'angle obtus donné 124 degrés 17 minutes.

III°. Le ſinus total dans cette Table, eſt ſuppoſé de 10000000 parties : le nombre qui exprime les autres ſinus, décroit proportionellement comme les ſinus ; de ſorte que quand un ſinus eſt de moitié plus petit que le rayon ou le ſinus total, le nombre qui l'exprime, eſt de moitié plus petit que le nombre qui exprime le ſinus total ; & ainſi du reſte.

IV°. Quand on n'a pas beſoin d'une infinie préciſion dans les calculs trigonométriques, on néglige & on ne met point dans le calcul, les deux chifres qui ſuivent le point intercalaire de chaque ſinus ; mais on augmente d'une unité le chifre qui précede le point intercalaire, quand les deux chifres ſuivans valent plus de 50. (697).

V°. Dans les Tables des ſinus, on ne trouve pas les ſinus des angles moindres qu'une minute : par exemple, on n'y trouve pas les ſinus d'un angle de 10 ou de 30 ſecondes, dont on a quelquefois beſoin, ſur-tout dans l'aſtronomie. Pour obvier à cet inconvénient, nous avons donné une méthode très-ſimple & très-facile, qui apprend à transformer les tables ordinaires des ſinus, en tables des ſinus des ſecondes. (717).

### OBSERVATION II.

On peut remarquer dans cette Table des ſinus, ou à l'occaſion de cette Table des ſinus :

I°. Que les ſinus vont en augmentant, d'une minute à la minute ſuivante, d'une quantité aſſez conſtante.

II°. Que l'augmentation, d'une minute à la minute ſuivante, devient moindre à meſure que l'angle devient plus grand ; & qu'elle devient ſenſiblement nulle, quand l'angle approche de l'angle droit.

III°. Que s'il y avoit par hazard quelque chi-

fre mal formé dans l'impreſſion, on verroit aiſément par le raport des ſinus précédens & des ſinus ſuivans, quel doit être ce chifre équivoque.

IV°. Que l'on peut aiſément & de la même maniere, s'aſſurer que les ſinus que l'on prend pour réſoudre un triangle, ſont exacts & ne contiennent aucune faute ; ſi par hazard on avoit quelque doute en ce genre.

## OBSERVATION III.

On a vu, dans la Trigonométrie, comment on trouve les *cordes de tous les arcs*, depuis une minute jusqu'à 180 degrés ; & comment en prenant les moitiés de toutes ces cordes ſucceſſivement trouvées, on a les *ſinus de tous les arcs &* de tous les angles meſurés par ces arcs, *depuis* l'angle d'une minute, juſqu'à l'angle droit ou de 90 degrés.

Maintenant, puiſque ces ſinus ſont ſuppoſés connus dans cette Table, & que chaque ſinus connu eſt la *moitié d'une corde* qui ſoutiendroit un arc double ; il eſt clair que par *le moyen de* cette Table des ſinus, on pourra aiſément *trouver les cordes inconnues de tous les arcs quelconques :* puiſqu'il ne s'agit, pour trouver la corde inconnue d'un arc donné, que de prendre deux fois, ou de multiplier par 2, le ſinus de la moitié de cet arc. Par exemple, pour avoir la corde d'un arc de 21 degrés, prenez deux fois le ſinus de l'arc de 10 degrés 30 minutes.

A la fin de cette Table des ſinus, ſe trouvent les Tangentes & les Sécantes de tous les arcs, depuis une minute juſqu'à 30 minutes : ce ſont celles dont l'uſage eſt le plus fréquent, ſurtout dans le nivellement. On trouvera aiſément les autres par le calcul, quand on en aura beſoin. (723 & 724).

# TABLE DES SINUS.

| 0 Degrés. | | | | 1 Degré. | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| M | Sinus. | M | Sinus. | M | Sinus. | M | Sinus. |
| 0 | 0 | 30 | 872.65 | 0 | 1745.24 | 30 | 2617.69 |
| 1 | 29.09 | 31 | 901.74 | 1 | 1774.32 | 31 | 2646.77 |
| 2 | 58.18 | 32 | 930.83 | 2 | 1803.41 | 32 | 2675.85 |
| 3 | 87.27 | 33 | 959.92 | 3 | 1832.49 | 33 | 2704.93 |
| 4 | 116.36 | 34 | 989.00 | 4 | 1861.58 | 34 | 2734.01 |
| 5 | 145.44 | 35 | 1018.00 | 5 | 1890.66 | 35 | 2763.09 |
| 6 | 174.53 | 36 | 1047.18 | 6 | 1919.74 | 36 | 2792.16 |
| 7 | 203.62 | 37 | 1076.27 | 7 | 1948.83 | 37 | 2821.24 |
| 8 | 232.71 | 38 | 1105.35 | 8 | 1977.91 | 38 | 2850.32 |
| 9 | 261.80 | 39 | 1134.44 | 9 | 2006.99 | 39 | 2879.40 |
| 10 | 290.89 | 40 | 1163.53 | 10 | 2036.08 | 40 | 2908.47 |
| 11 | 319.98 | 41 | 1192.61 | 11 | 2065.16 | 41 | 2937.55 |
| 12 | 349.06 | 42 | 1221.70 | 12 | 2094.24 | 42 | 2966.62 |
| 13 | 378.15 | 43 | 1250.79 | 13 | 2123.32 | 43 | 2995.70 |
| 14 | 407.24 | 44 | 1279.87 | 14 | 2152.41 | 44 | 3024.78 |
| 15 | 436.33 | 45 | 1308.96 | 15 | 2181.49 | 45 | 3053.85 |
| 16 | 465.42 | 46 | 1338.05 | 16 | 2210.57 | 46 | 3082.93 |
| 17 | 494.51 | 47 | 1367.13 | 17 | 2239.65 | 47 | 3112.00 |
| 18 | 523.60 | 48 | 1396.22 | 18 | 2268.73 | 48 | 3141.08 |
| 19 | 552.68 | 49 | 1425.30 | 19 | 2297.81 | 49 | 3170.15 |
| 20 | 581.77 | 50 | 1454.39 | 20 | 2326.90 | 50 | 3199.22 |
| 21 | 610.86 | 51 | 1483.48 | 21 | 2355.98 | 51 | 3228.30 |
| 22 | 639.95 | 52 | 1512.56 | 22 | 2385.06 | 52 | 3257.37 |
| 23 | 669.04 | 53 | 1541.65 | 23 | 2414.14 | 53 | 3286.44 |
| 24 | 698.13 | 54 | 1570.73 | 24 | 2443.22 | 54 | 3315.52 |
| 25 | 727.21 | 55 | 1599.82 | 25 | 2472.30 | 55 | 3344.59 |
| 26 | 756.30 | 56 | 1628.90 | 26 | 2501.38 | 56 | 3373.66 |
| 27 | 785.39 | 57 | 1657.99 | 27 | 2530.46 | 57 | 3402.73 |
| 28 | 814.48 | 58 | 1687.07 | 28 | 2559.54 | 58 | 3431.82 |
| 29 | 843.57 | 59 | 1716.16 | 29 | 2588.62 | 59 | 3460.88 |
| 30 | 872.65 | 60 | 1745.24 | 30 | 2617.69 | 60 | 3489.95 |

| M | Sinus. | M | Sinus. | M | Sinus. | M | Sinus. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 3489.95 | 30 | 4361.94 | 0 | 5233.60 | 30 | 6104.85 |
| 1 | 3519.02 | 31 | 4391.00 | 1 | 5262.64 | 31 | 6133.89 |
| 2 | 3548.09 | 32 | 4420.06 | 2 | 5291.69 | 32 | 6162.92 |
| 3 | 3577.16 | 33 | 4449.12 | 3 | 5320.74 | 33 | 6191.96 |
| 4 | 3606.23 | 34 | 4478.18 | [illegible] | 5349.79 | 34 | 6220.99 |
| 5 | 3635.30 | 35 | 4507.24 | 5 | 5378.83 | 35 | 6250.02 |
| 6 | 3664.37 | 36 | 4536.30 | 6 | 5407.88 | 36 | 6279.05 |
| 7 | 3693.44 | 37 | 4565.36 | 7 | 5436.93 | 37 | 6308.08 |
| 8 | 3722.51 | 38 | 4594.42 | [illegible] | 5465.97 | 38 | 6337.11 |
| 9 | 3751.58 | 39 | 4623.47 | 9 | 5495.01 | 39 | 6366.14 |
| 10 | 3780.65 | 40 | 4652.53 | 10 | 5524.06 | 40 | 3395.17 |
| 11 | 3809.71 | 41 | 4681.59 | 11 | 5553.11 | 41 | 6424.20 |
| 12 | 3838.78 | 42 | 4710.64 | 12 | 5582.15 | 42 | 6453.23 |
| 13 | 3867.85 | 43 | 4739.70 | 13 | 5611.19 | 43 | 6482.26 |
| 14 | 3896.91 | 44 | 4768.76 | 14 | 5640.24 | 44 | 6511.29 |
| 15 | 3925.98 | 45 | 4797.81 | 15 | 5669.28 | 45 | 6540.31 |
| 16 | 3955.05 | 46 | 4826.87 | 16 | 5698.32 | 46 | 6569.34 |
| 17 | 3984.11 | 47 | 4855.92 | 17 | 5727.36 | 47 | 6598.36 |
| 18 | 4013.18 | 48 | 4884.98 | [illegible] | 5756.40 | 48 | 6627.39 |
| 19 | 4042.24 | 49 | 4914.03 | 19 | 5785.44 | 49 | 6656.41 |
| 20 | 4071.31 | 50 | 4943.08 | 20 | 5814.48 | 50 | 6685.44 |
| 21 | 4100.37 | 51 | 4972.14 | 21 | 5843.52 | 51 | 6714.46 |
| 22 | 4129.44 | 52 | 5001.19 | 22 | 5872.56 | 52 | 6743.48 |
| 23 | 4158.50 | 53 | 5030.24 | 23 | 5901.60 | 53 | 6772.51 |
| 24 | 4187.57 | 54 | 5059.29 | 24 | 5930.64 | 54 | 6801.53 |
| 25 | 4216.63 | 55 | 5088.35 | 25 | 5959.67 | 55 | 6830.55 |
| 26 | 4245.69 | 56 | 5117.40 | 26 | 5988.71 | 56 | 6859.57 |
| 27 | 4274.75 | 57 | 5146.45 | 27 | 6017.75 | 57 | 6888.59 |
| 28 | 4303.82 | 58 | 5175.50 | 28 | 6046.78 | 58 | 6917.61 |
| 29 | 4332.88 | 59 | 5204.55 | 29 | 6075.82 | 59 | 6946.63 |
| 30 | 4361.94 | 60 | 5233.60 | 30 | 6104.85 | 60 | 6975.65 |

| M | Sinus. | M | Sinus. | M | Sinus. | M | Sinus. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 6975.65 | 30 | 7845.91 | 0 | 8715.57 | 30 | 9584.58 |
| 1 | 7004.66 | 31 | 7874.91 | 1 | 8744.55 | 31 | 9613.53 |
| 2 | 7033.68 | 32 | 7903.91 | 2 | 8773.53 | 32 | 9642.48 |
| 3 | 7062.70 | 33 | 7932.90 | 3 | 8802.51 | 33 | 9671.44 |
| 4 | 7091.71 | 34 | 7961.90 | 4 | 8831.48 | 34 | 9700.39 |
| 5 | 7120.73 | 35 | 7990.90 | 5 | 8860.46 | 35 | 9729.34 |
| 6 | 7149.74 | 36 | 8019.89 | 6 | 8889.43 | 36 | 9758.29 |
| 7 | 7178.76 | 37 | 8048.89 | 7 | 8918.40 | 37 | 9787.24 |
| 8 | 7207.77 | 38 | 8077.88 | 8 | 8947.38 | 38 | 9816.19 |
| 9 | 7236.78 | 39 | 8106.87 | 9 | 8976.35 | 39 | 9845.14 |
| 10 | 7265.80 | 40 | 8135.87 | 10 | 9005.32 | 40 | 9874.08 |
| 11 | 7294.81 | 41 | 8164.86 | 11 | 9034.29 | 41 | 9903.03 |
| 12 | 7323.82 | 42 | 8193.85 | 12 | 9073.26 | 42 | 9931.97 |
| 13 | 7352.83 | 43 | 8222.84 | 13 | 9092.23 | 43 | 9960.92 |
| 14 | 7381.84 | [illegible] | 8251.83 | 14 | 9121.19 | 44 | 9989.86 |
| 15 | 7410.85 | 45 | 8280.82 | 15 | 9150.16 | 45 | 10018.81 |
| 16 | 7439.86 | 46 | 8309.81 | 16 | 9179.13 | 46 | 10047.75 |
| 17 | 7468.87 | 47 | 8338.80 | 17 | 9208.09 | 47 | 10076.69 |
| 18 | 7497.87 | 48 | 8367.78 | 18 | 9237.06 | 48 | 10105.63 |
| 19 | 7526.88 | 49 | 8396.77 | 19 | 9266.02 | 49 | 10134.57 |
| 20 | 7555.89 | 50 | 8425.76 | 20 | 9294.99 | [illegible] | 10163.51 |
| 21 | 7584.89 | 51 | 8454.74 | 21 | 9323.95 | 51 | 10192.45 |
| 22 | 7613.90 | 52 | 8483.73 | 22 | 9352.91 | 52 | 10221.38 |
| 23 | 7642.90 | 53 | 8512.71 | 23 | 9381.87 | 53 | 10250.32 |
| 24 | 7671.90 | 54 | 8641.69 | 24 | 9410.83 | 54 | 10279.25 |
| 25 | 7700.91 | 55 | 8570.67 | 25 | 9439.79 | 55 | 10308.19 |
| 26 | 7729.91 | 56 | 8599.66 | 26 | 9468.75 | 56 | 10337.12 |
| 27 | 7758.91 | 57 | 8528.64 | 27 | 9497.71 | 57 | 10366.05 |
| 28 | 7787.91 | 58 | 8657.62 | 28 | 9526.66 | 58 | 10394.99 |
| 29 | 7816.91 | 59 | 8686.60 | 29 | 9555.62 | 59 | 10423.92 |
| 30 | 7845.91 | 60 | 8715.57 | 30 | 9584.58 | 60 | 10452.85 |

| 6 Degrés. | | | | 7 Degrés. | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *M* | *Sinus.* | *M* | *Sinus.* | *M* | *Sinus.* | *M* | *Sinus.* |
| 0 | 10452.85 | 30 | 11320.31 | 0 | 12186.93 | 30 | 13052.62 |
| 1 | 10481.78 | 31 | 11349.21 | 1 | 12215.81 | 31 | 13081.46 |
| 2 | 10510,70 | 32 | 11378.11 | 2 | 12244.68 | 32 | 13110.30 |
| 3 | 10539.63 | 33 | 11407.01 | 3 | 12273.55 | 33 | 13139.13 |
| 4 | 10568.56 | 34 | 11435.91 | [illegible] | 12302.41 | 34 | 13167.97 |
| 5 | 10597.48 | 35 | 11464.81 | 5 | 12331.28 | 35 | 13196.81 |
| 6 | 10626,41 | 36 | 11493.71 | 6 | 12360.15 | 36 | 13225.64 |
| 7 | 10655.33 | 37 | 11522.61 | 7 | 12389.01 | 37 | 13254.47 |
| 8 | 10684.25 | 38 | 11551.51 | [illegible] | 12417.88 | 38 | 13283.30 |
| 9 | 10713.18 | 39 | 11580.40 | 9 | 12446.74 | 39 | 13312.13 |
| 10 | 10742.10 | 40 | 11609.29 | 10 | 12475.60 | 40 | 13340.96 |
| 11 | 10771.02 | 41 | 11638.18 | 11 | 12504.46 | 41 | 13369.79 |
| 12 | 10799.94 | 42 | 11667.07 | 12 | 12533.32 | 42 | 13398.62 |
| 13 | 10828.85 | 43 | 11695.96 | 13 | 12562.18 | 43 | 13427.44 |
| 14 | 10857.77 | 44 | 11724.85 | 14 | 12591.04 | 44 | 13456.27 |
| 15 | 10886.69 | 45 | 11753.74 | 15 | 12619.90 | 45 | 13485.09 |
| 16 | 10915.60 | 46 | 11782.63 | 16 | 12648.75 | 46 | 13513.92 |
| 17 | 10944.52 | [illegible] | 11811.51 | 17 | 12677.61 | 47 | 13542.74 |
| 18 | 10973.43 | 48 | 11840.40 | 18 | 12706.46 | 48 | 13571.56 |
| 19 | 11002.34 | 49 | 11869.28 | 19 | 12735.31 | 49 | 13600.38 |
| 20 | 11031.26 | 50 | 11898.16 | 20 | 12764.16 | 50 | 13629.19 |
| 21 | 11060,17 | 51 | 11927.04 | 21 | 12793.01 | 51 | 13658.01 |
| 22 | 11089.08 | 52 | 11955.93 | 22 | 12821.86 | 52 | 13686.83 |
| 23 | 11117.99 | 53 | 11984.81 | 23 | 12850.71 | 53 | 13715.64 |
| 24 | 11146.89 | 54 | 12012.68 | [illegible] | 12879.56 | 54 | 13744.45 |

# TABLE DES SINUS

| 8 Degrés. | | | | 9 Deg | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| M | Sinus. | M | Sinus. | M | Sinus. | M | |
| 0 | 13917.31 | 30 | 14780.94 | 0 | 15643.45 | 3 | |
| 1 | 13946.12 | 31 | 14809.71 | 1 | 15672.18 | 3 | |
| 2 | 13974.92 | 32 | 14838.48 | 2 | 15700.91 | 3 | |
| 3 | 14003.72 | 33 | 14867.24 | 3 | 15729.63 | 3 | |
| 4 | 14032.52 | 34 | 14896.01 | 4 | 15758.36 | 3 | |
| 5 | 14061.32 | 35 | 14924.77 | 5 | 15787.08 | 3 | |
| 6 | 14090.12 | 36 | 14953.53 | 6 | 15815.81 | 3 | |
| 7 | 14118.92 | 37 | 14982.30 | 7 | 15844.53 | 3 | |
| 8 | 14147.72 | 38 | 15011.06 | 8 | 15873.25 | 3 | |
| 9 | 14176.51 | 39 | 15039.81 | 9 | 15901.97 | 3 | |
| 10 | 14205.31 | 40 | 15068.57 | 10 | 15930.69 | 4 | |
| 11 | 14234.10 | 41 | 15097.33 | 11 | 15959.40 | 4 | |
| 12 | 14262.89 | 42 | 15126.08 | 12 | 15988.12 | 4 | |
| 13 | 14291.68 | 43 | 15154.84 | 13 | 16016.83 | 4 | |
| 14 | 14320.47 | 44 | 15183.59 | 14 | 16045.55 | 44 | |
| 15 | 14349.26 | 45 | 15212.34 | 15 | 16074.26 | 4 | |
| 16 | 14378.05 | 46 | 15241.09 | 16 | 16102.97 | 4 | |
| 17 | 14406.84 | 47 | 15269.84 | 17 | 16131.67 | 4 | |
| 13 | 14435.62 | 48 | 15298.58 | 18 | 16160.38 | 4 | |
| 19 | 14464.40 | 49 | 15327.33 | 19 | 16189.09 | 4 | |
| 20 | 14493.19 | 50 | 15356.07 | 20 | 16217.79 | 5 | |
| 21 | 14521.97 | 51 | 15384.82 | 21 | 16246.50 | 5 | |
| 22 | 14550.75 | 52 | 15413.56 | 22 | 16275.10 | 5 | |
| 23 | 14579.53 | 53 | 15442.30 | 23 | 16303.90 | 5 | |
| 24 | 14608.30 | 54 | 15471.04 | 24 | 16332.60 | 5 | |
| 25 | 14637.08 | 55 | 15499.78 | 25 | 16361.29 | 55 | 17221.56 |
| 26 | 1 | | | | | | |
| 27 | 1 | | | | | | |
| 28 | 1 | | | | | | |
| 29 | 1 | | | | | | |
| 30 | 1 | | | | | | |

| 10 Degrés. | | | | 11 Degrés. | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| M | Sinus. | M | Sinus. | M | Sinus. | M | Sinus. |
| 0 | 17364.82 | 30 | 18223.55 | 0 | 19080.90 | 30 | 19936.79 |
| 1 | 17393.46 | 31 | 18252.15 | 1 | 19109.45 | 31 | 19965.30 |
| 2 | 17422.11 | 32 | 18280.75 | 2 | 19138.00 | 32 | 19993.80 |
| 3 | 17450.75 | 33 | 18309.35 | 3 | 19166.55 | 33 | 20022.30 |
| 4 | 17479.39 | 34 | 18337.95 | 4 | 19195.10 | 34 | 20050.80 |
| 5 | 17508.03 | 35 | 18366.54 | 5 | 19223.65 | 35 | 20079.30 |
| 6 | 17536.67 | 56 | 18395.13 | 6 | 19252.20 | 36 | 20107.79 |
| 7 | 17565.31 | 37 | 18423.73 | 7 | 19280.74 | 37 | 20136.29 |
| 8 | 17593.95 | 38 | 18452.32 | 8 | 19309.28 | 38 | 20164.78 |
| 9 | 17622.58 | 39 | 18480.91 | 9 | 19337.82 | 39 | 20193.27 |
| 10 | 17651.21 | 40 | 18509.49 | 10 | 19366.36 | 40 | 20221.76 |
| 11 | 17679.84 | 41 | 18538.08 | 11 | 19394.90 | 41 | 20250.24 |
| 12 | 17708.47 | 42 | 18566.66 | 12 | 19423.44 | 42 | 20278.73 |
| 13 | 17737.10 | 43 | 18595.24 | 13 | 19451.97 | 43 | 20307.21 |
| 14 | 17765.73 | 44 | 18623.82 | 14 | 19480.50 | 44 | 20335.69 |
| 15 | 17794.35 | 45 | 18652.40 | 15 | 19509.03 | 45 | 20364.17 |
| 16 | 17822.98 | 46 | 18680.98 | | | | |
| 17 | 17851.60 | 47 | 18709.56 | | | | |
| 18 | 17880.22 | 48 | 18738.13 | | | | |
| 19 | 17908.84 | 49 | 18766.70 | | | | |
| 20 | 17937.46 | 50 | 18795.27 | | | | |
| 21 | 17966.07 | 51 | 18823.84 | | | | |
| 22 | 17994.69 | 52 | 18852.41 | | | | |
| 23 | 18023.30 | 53 | 18880.98 | | | | |
| 24 | 18051.91 | 54 | 18909.54 | | | | |
| 25 | 18080.52 | 55 | 18938.11 | | | | |
| 26 | 18109.13 | 56 | 18966.67 | | | | |
| 27 | 18137.74 | 57 | 18995.23 | | | | |
| 28 | 18166.35 | 58 | 19023.79 | | | | |
| 29 | 18194.95 | 59 | 19052.34 | | | | |
| 30 | 18223.55 | 60 | 19080.90 | | | | |

| | EGRÉS. | | 13 DEGR | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | M | Sinus. | M | Sinus. | M | |
| 7 | 30 | 21643.96 | 0 | 22495.11 | 30 | 23344.54 |
| 2 | 31 | 21672.36 | 1 | 22523.45 | 31 | 23372.82 |
| 7 | 32 | 21700.76 | 2 | 22551.79 | 32 | 23401.10 |
| 2 | 33 | 21729.15 | 3 | 22580.13 | 33 | 23429.38 |
| 7 | 34 | 21757.54 | 4 | 22608.46 | 34 | 23457.66 |
| 1 | 35 | 21785.93 | 5 | 22636.80 | 35 | 23485.94 |
| 6 | 36 | 21814.32 | 6 | 22665.13 | 36 | 23514.21 |
| 0 | 37 | 21842.71 | 7 | 22693.46 | 37 | 23542.48 |
| 4 | 38 | 21871.10 | 8 | 22721.79 | 38 | 23570.75 |
| 8 | 39 | 21899.48 | 9 | 22750.12 | 39 | 23599.02 |
| 1 | 40 | 21927.86 | 10 | 22778.44 | 40 | 23627.29 |
| 5 | 41 | 21956.24 | 11 | 22806.77 | 41 | 23655.55 |
| 8 | 42 | 21984.62 | 12 | 22835.09 | 42 | 23683.81 |
| 1 | 43 | 22013.00 | 13 | 22863.41 | 43 | 23712.07 |
| 4 | 44 | 22041.37 | 14 | 22891.72 | 44 | 23740.33 |
| 7 | 45 | 22069.74 | 15 | 22920.04 | 45 | 23768.59 |
| 9 | 46 | 22098.11 | 16 | 22948.35 | 46 | 23796.84 |
| 4 | 47 | 22126.48 | 17 | 22976.66 | 47 | 23825.10 |
| 4 | 48 | 22154.85 | 18 | 23004.97 | 48 | 23853.35 |
| 6 | 49 | 22183.21 | 19 | 23033.28 | 49 | 23881.59 |
| 8 | 50 | 22211.58 | 20 | 23061.59 | 50 | 23909.84 |
| 9 | 51 | 22239.94 | 21 | 23089.89 | 51 | 23938.08 |
| 1 | 52 | 22268.30 | 22 | 23118.19 | 52 | 23966.33 |
| 8 | 53 | 22296.66 | 23 | 23146.49 | 53 | 23994.57 |
| 3 | 54 | 22325.01 | 24 | 23174.79 | 54 | 24022.80 |
| 4 | 55 | 22353.37 | 25 | 23203.09 | 55 | 24051.04 |
| 5 | 56 | 22381.72 | 26 | 23231.38 | 56 | 24079.27 |
| 6 | 57 | 22410.07 | 27 | 23259.67 | 57 | 24107.51 |
| 6 | 58 | 22438.41 | 28 | 23287.96 | 58 | 24135.74 |
| 6 | 59 | 22466.76 | 29 | 23316.25 | 59 | 24163.96 |
| 6 | 60 | 22495.11 | 30 | 23344.54 | 60 | 24192.19 |

S1

| M | Sinus. | M | Sinus. | M | Sinus. | M | Sinus. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 24192.19 | 30 | 25038.00 | 0 | 25881.90 | 30 | 26723.84 |
| 1 | 24220.41 | 31 | 25066.16 | 1 | 25910.00 | 31 | 26751.87 |
| 2 | 24248.63 | 32 | 25094.32 | 2 | 25938.10 | 32 | 26779.89 |
| 3 | 24376.85 | 33 | 25122.48 | 3 | 25966.19 | 33 | 26807.92 |
| 4 | 24305.07 | 34 | 25150.63 | 4 | 25994.28 | 34 | 26835.94 |
| 5 | 24333.29 | 35 | 25178.79 | 5 | 26022.37 | 35 | 26863.96 |
| 6 | 24361.50 | 36 | 25206.94 | 6 | 26050.45 | 36 | 26891.98 |
| 7 | 24389.71 | 37 | 25235.08 | 7 | 26078.53 | 37 | 26920.00 |
| 8 | 24417.92 | 38 | 25263.23 | 8 | 26106.61 | 38 | 26948.01 |
| 9 | 24446.13 | 39 | 25291.37 | 9 | 26134.69 | 39 | 26976.02 |
| 10 | 24474.33 | 40 | 25319.52 | 10 | 26162.77 | 40 | 27004.03 |
| 11 | 24502.94 | 41 | 25347.66 | 11 | 26190.85 | 41 | 27032.04 |
| 12 | 24530.74 | 42 | 25375.79 | 12 | 26218.92 | 42 | 27060.04 |
| 13 | 24558.94 | 43 | 25403.93 | 13 | 26246.99 | 43 | 27088.05 |
| 14 | 24587.13 | 44 | 25432.06 | 14 | 26275.06 | 44 | 27116.05 |
| 15 | 24615.33 | 45 | 25460.19 | 15 | 26303.12 | 45 | 27144.04 |
| 16 | 24643.52 | 46 | 25488.32 | 16 | 26331.18 | 46 | 27172.04 |
| 17 | 24671.71 | 47 | 25516.45 | 17 | 26359.24 | 47 | 27200.03 |
| 18 | 24699.90 | 48 | 25544.58 | 18 | 26387.30 | 48 | 27228.02 |
| 19 | 24728.09 | 49 | 25572.70 | 19 | 26415.36 | 49 | 27256.01 |
| 20 | 24756.27 | 50 | 25600.82 | 20 | 26443.42 | 50 | 27284.00 |
| 21 | 24784.45 | 51 | 25628.94 | 21 | 26471.47 | 51 | 27311.98 |
| 22 | 24812.63 | 52 | 25657.05 | 22 | 26499.52 | 52 | 27339.96 |
| 23 | 24840.81 | 53 | 25685.17 | 23 | 26527.57 | 53 | 27367.94 |
| 24 | 24868.99 | 54 | 25713.99 | 24 | 26555.61 | 54 | 27395.92 |
| 25 | 24897.16 | 55 | 25741.99 | 25 | 26583.65 | 55 | 27423.90 |
| 26 | 24925.33 | 56 | 25769.50 | 26 | 26611.69 | 56 | 27451.87 |
| 27 | 24953.50 | 57 | 25797.60 | 27 | 26639.73 | 57 | 27479.84 |
| 28 | 24981.67 | 58 | 25825.70 | 28 | 26667.77 | 58 | 27507.81 |
| 29 | 25009.84 | 59 | 25853.81 | 29 | 26695.81 | 59 | 27535.78 |
| 30 | 25038.00 | 60 | 25881.90 | 30 | 26723.84 | 60 | 27563.74 |

| M | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | | | | | |
| 1 | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | | | |
| 7 | | | | | | | | | |
| 8 | | | | | | | | | |
| 9 | | | | | | | | | |
| 10 | | | | | | | | | |
| 11 | | | | | | | | | |
| 12 | | | | | | | | | |
| 13 | | | | | | | | | |
| 14 | | | | | | | | | |
| 15 | | | | | | | | | |
| 16 | 28010.83 | 46 | 28847.48 | | [illegible] | 29681.94 | 46 | 30514.13 | |
| 17 | 28038.75 | 47 | 28875.33 | | 17 | 29709.71 | 47 | 30541.83 | |
| 18 | 28066.67 | 48 | 28903.18 | | 18 | 29737.49 | 48 | 30569.53 | |
| 19 | 28094.59 | [illegible] | 28931.03 | | 19 | 29765.26 | 49 | 30597.23 | |
| 20 | 28122.51 | 50 | 28958.87 | | 20 | 29793.03 | 50 | 30624.92 | |
| 21 | 28150.42 | 51 | 28986.71 | | 21 | 29820.79 | 51 | 30652.61 | |
| 22 | 28178.33 | 52 | 29014.55 | | 22 | 29848.56 | 52 | 30680.29 | |
| 23 | 28206.24 | 53 | 29042.39 | | 23 | 29876.32 | 53 | 30707.98 | |
| 24 | 28234.15 | 54 | 29070.22 | | 24 | 29904.08 | 54 | 30735.66 | |
| 25 | 28262.05 | 55 | 29098.05 | | 25 | 29931.84 | 55 | 30763.34 | |
| 26 | 28289.95 | 56 | 29125.88 | | 26 | 29959.59 | 56 | 30791.02 | |
| 27 | 28317.85 | 57 | 29153.71 | | 27 | 29987.34 | 57 | 30818.69 | |
| 28 | 28345.75 | 58 | 29181.53 | | 28 | 30015.09 | 58 | 30846.36 | |
| 29 | 28373.64 | 59 | 29209.35 | | 29 | 30042.84 | 59 | 30874.03 | |
| 30 | 28401.53 | 60 | 29237.17 | | 30 | 30070.58 | 60 | 30901.70 | |

## 18 Degrés

| M | Sinus. | M | Sinus. |
|---|---|---|---|
| 0 | 30901.70 | 30 | 3173 |
| 1 | 30929.36 | 31 | 3175 |
| 2 | 30957.03 | 32 | 3178 |
| 3 | 30984.68 | 33 | 3181 |
| 4 | 31012.34 | 34 | 3184 |
| 5 | 31039.99 | 35 | 3186 |
| 6 | 31067.64 | 36 | 3189 |
| 7 | 31095.29 | 37 | 3192 |
| 8 | 31122.94 | 38 | 3195 |
| 9 | 31150.58 | 39 | 3197 |
| 10 | 31178.22 | 40 | 3200 |
| 11 | 31205.86 | 41 | 3203 |
| 12 | 31233.49 | 42 | 3206 |
| 13 | 31261.12 | 43 | 3208 |
| 14 | 31288.75 | 44 | 3211 |
| 15 | 31316.38 | 45 | 3214 |
| 16 | 31344.00 | 46 | 3217 |
| 17 | 31371.63 | 47 | 3219 |
| 18 | 31399.25 | 48 | 3222 |
| 19 | 31426.86 | 49 | 3225 |
| 20 | 31454.48 | 50 | 3228 |
| 21 | 31482.09 | 51 | 3230 |
| 22 | 31509.69 | 52 | 3233 |
| 23 | 31537.30 | 53 | 3236 |
| 24 | 31564.90 | 54 | 3239 |
| 25 | 31592.50 | 55 | 3241 |
| 26 | 31620.10 | 56 | 3244 |
| 27 | 31647.70 | 57 | 3247 |
| 28 | 31675.29 | 58 | 3250 |
| 29 | 31702.88 | 59 | 3252 |
| 30 | 31730.47 | 60 | 3255 |

## 19 Degrés

| M | Sinus. | M | Sinus. |
|---|---|---|---|
| 0 | 32556.82 | 30 | 33380.69 |
| 1 | 32584.32 | 31 | 33408.10 |
| 2 | 32611.82 | 32 | 33435.52 |
| 3 | 32639.31 | 33 | 33462.93 |
| 4 | 32666.81 | 34 | 33490.34 |
| 5 | 32694.30 | 35 | 33517.75 |
| 6 | 32721.79 | 36 | 33545.16 |
| 7 | 32749.28 | 37 | 33472.56 |
| 8 | 32776.76 | 38 | 33599.96 |
| 9 | 32804.24 | 39 | 33627.35 |
| 10 | 32831.72 | 40 | 33654.75 |
| 11 | 32859.19 | 41 | 33682.14 |
| 12 | 32886.66 | 42 | 33709.53 |
| 13 | 32914.13 | 43 | 33736.91 |
| 14 | 32941.60 | 44 | 33764.29 |
| 15 | 32969.06 | 45 | 33791.67 |
| 16 | 32996.52 | 46 | 33819.05 |
| 17 | 33023.98 | 47 | 33846.42 |
| 18 | 33051.44 | 48 | 33873.79 |
| 19 | 33078.89 | 49 | 33901.16 |
| 20 | 33106.34 | 50 | 33928.53 |
| 21 | 33133.79 | 51 | 33955.89 |
| 22 | 33161.23 | 52 | 33983.25 |
| 23 | 33188.67 | 53 | 34010.60 |
| 24 | 33216.11 | 54 | 34037.95 |
| 25 | 33243.55 | 55 | 34065.30 |
| 26 | 33270.98 | 56 | 34092.65 |
| 27 | 33298.41 | 57 | 34120.00 |
| 28 | 33325.84 | 58 | 34147.34 |
| 29 | 33353.27 | 59 | 34174.[illegible] |
| 30 | 35380.69 | 60 | 34202.[illegible] |

| 20 Degrés. | | | | 21 Degrés. | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *M* | *Sinus.* | *M* | *Sinus.* | *M* | *Sinus.* | *M* | *Sinus.* |
| 0 | 34202.02 | 30 | 35020.74 | 0 | 35856.79 | 30 | 36650.13 |
| 1 | 34229.35 | 31 | 35047.99 | 1 | 35863.95 | 31 | 36677.19 |
| | 34256.68 | 32 | 35075.23 | 2 | 35891.10 | 32 | 36704.25 |
| | 34284.01 | 33 | 35102.47 | 3 | 35918.25 | 33 | 36731.31 |
| | 34311.33 | 34 | 35129.70 | 4 | 35945.40 | 34 | 36758.36 |
| | 34338.65 | 35 | 35156.93 | 5 | 35972.54 | 35 | 36785.41 |
| | 34365.97 | 36 | 35184.16 | 6 | 35999.68 | 36 | 36812.46 |
| | 34393.29 | 37 | 35211.39 | 7 | 36026.82 | 37 | 36839.50 |
| | 34420.60 | 38 | 35238.62 | 8 | 36053.95 | 38 | 36866.54 |
| | 34447.91 | 39 | 35265.84 | 9 | 36081.08 | 39 | 36893.58 |
| | 34475.22 | 40 | 35293.06 | 10 | 36108.22 | 40 | 36920.62 |
| | 34502.52 | 41 | 35320.27 | 11 | 36135.33 | 41 | 36947.65 |
| | 34529.82 | 42 | 35347.48 | 12 | 36162.46 | 42 | 36974.68 |
| | 34557.12 | 43 | 35374.69 | 13 | 36189.58 | 43 | 37001.70 |
| | 34584.42 | 44 | 35401.90 | 14 | 36216.69 | 44 | 37028.72 |
| | 34611.71 | 45 | 35429.10 | 15 | 36243.80 | 45 | 37055.74 |
| | 34639.00 | 46 | 35456.30 | 16 | 36270.91 | 46 | 37082.76 |
| | 34666.29 | 47 | 35483.50 | 17 | 36298.02 | 47 | 37109.77 |
| | 34693.57 | 48 | 35510.70 | 18 | 36325.12 | 48 | 37136.78 |
| | 34720.85 | 49 | 35537.89 | 19 | 36352.22 | 49 | 37163.79 |
| | 34748.13 | 50 | 35565.08 | 20 | 36379.32 | 50 | 37190.80 |
| | 34775.40 | 51 | 35592.26 | 21 | 36406.41 | 51 | 37217.80 |
| | 34802.67 | 52 | 35619.44 | 22 | 36433.50 | 52 | 47244.80 |
| | 34829.94 | 53 | 35645.62 | 23 | 36460.59 | 53 | 37271.79 |
| | 34857.21 | 54 | 35673.80 | 24 | 36487.68 | 54 | 37298.78 |
| | 34884.47 | 55 | 35700.97 | 25 | 36514.76 | 55 | 37325.77 |
| | 34911.73 | 56 | 35728.14 | 26 | 36541.84 | 56 | 37352.75 |
| | 34938.99 | 57 | 35755.32 | 27 | 36568.92 | 57 | 37379.73 |
| | 34966.24 | 58 | 35782.48 | 28 | 36595.99 | 58 | 37406.71 |
| | 34993.49 | 59 | 35809.64 | 29 | 36623.06 | 59 | 37433.69 |

| M | Sinus. | M | Sinus. | M | Sinus. | M | Sinus. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 37460.66 | 30 | 38268.34 | 0 | 39073.11 | 30 | 39874.91 |
| 1 | 37487.63 | 31 | 38295.22 | 1 | 39099.89 | 31 | 39901.58 |
| 2 | 37514.59 | 32 | 38322.09 | 2 | 39126.66 | 32 | 39928.25 |
| 3 | 37541.56 | [illegible] | 38348.95 | 3 | 39153.43 | 33 | 39954.92 |
| 4 | 37568.51 | 34 | 38375.82 | [illegible] | 39180.19 | 34 | 39981.58 |
| 5 | 37595.47 | 35 | 38402.68 | 5 | 39206.95 | 35 | 40008.24 |
| 6 | 37622.43 | 36 | 38429.53 | 6 | 39233.71 | 36 | 40034.90 |
| 7 | 37649.38 | 37 | 38456.39 | [illegible] | 39260.47 | 37 | 40061.56 |
| 8 | 37676.32 | 38 | 38483.24 | [illegible] | 39287.22 | 38 | 40088.21 |
| 9 | 37703.27 | 39 | 38510.08 | 9 | 39313.97 | 39 | 40114.86 |
| 10 | 37730.21 | 40 | 38536.93 | 10 | 39340.71 | 40 | 40141.50 |
| 11 | 37757.14 | 41 | 38563.77 | 11 | 39367.45 | 41 | 40168.14 |
| 12 | 37784.08 | 42 | 38590.60 | 12 | 39394.19 | 42 | 40194.78 |
| 13 | 37811.01 | 43 | 38617.44 | 13 | 39420.93 | 43 | 40221.41 |
| 14 | 37837.94 | 44 | 38644.27 | 14 | 39447.66 | 44 | 40248.04 |
| 15 | 37864.86 | 45 | 38671.10 | 15 | 39474.39 | 45 | 40274.67 |
| 16 | 37891.78 | 46 | 38697.92 | 16 | 39501.11 | 46 | 40301.29 |
| 17 | 37918.70 | 47 | 38724.74 | 17 | 39527.83 | 47 | 40327.91 |
| [illegible] | 37945.62 | [illegible] | 38751.56 | 18 | 39554.55 | 48 | 40354.53 |
| 19 | 37972.53 | 49 | 38778.37 | 19 | 39581.27 | 49 | 40381.14 |
| 20 | 37999.44 | 50 | 38805.18 | 20 | 39607.98 | 50 | 40407.75 |
| 21 | 38026.34 | 51 | 38831.99 | 21 | 39634.69 | 51 | 40434.36 |
| 22 | 38053.24 | 52 | 38858.80 | 22 | 39661.39 | 52 | 40460.96 |
| 23 | 38080.14 | 53 | 38885.60 | 23 | 39688.09 | 53 | 40487.56 |
| 24 | 38107.04 | 54 | 38912.39 | 24 | 39714.79 | 54 | 40514.16 |
| 25 | 38133.93 | 55 | 38939.19 | 25 | 39741.48 | 55 | 40540.75 |
| 26 | 38160.81 | 56 | 38965.98 | 26 | 39768.17 | 56 | 40567.34 |
| 27 | 38187.70 | 57 | 38992.77 | 27 | 39794.86 | 57 | 40593.93 |
| 28 | 38214.59 | 58 | 39019.55 | [illegible] | 39821.55 | 58 | 40620.51 |
| 29 | 38241.47 | 59 | 39046.33 | 29 | 39848.23 | 59 | 40647.09 |
| 30 | 38268.34 | 60 | 39073.11 | 30 | 39874.91 | 60 | 40673.66 |

# TABLE DES SINUS.

| 24 Degrés. | | | | 25 Degrés. | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| M | Sinus. | M | Sinus. | M | Sinus. | M | Sinus. |
| 0 | 40673.66 | 30 | 41469.32 | 0 | 42261.83 | 30 | 43051.11 |
| 1 | 40700.23 | 31 | 41495.79 | 1 | 42288.19 | 31 | 43077.36 |
| 2 | 40726.81 | 32 | 41522.26 | 2 | 42314.55 | 32 | 43103.61 |
| 3 | 40753.37 | 33 | 41548.72 | 3 | 42340.90 | 33 | 43129.86 |
| 4 | 40779.93 | 34 | 41575.18 | 4 | 42367.25 | 34 | 43156.10 |
| 5 | 40806.49 | 35 | 41601.63 | 5 | 42393.60 | 35 | 43182.34 |
| 6 | 40833.05 | 36 | 41628.08 | 6 | 42419.94 | 36 | 43208.57 |
| 7 | 40859.60 | 37 | 41654.53 | 7 | 42446.28 | 37 | 43234.80 |
| 8 | 40886.15 | 38 | 41680.97 | 8 | 42472.62 | 38 | 43261.03 |
| 9 | 40912.69 | 39 | 41707.41 | 9 | 42498.95 | 39 | 43287.26 |
| 10 | 40939.23 | 40 | 41733.85 | 10 | 42525.28 | 40 | 43313.48 |
| 11 | 40965.77 | 41 | 41760.28 | 11 | 42551.61 | 41 | 43339.70 |
| 12 | 40992.30 | 42 | 41786.71 | 12 | 42577.93 | 42 | 43365.91 |
| 13 | 41018.83 | 43 | 41813.13 | 13 | 42604.25 | 43 | 43392.12 |
| 14 | 41045.36 | 44 | 41839.55 | 14 | 42630.56 | 44 | 43418.33 |
| 15 | 41071.89 | 45 | 41865.97 | 15 | 42656.87 | 45 | 43444.53 |
| 16 | 41098.41 | 46 | 41892.39 | 16 | 42683.18 | 46 | 43470.73 |
| 17 | 41124.93 | 47 | 41918.80 | 17 | 42709.49 | 47 | 43496.92 |
| 18 | 41151.44 | 48 | 41945.21 | 18 | 42735.79 | 48 | 43523.11 |
| 19 | 41177.95 | 49 | 41971.61 | 19 | 42762.09 | 49 | 43549.30 |
| 20 | 41204.46 | 50 | 41998.01 | 20 | 42788.38 | 50 | 43575.48 |
| 21 | 41230.96 | 51 | 42024.41 | 21 | 42814.67 | 51 | 43601.66 |
| 22 | 41257.46 | 52 | 42050.80 | 22 | 42840.95 | 52 | 43627.84 |
| 23 | 41283.95 | 53 | 42077.19 | 23 | 42867.23 | 53 | 43654.01 |
| 24 | 41310.44 | 54 | 42103.58 | 24 | 42893.51 | 54 | 43680.18 |
| 25 | 41336.93 | 55 | 42129.96 | 25 | 42919.79 | 55 | 43706.34 |
| 26 | 41363.42 | 56 | 42156.34 | 26 | 42946.06 | 56 | 43732.50 |
| 27 | 41389.90 | 57 | 42182.72 | 27 | 42972.33 | 57 | 43758.66 |
| 28 | 41416.38 | 58 | 42209.09 | 28 | 42998.59 | 58 | 43784.82 |
| 29 | 41442.85 | 59 | 42235.46 | 29 | 43024.85 | 59 | 43810.97 |
| 30 | 41469.32 | 60 | 42261.83 | 30 | 43051.11 | 60 | 43837.12 |

| 26 Degrés. | | | | 27 Degrés. | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *M* | *Sinus.* | *M* | *Sinus.* | *M* | *Sinus.* | *M* | *Sinus.* |
| 0 | 43837.12 | 30 | 44619.78 | 0 | 45399.05 | 30 | 46174.86 |
| 1 | 43863.26 | 31 | 44645.81 | 1 | 45424.97 | 31 | 46200.66 |
| 2 | 43889.40 | 32 | 44671.84 | 2 | 45450.88 | 32 | 46226.46 |
| 3 | 43915.53 | 33 | 44697.86 | 3 | 45476.79 | 33 | 46252.25 |
| 4 | 43941.66 | 34 | 44723.88 | 4 | 45502.69 | 34 | 46278.04 |
| 5 | 43967.79 | 35 | 44749.90 | 5 | 45528.59 | 35 | 46303.82 |
| 6 | 43993.92 | 36 | 44775.91 | 6 | 45554.49 | 36 | 46329.60 |
| 7 | 44020.04 | 37 | 44801.92 | 7 | 45580.38 | 37 | 46355.38 |
| 8 | 44046.16 | 38 | 44827.92 | 8 | 45606.27 | 38 | 46381.15 |
| 9 | 44072.27 | 39 | 44853.92 | 9 | 45632.16 | 39 | 46406.92 |
| 10 | 44098.38 | 40 | 44879.92 | 10 | 45658.04 | 40 | 46432.69 |
| 11 | 44124.48 | 41 | 44905.91 | 11 | 45683.92 | 41 | 46458.45 |
| 12 | 44150.58 | 42 | 44931.90 | 12 | 45709.79 | 42 | 46484.21 |
| 13 | 44176.68 | 43 | 44957.89 | 13 | 45735.66 | 43 | 46509.96 |
| 14 | 44202.78 | 44 | 44983.87 | 14 | 45761.53 | 44 | 46535.71 |
| 15 | 44228.87 | 45 | 45009.85 | 15 | 45787.39 | 45 | 46561.45 |
| 16 | 44254.96 | 46 | 45035.85 | 16 | 45813.25 | 46 | 46587.19 |
| 17 | 44281.04 | 47 | 45061.79 | 17 | 45839.10 | 47 | 46612.93 |
| 18 | 44307.12 | 48 | 45087.76 | 18 | 45864.95 | 48 | 46638.66 |
| 19 | 44333.19 | 49 | 45113.72 | 19 | 45890.80 | 49 | 46664.39 |
| 20 | 44359.27 | 50 | 45139.68 | 20 | 45916.64 | 50 | 46690.12 |
| 21 | 44385.34 | 51 | 45165.63 | 21 | 45942.48 | 51 | 46715.84 |
| 22 | 44411.40 | 52 | 45191.58 | 22 | 45968.32 | 52 | 46741.56 |
| 23 | 44437.46 | 53 | 45217.53 | 23 | 45994.15 | 53 | 46767.27 |
| 24 | 44463.52 | 54 | 45243.47 | 24 | 46019.98 | 54 | 46792.98 |
| 25 | 44489.57 | 55 | 45269.41 | 25 | 46045.80 | 55 | 46818.69 |
| 26 | 44515.62 | 56 | 45295.35 | 26 | 46071.62 | 56 | 46844.39 |
| 27 | 44541.67 | 57 | 45321.28 | 27 | 46097.44 | 57 | 46870.09 |
| 28 | 44567.71 | 58 | 45347.21 | 28 | 46123.25 | 58 | 46895.78 |
| 29 | 44593.75 | 59 | 45373.13 | 29 | 46149.06 | 59 | 46921.47 |
| 30 | 44619.78 | 60 | 45399.05 | 30 | 46174.86 | 60 | 46947.16 |

| 28 Degrés. | | | | 29 Deg | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| M | Sinus. | M | Sinus. | M | Sinus. | M | |
| 0 | 46947.16 | 30 | 47715.88 | 0 | 48480.96 | [illegible] | [illegible] |
| 1 | 46972.84 | 31 | 47741.44 | 1 | 48506.40 | [illegible] | [illegible] |
| 2 | 46998.52 | 32 | 47767.00 | 2 | 48531.84 | [illegible] | [illegible] |
| 3 | 47024.19 | 33 | 47792.55 | 3 | 48557.27 | [illegible] | [illegible] |
| 4 | 47049.86 | 34 | 47818.10 | 4 | 48582.70 | [illegible] | [illegible] |
| 5 | 47075.53 | 35 | 47843.64 | 5 | 48608.12 | [illegible] | [illegible] |
| 6 | 47101.19 | 36 | 47869.18 | 6 | 48633.54 | [illegible] | [illegible] |
| 7 | 47126.85 | 37 | 47894.72 | 7 | 48658.95 | [illegible] | [illegible] |
| 8 | 47152.50 | 38 | 47920.26 | 8 | 48634.36 | 38 | 49444.77 |
| 9 | 47178.15 | 39 | 47945.79 | 9 | 48709.77 | 39 | 49470.05 |
| 10 | 47203.80 | 40 | 47971.31 | 10 | 48735.17 | 40 | 49495.33 |
| 11 | 47229.44 | 41 | 47996.83 | 11 | 48760.57 | 41 | 49520.60 |
| 12 | 47255.08 | 42 | 48022.35 | 12 | 48785.97 | 42 | 49545.87 |
| 13 | 47280.71 | 43 | 48047.86 | 13 | 48811.36 | 43 | 49571.13 |
| 14 | 47306.34 | 44 | 48073.37 | 14 | 48836.74 | 44 | 49596.39 |
| 15 | 47331.97 | 45 | 48098.88 | 15 | 48862.12 | 45 | 49621.65 |
| 16 | 47357.59 | 46 | 48124.39 | 16 | 48887.50 | 46 | 49646.90 |
| 17 | 47383.21 | 47 | 48149.87 | 17 | 48912.87 | 47 | 49672.15 |
| 18 | 47408.82 | 48 | 48175.37 | 18 | 48938.24 | 48 | 49697.40 |
| 19 | 47434.43 | 49 | 48200.86 | 19 | 48963.61 | 49 | 49722.64 |
| 20 | 47460.04 | 50 | 48226.34 | 20 | 48988.97 | 50 | 49747.87 |
| 21 | 47485.64 | 51 | 48251.82 | 21 | 49014.33 | 51 | 49773.10 |
| 22 | 47511.24 | 52 | 48277.30 | 22 | 49039.68 | 52 | 49798.33 |
| 23 | 47536.83 | 53 | 48302.77 | 23 | 49065.03 | 53 | 49823.55 |
| 24 | 47562.42 | 54 | 48328.24 | 24 | 49090.37 | 54 | 49848.77 |
| 25 | 47588.01 | 55 | 48353.70 | 25 | 49115.71 | 55 | 49873.99 |
| 26 | 47613.59 | 56 | 48379.16 | 26 | 49141.05 | 56 | 49899.20 |
| 27 | 47639.17 | 57 | 48404.62 | 27 | 49166.38 | 57 | 49924.41 |
| 28 | 47664.74 | 58 | 48430.07 | [illegible] | 49191.71 | 58 | 49949.61 |
| 29 | 47690.31 | 59 | 48455.52 | 29 | 49217.04 | 59 | 49974.81 |
| 30 | 47715.88 | 60 | 48480.96 | 30 | 49242.36 | 60 | 50000.00 |

| 30 Degrés. | | | | 31 Degrés. | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| M | Sinus. | M | Sinus. | M | Sinus. | M | Sinus. |
| | 50000.00 | 30 | 50753.84 | 0 | 51503.81 | 30 | 52249.86 |
| | 50025.19 | 31 | 50778.90 | 1 | 51528.74 | 31 | 52274.66 |
| | 50050.38 | 32 | 50803.96 | 2 | 51553.67 | 32 | 52299.45 |
| | 50075.56 | 33 | 50829.01 | 3 | 51578.59 | 33 | 52324.25 |
| | 50100.74 | 34 | 50854.06 | 4 | 51603.51 | 34 | 52349.03 |
| | 50125.91 | 35 | 50879.10 | 5 | 51628.42 | 35 | 52373.81 |
| | 50151.07 | 36 | 50904.14 | 6 | 51653.33 | 36 | 52398.59 |
| | 50176.24 | 37 | 50929.18 | 7 | 51678.24 | 37 | 52423.36 |
| | 50201.40 | 38 | 50954.21 | 8 | 51703.14 | 38 | 52448.13 |
| | 50226.55 | 39 | 50979.24 | 9 | 51728.04 | 39 | 52472.90 |
| | 50251.70 | 40 | 51004.26 | 10 | 51752.93 | 40 | 52497.66 |
| | 50276.85 | 41 | 51029.28 | 11 | 51777.82 | 41 | 52522.41 |
| | 50301.99 | 42 | 51054.29 | 12 | 51802.70 | 42 | 52547.16 |
| | 50327.13 | 43 | 51079.30 | 13 | 51827.58 | 43 | 52571.91 |
| | 50352.27 | 44 | 51104.31 | 14 | 51852.46 | 44 | 52596.65 |
| | 50377.40 | 45 | 51129.31 | 15 | 51877.33 | 45 | 52621.39 |
| | 50402.53 | 46 | 51154.31 | 16 | 51902.19 | 46 | 52646.12 |
| | 50427.65 | 47 | 51179.30 | 17 | 51927.05 | 47 | 52670.85 |
| | 50452.77 | 48 | 51204.29 | 18 | 51951.91 | 48 | 52695.58 |
| | 50477.88 | 49 | 51229.27 | 19 | 51976.76 | 49 | 52720.30 |
| | 50502.99 | 50 | 51254.25 | 20 | 52001.61 | 50 | 52745.02 |
| | 50528.09 | 51 | 51279.22 | 21 | 52026.46 | 51 | 52769.73 |
| | 50553.19 | 52 | 51304.19 | 22 | 52051.30 | 52 | 52794.44 |
| | 50578.28 | 53 | 51329.16 | 23 | 52076.13 | 53 | 52819.14 |
| | 50603.37 | 54 | 51354.12 | 24 | 52100.96 | 54 | 52843.84 |
| | 50628.46 | 55 | 51379.08 | 25 | 52125.79 | 55 | 52868.53 |
| | 50653.55 | 56 | 51403.04 | 26 | 52150.61 | 56 | 52893.22 |
| | 50678.63 | 57 | 51428.99 | 27 | 52175.43 | 57 | 52917.90 |
| | 50703.70 | 58 | 51453.93 | 28 | 52200.24 | 58 | 52942.58 |
| | 50728.77 | 59 | 51478.87 | 29 | 52225.05 | 59 | 52967.26 |
| | 50753.84 | 60 | 51503.81 | 30 | 52249.86 | 60 | 52991.93 |

| 34 Degrés. | | | | 35 Degrés. | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| M | Sinus. | M | Sinus. | M | Sinus. | M | Sinus. |
| 0 | 55919.29 | 30 | 56640.62 | 0 | 57357.64 | 30 | 58070.30 |
| 1 | 55943.40 | 31 | 56664.59 | 1 | 57381.47 | 31 | 58093.98 |
| 2 | 55967.51 | 32 | 56688.56 | 2 | 57405.29 | 32 | 58117.65 |
| 3 | 55991.61 | 33 | 56712.52 | 3 | 57429.11 | 33 | 58141.32 |
| 4 | 56015.71 | 34 | 56736.48 | 4 | 57452.92 | 34 | 58164.98 |
| 5 | 56039.81 | 35 | 56760.43 | 5 | 57476.72 | 35 | 58188.64 |
| 6 | 56063.90 | 36 | 56784.37 | 6 | 57500.52 | 36 | 58212.30 |
| 7 | 56087.98 | 37 | 56808.31 | 7 | 57524.32 | 37 | 58235.95 |
| 8 | 56112.06 | 38 | 56832.25 | 8 | 57548.11 | 38 | 58259.59 |
| 9 | 56136.14 | 39 | 56856.18 | 9 | 57571.90 | 39 | 58283.23 |
| 10 | 56160.21 | 40 | 56880.11 | 10 | 57595.68 | 40 | 58306.87 |
| 11 | 56184.28 | 41 | 56904.03 | 11 | 57619.46 | 41 | 58330.50 |
| 12 | 56208.34 | 42 | 56927.95 | 12 | 57643.23 | 42 | 58354.12 |
| 13 | 56232.39 | 43 | 56951.86 | 13 | 57667.00 | 43 | 58377.74 |
| 14 | 56256.44 | 44 | 56975.77 | 14 | 57690.76 | 44 | 58401.36 |
| 15 | 56280.49 | 45 | 56999.68 | 15 | 57714.52 | 45 | 58424.97 |
| 16 | 56304.53 | 46 | 57023.58 | 16 | 57738.27 | 46 | 58448.57 |
| 17 | 56328.57 | 47 | 57047.47 | 17 | 57762.02 | 47 | 58472.17 |
| 18 | 56352.60 | 48 | 57071.36 | 18 | 57785.76 | 48 | 58495.77 |
| 19 | 56376.63 | 49 | 57095.24 | 19 | 57809.50 | 49 | 58519.36 |
| 20 | 56400.66 | 50 | 57119.12 | 20 | 57833.23 | 50 | 58542.94 |
| 21 | 56424.67 | 51 | 57142.99 | 21 | 57856.96 | 51 | 58566.52 |
| 22 | 56448.69 | 52 | 57166.86 | 22 | 57880.68 | 52 | 58590.10 |
| 23 | 56472.70 | 53 | 57190.73 | 23 | 57904.40 | 53 | 58613.67 |
| 24 | 56496.70 | 54 | 57214.59 | 24 | 57928.12 | 54 | 58637.24 |
| 25 | 56520.70 | 55 | 57238.44 | 25 | 57951.83 | 55 | 58660.80 |
| 26 | 56544.69 | 56 | 57262.29 | 26 | 57975.53 | 56 | 58684.35 |
| 27 | 56568.68 | 57 | 57286.14 | 27 | 57999.23 | 57 | 58707.90 |
| 28 | 56592.67 | 58 | 57309.98 | 28 | 58022.92 | 58 | 58731.45 |
| 29 | 56616.65 | 59 | 57333.81 | 29 | 58046.61 | 59 | 58754.99 |
| 30 | 56640.62 | 60 | 57357.64 | 30 | 58070.30 | 60 | 58778.53 |

| M | Sinus. | M | Sinus. |
|---|---|---|---|
| 0 | 61566.15 | 30 | 62251.46 |
| 1 | 61589.07 | 31 | 62274.22 |
| 2 | 61611.98 | 32 | 62296.98 |
| 3 | 61634.89 | 33 | 62319.73 |
| 4 | 61657.79 | 34 | 62342.48 |
| 5 | 61680.69 | 35 | 62365.22 |
| 6 | 61703.59 | 36 | 62387.96 |
| 7 | 61726.48 | 37 | 62410.69 |
| 8 | 61749.36 | 38 | 62433.42 |
| 9 | 61772.24 | 39 | 62456.14 |
| 10 | 61795.11 | 40 | 62478.85 |
| 11 | 61817.98 | 41 | 62501.56 |
| 12 | 61840.84 | 42 | 62524.26 |
| 13 | 61863.70 | 43 | 62546.96 |
| 14 | 61886.55 | 44 | 62569.66 |
| 15 | 61909.40 | 45 | 62592.35 |
| 16 | 61932.24 | 46 | 62615.03 |
| 17 | 61955.07 | 47 | 62637.71 |
| 18 | 61977.90 | 48 | 62660.38 |
| 19 | 62000.73 | 49 | 62683.05 |
| 20 | 62023.55 | 50 | 62705.71 |
| 21 | 62046.36 | 51 | 62728.37 |
| 22 | 62069.17 | 52 | 62751.02 |
| 23 | 62091.98 | 53 | 62773.66 |
| 24 | 62114.78 | 54 | 62796.30 |
| 25 | 62137.57 | 55 | 62818.94 |
| 26 | 62160.36 | 56 | 62841.57 |
| 27 | 62183.14 | 57 | 62864.10 |
| 28 | 62205.92 | 58 | 62886.82 |

| M | Sinus. | M | Sinus. |
|---|---|---|---|
| 0 | 62932.04 | 30 | 63607.82 |
| 1 | 62954.64 | 31 | 63630.26 |
| 2 | 62977.24 | 32 | 63652.70 |
| 3 | 62999.83 | 33 | 63675.13 |
| 4 | 63022.42 | 34 | 63697.56 |
| 5 | 63045.00 | 35 | 63719.98 |
| 6 | 63067.58 | 36 | 63742.40 |
| 7 | 63090.15 | 37 | 63764.81 |
| 8 | 63112.72 | 38 | 63787.21 |
| 9 | 63135.28 | 39 | 63809.61 |
| 10 | 63157.84 | 40 | 63832.01 |
| 11 | 63180.39 | 41 | 63854.40 |
| 12 | 63202.93 | 42 | 63876.78 |
| 13 | 63225.47 | 43 | 63899.16 |
| 14 | 63248.00 | 44 | 63921.53 |
| 15 | 63270.53 | 45 | 63943.90 |
| [illegible] | 63293.05 | 46 | 63966.26 |
| 17 | 63315.57 | 47 | 63988.62 |
| 18 | 63338.08 | 48 | 64010.97 |
| 19 | 63360.59 | 49 | 64033.32 |
| 20 | 63383.09 | 50 | 64055.66 |
| 21 | 63405.59 | 51 | 64077.99 |
| 22 | 63428.08 | 52 | 64100.32 |
| 23 | 63450.57 | 53 | 64122.64 |
| 24 | 63473.05 | 54 | 64144.96 |
| 25 | 63495.53 | 55 | 64167.27 |
| 26 | 63518.00 | 56 | 64189.58 |
| 27 | 63540.46 | 57 | 64211.88 |
| [illegible] | 63562.92 | 58 | 64234.18 |

## 40 Degrés.

| M | Sinus. | M | Sinus. |
|---|---|---|---|
| 0 | 64278.76 | 30 | 64944.80 |
| 1 | 64301.04 | 31 | 64966.92 |
| 2 | 64323.32 | 32 | 64989.03 |
| 3 | 64345.59 | 33 | 65011.14 |
| 4 | 64367.85 | 34 | 65033.24 |
| 5 | 64390.11 | 35 | 65055.33 |
| 6 | 64412.36 | 36 | 65077.42 |
| 7 | 64434.61 | 37 | 65099.50 |
| 8 | 64456.85 | 38 | 65121.58 |
| 9 | 64479.09 | 39 | 65143.66 |
| 10 | 64501.32 | 40 | 65165.72 |
| 11 | 64523.55 | 41 | 65187.78 |
| 12 | 64545.77 | 42 | 65209.84 |
| 13 | 64567.98 | 43 | 65231.89 |
| 14 | 64590.19 | 44 | 65253.94 |
| 15 | 64612.40 | 45 | 65275.98 |
| 16 | 64634.60 | 46 | 65298.01 |
| 17 | 64656.79 | 47 | 65320.04 |
| 18 | 64678.98 | 48 | 65342.06 |
| 19 | 64701.16 | 49 | 65364.08 |
| 20 | 64723.34 | 50 | 65386.09 |
| 21 | 64745.51 | 51 | 65408.10 |
| 22 | 64767.67 | 52 | 65430.10 |
| 23 | 64789.83 | 53 | 65452.09 |
| 24 | 64811.99 | 54 | 65474.08 |
| 25 | 64834.14 | 55 | 65496.06 |
| 26 | 64856.28 | 56 | 65518.04 |
| 27 | 64878.42 | 57 | 65540.01 |
| 28 | 64900.55 | 58 | 65561.98 |
| 29 | 64922.68 | 59 | 65583.94 |
| 30 | 64944.80 | 60 | 65605.90 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 7 | 65759.44 | 37 | 66414.37 |
| 8 | 65781.35 | [illegible] | 66436.11 |
| 9 | 65803.26 | 39 | 66457.85 |
| 10 | 65825.16 | 40 | 66479.59 |
| 11 | 65847.06 | 41 | 66501.32 |
| 12 | 65868.95 | 42 | 66523.04 |
| 13 | 65890.83 | 43 | 66544.75 |
| 14 | 65912.71 | 44 | 66566.46 |
| 15 | 65934.58 | 45 | 66588.17 |
| 16 | 65956.45 | 46 | 66609.87 |
| 17 | 65978.31 | 47 | 66631.56 |
| 18 | 66000.17 | 48 | 66653.25 |
| 19 | 66022.02 | 49 | 66674.93 |
| 20 | 66043.86 | 50 | 66696.61 |
| 21 | 66065.70 | 51 | 66718.28 |
| 22 | 66087.53 | 52 | 66739.94 |
| 23 | 66109.36 | 53 | 66761.60 |
| 24 | 66131.18 | 54 | 66783.26 |
| 25 | 66153.00 | 55 | 66804.91 |
| 26 | 66174.81 | 56 | 66826.55 |
| 27 | 66196.62 | 57 | 66848.18 |
| 28 | 66218.42 | 58 | 66869.82 |
| 29 | 66240. | | |
| 30 | 66262. | | |

| M | Sinus. | M | Sinus. | M | Sinus. | M | Sinus. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 66913.06 | 30 | 67559.01 | 0 | 68199.84 | 30 | 68835.45 |
| 1 | 66934.67 | 31 | 67580.46 | 1 | 68221.11 | 31 | 68856.55 |
| 2 | 66956.28 | 32 | 67601.90 | 2 | 68242.37 | 32 | 68877.64 |
| 3 | 66977.88 | 33 | 67623.33 | 3 | 68263.63 | 33 | 68898.73 |
| 4 | 66999.48 | 34 | 67644.76 | 4 | 68284.88 | 34 | 68919.81 |
| 5 | 67021.07 | 35 | 67666.18 | 5 | 68306.13 | 35 | 68940.89 |
| 6 | 67042.66 | 36 | 67687.60 | 6 | 68327.37 | 36 | 68961.96 |
| 7 | 67064.24 | 37 | 67709.01 | 7 | 68348.61 | 37 | 68983.02 |
| 8 | 67085.82 | 38 | 67730.41 | 8 | 68369.84 | 38 | 69004.07 |
| 9 | 67107.39 | 39 | 67751.81 | 9 | 68391.07 | 39 | 69025.12 |
| 10 | 67128.95 | 40 | 67773.20 | 10 | 68412.29 | 40 | 69046.17 |
| 11 | 67150.51 | 41 | 67794.59 | 11 | 68433.50 | 41 | 69067.21 |
| 12 | 67172.06 | 42 | 67815.97 | 12 | 68454.71 | 42 | 69088.24 |
| 13 | 67193.61 | 43 | 67837.34 | 13 | 68475.91 | 43 | 69109.27 |
| 14 | 67215.15 | 44 | 67858.71 | 14 | 68497.11 | 44 | 69130.29 |
| 15 | 67236.68 | 45 | 67880.07 | 15 | 68518.30 | 45 | 69151.31 |
| 16 | 67258.21 | 46 | 67901.43 | 16 | 68539.48 | 46 | 69172.32 |
| 17 | 67279.73 | 47 | 67922.78 | 17 | 68560.66 | 47 | 69193.32 |
| 18 | 67301.25 | 48 | 67944.13 | 18 | 68581.84 | 48 | 69214.32 |
| 19 | 67322.76 | 49 | 67965.47 | 19 | 68603.00 | 49 | 69235.31 |
| 20 | 67344.27 | 50 | 67986.81 | 20 | 68624.16 | 50 | 69256.30 |
| 21 | 67365.77 | 51 | 68008.14 | 21 | 68645.32 | 51 | 69277.28 |
| 22 | 67387.27 | 52 | 68029.46 | 22 | 68666.47 | 52 | 69298.25 |
| 23 | 67408.76 | 53 | 68050.78 | 23 | 68687.61 | 53 | 69319.22 |
| 24 | 67430.24 | 54 | 68072.09 | 24 | 68708.75 | 54 | 69340.18 |
| 25 | 67451.72 | 55 | 68093.39 | 25 | 68729.88 | 55 | 69361.14 |
| 26 | 67473.19 | 56 | 68114.69 | 26 | 68751.01 | 56 | 69382.09 |
| 27 | 67494.66 | 57 | 68135.99 | 27 | 68772.13 | 57 | 69403.04 |
| 28 | 67516.12 | 58 | 68157.28 | 28 | 68793.24 | 58 | 69423.98 |
| 29 | 67537.57 | 59 | 68178.56 | 29 | 68814.35 | 59 | 69444.91 |
| 30 | 67559.01 | 60 | 68199.84 | 30 | 68835.45 | 60 | 69465.84 |

## 44 Degrés.

| M | Sinus. | M | Sinus. |
|---|---|---|---|
| 0 | 69465.84 | 30 | 70090.93 |
| 1 | 69486.76 | 31 | 70111.67 |
| 2 | 69507.67 | 32 | 70132.41 |
| 3 | 69528.58 | 33 | 70153.14 |
| 4 | 69549.49 | 34 | 70173.87 |
| 5 | 69570.39 | 35 | 70194.59 |
| 6 | 69591.28 | 36 | 70215.30 |
| 7 | 69612.17 | 37 | 70236.01 |
| 8 | 69633.05 | 38 | 70256.71 |
| 9 | 69653.92 | 39 | 70277.41 |
| 10 | 69674.79 | 40 | 70298.11 |
| 11 | 69695.65 | 41 | 70318.79 |
| 12 | 69716.51 | 42 | 70339.47 |
| 13 | 69737.36 | 43 | 70360.14 |
| 14 | 69758.21 | 44 | 70380.81 |
| 15 | 69779.05 | 45 | 70401.47 |
| 16 | 69799.88 | 46 | 70422.13 |
| 17 | 69820.71 | 47 | 70442.78 |
| 18 | 69841.53 | 48 | 70463.42 |
| 19 | 69862.34 | 49 | 70484.06 |
| 20 | 69883.15 | 50 | 70504.69 |
| 21 | 69903.96 | 51 | 70525.32 |
| 22 | 69924.76 | 52 | 70545.94 |
| 23 | 69945.55 | 53 | 70565.55 |
| 24 | 69966.33 | 54 | 70587.16 |
| 25 | 69987.11 | 55 | 70607.76 |
| 26 | 70007.89 | 56 | 70628.35 |
| 27 | 70028.66 | 57 | 70648.94 |
| 28 | [illegible] | 58 | [illegible] |

## 45 Degrés.

| M | Sinus. | M | Sinus. |
|---|---|---|---|
| 0 | 70710.68 | 30 | 71325.05 |
| 1 | 70731.24 | 31 | 71345.43 |
| 2 | 70751.80 | 32 | 71365.81 |
| 3 | 70772.36 | 33 | 71386.18 |
| 4 | 70792.91 | 34 | 71406.55 |
| 5 | 70813.45 | 35 | 71426.91 |
| 6 | 70833.98 | 36 | 71447.27 |
| 7 | 70854.51 | 37 | 71467.62 |
| 8 | 70875.04 | 38 | 71487.96 |
| 9 | 70895.56 | 39 | 71508.30 |
| 10 | 70916.07 | 40 | 71528.63 |
| 11 | 70936.57 | 41 | 71548.95 |
| 12 | 70957.07 | 42 | 71569.27 |
| 13 | 70977.57 | 43 | 71589.58 |
| 14 | 70998.06 | 44 | 71609.89 |
| 15 | 71018.54 | 45 | 71630.19 |
| 16 | 71039.01 | 46 | 71650.49 |
| 17 | 71059.48 | 47 | 71670.78 |
| 18 | 71079.95 | 48 | 71691.06 |
| 19 | 71100.41 | 49 | 71711.34 |
| 20 | 71120.86 | 50 | 71731.61 |
| 21 | 71141.30 | 51 | 71751.87 |
| 22 | 71161.74 | 52 | 71772.13 |
| 23 | 71182.17 | 53 | 71792.38 |
| 24 | 71202.60 | 54 | 71812.63 |
| 25 | 71223.02 | 55 | 71832.87 |
| 26 | 71243.44 | 56 | 71853.10 |
| 27 | 71263.85 | 57 | 71873.33 |
| 28 | [illegible] | 58 | [illegible] |

| M | Sinus. | M | Sinus. | M | Sinus. | M | Sinus. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 71933.98 | 30 | 72537.44 | 0 | 73135.37 | 30 | 73727.73 |
| 1 | 71954.18 | 31 | 72557.46 | 1 | 73155.20 | 31 | 73747.38 |
| 2 | 71974.38 | 32 | 72577.47 | 2 | 73175.03 | 32 | 73767.02 |
| 3 | 71994.57 | 33 | 72597.48 | 3 | 73194.85 | 33 | 73786.66 |
| 4 | 72014.76 | 34 | 72617.48 | 4 | 73214.67 | 34 | 73806.29 |
| 5 | 72034.94 | 35 | 72637.48 | 5 | 73234.48 | 35 | 73825.91 |
| 6 | 72055.11 | 36 | 72657.47 | 6 | 73254.29 | 36 | 73845.54 |
| 7 | 72075.28 | 37 | 72677.45 | 7 | 73274.09 | 37 | 73865.15 |
| 8 | 72095.44 | 38 | 72697.43 | 8 | 73293.88 | 38 | 73884.75 |
| 9 | 72115.59 | 39 | 72717.40 | 9 | 73313.67 | 39 | 73904.35 |
| 10 | 72135.74 | 40 | 72737.36 | 10 | 73333.45 | 40 | 73923.94 |
| 11 | 72155.88 | 41 | 72757.32 | 11 | 73353.22 | 41 | 73943.53 |
| 12 | 72176.02 | 42 | 72777.27 | 12 | 73372.99 | 42 | 73963.11 |
| 13 | 72196.15 | 43 | 72797.22 | 13 | 73392.75 | 43 | 73982.68 |
| 14 | 72216.28 | 44 | 72817.16 | 14 | 73412.50 | 44 | 74002.25 |
| 15 | 72236.40 | 45 | 72837.09 | 15 | 73432.25 | 45 | 74021.81 |
| 16 | 72256.51 | 46 | 72857.02 | 16 | 73451.99 | 46 | 74041.37 |
| 17 | 72276.61 | 47 | 72876.94 | 17 | 73471.73 | 47 | 74060.92 |
| 18 | 72296.71 | 48 | 72896.86 | 18 | 73491.46 | 48 | 74080.46 |
| 19 | 72316.81 | 49 | 72916.77 | 19 | 73511.18 | 49 | 74100.00 |
| 20 | 72336.90 | 50 | 72936.67 | 20 | 73530.90 | 50 | 74119.53 |
| 21 | 72356.98 | 51 | 72956.57 | 21 | 73550.61 | 51 | 74139.05 |
| 22 | 72377.05 | 52 | 72976.46 | 22 | 73570.32 | 52 | 74158.57 |
| 23 | 72397.12 | 53 | 72996.35 | 23 | 73590.02 | 53 | 74178.08 |
| 24 | 72417.18 | 54 | 73016.23 | 24 | 73609.71 | 54 | 74197.58 |
| 25 | 72437.24 | 55 | 73036.10 | 25 | 73629.39 | 55 | 74217.08 |
| 26 | 72457.29 | 56 | 73055.97 | 26 | 73649.07 | 56 | 74236.57 |
| 27 | 72477.34 | 57 | 73075.83 | 27 | 73668.75 | 57 | 74256.06 |
| 28 | 72497.38 | 58 | 73095.68 | 28 | 73688.42 | 58 | 74275.54 |
| 29 | 72517.41 | 59 | 73115.53 | 29 | 73708.08 | 59 | 74295.01 |
| 30 | 72537.44 | 60 | 73135.37 | 30 | 73727.73 | 60 | 74314.48 |

| 48 Degrés. | | | |
|---|---|---|---|
| M | Sinus. | M | Sinus. |
| 0 | 74314.48 | 30 | 74895.57 |
| 1 | 74333.94 | 31 | 74914.84 |
| 2 | 74353.40 | 32 | 74934.11 |
| 3 | 74372.85 | 33 | 74953.37 |
| 4 | 74392.29 | 34 | 74972.62 |
| 5 | 74411.72 | 35 | 74991.87 |
| 6 | 74431.15 | 36 | 75011.11 |
| 7 | 74450.57 | 37 | 75030.34 |
| 8 | 74469.99 | 38 | 75049.57 |
| 9 | 74489.40 | 39 | 75068.79 |
| 10 | 74508.81 | 40 | 75088.00 |
| 11 | 74528.22 | 41 | 75107.21 |
| 12 | 74547.60 | 42 | 75126.41 |
| 13 | 74566.99 | 43 | 75145.61 |
| 14 | 74586.37 | 44 | 75164.80 |
| 15 | 74605.74 | 45 | 75183.98 |
| 16 | 74625.10 | 46 | 75203.16 |
| 17 | 74644.46 | 47 | 75222.33 |
| 18 | 74663.82 | 48 | 75241.49 |
| 19 | 74683.17 | 49 | 75260.65 |
| 20 | 74702.51 | 50 | 75279.80 |
| 21 | 74721.84 | 51 | 75298.94 |
| 22 | 74741.17 | 52 | 75318.08 |
| 23 | 74760.49 | 53 | 75337.21 |
| 24 | 74779.81 | 54 | 75356.34 |
| 25 | 74799.12 | 55 | 75375.46 |
| 26 | 74818.42 | 56 | 75394.57 |
| 27 | 74837.72 | 57 | 75413.68 |
| 28 | 74857.01 | 58 | 75432.78 |
| 29 | 74876.29 | 59 | 75451.87 |
| 30 | 74895.57 | 60 | 75470.96 |

| 49 Degrés. | | | |
|---|---|---|---|
| M | Sinus. | M | Sinus. |
| 0 | 75470.96 | 30 | 76040.60 |
| 1 | 75490.04 | 31 | 76059.49 |
| 2 | 75509.11 | 32 | 76078.37 |
| 3 | 75528.18 | 33 | 76097.24 |
| 4 | 75547.24 | 34 | 76116.11 |
| 5 | 75566.30 | 35 | 76134.97 |
| 6 | 75585.35 | 36 | 76153.83 |
| 7 | 75604.39 | 37 | 76172.68 |
| 8 | 75623.42 | 38 | 76191.52 |
| 9 | 75642.45 | 39 | 76210.36 |
| 10 | 75661.47 | 40 | 76229.19 |
| 11 | 75680.49 | 41 | 76248.01 |
| 12 | 75699.50 | 42 | 76266.83 |
| 13 | 75718.51 | 43 | 76285.64 |
| 14 | 75737.51 | 44 | 76304.45 |
| 15 | 75756.50 | 45 | 76323.25 |
| 16 | 75775.48 | 46 | 76342.04 |
| 17 | 75794.46 | 47 | 76360.82 |
| 18 | 75813.43 | 48 | 76379.62 |
| 19 | 75832.40 | 49 | 76398.37 |
| 20 | 75851.36 | 50 | 76417.14 |
| 21 | 75870.31 | 51 | 76435.90 |
| 22 | 75889.26 | 52 | 76454.65 |
| 23 | 75908.20 | 53 | 76473.40 |
| 24 | 75927.13 | 54 | 76492.14 |
| 25 | 75946.06 | 55 | 76510.87 |
| 26 | 75964.98 | 56 | 76529.60 |
| 27 | 75983.89 | 57 | 76548.32 |
| 28 | 76002.80 | 58 | 76567.03 |
| 29 | 76021.70 | 59 | 76585.74 |
| 30 | 76040.60 | 60 | 76604.44 |

| 50 Degrés. | | | | 51 Degrés. | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| M | Sinus. | M | Sinus. | M | Sinus. | M | Sinus. |
| 0 | 76604.44 | 30 | 77162.46 | 0 | 77714.60 | 30 | 78260.82 |
| 1 | 76623.14 | 31 | 77180.96 | 1 | 77732.90 | 31 | 78278.92 |
| 2 | 76641.83 | 32 | 77199.45 | 2 | 77751.20 | 32 | 78297.01 |
| 3 | 76660.51 | 33 | 77217.94 | 3 | 77769.49 | 33 | 78315.11 |
| 4 | 76679.18 | 34 | 77236.42 | 4 | 77787.77 | 34 | 78333.20 |
| 5 | 76697.85 | 35 | 77254.89 | 5 | 77806.04 | 35 | 78351.28 |
| 6 | 76716.51 | 36 | 77273.36 | 6 | 77824.31 | 36 | 78369.35 |
| 7 | 76735.17 | 37 | 77291.82 | 7 | 77842.57 | 37 | 78387.41 |
| 8 | 76753.82 | 38 | 77310.27 | 8 | 77860.83 | 38 | 78405.47 |
| 9 | 76772.46 | 39 | 77328.72 | 9 | 77879.08 | 39 | 78423.52 |
| 10 | 76791.10 | 40 | 77347.16 | 10 | 77897.33 | 40 | 78441.57 |
| 11 | 76809.73 | 41 | 77365.59 | 11 | 77915.57 | 41 | 78459.61 |
| 12 | 76828.35 | 42 | 77384.02 | 12 | 77933.80 | 42 | 78477.64 |
| 13 | 76846.97 | 43 | 77402.44 | 13 | 77952.02 | 43 | 78495.66 |
| 14 | 76865.58 | 44 | 77420.86 | 14 | 77970.24 | 44 | 78513.68 |
| 15 | 76884.18 | 45 | 77439.27 | 15 | 77988.45 | 45 | 78531.69 |
| 16 | 76902.78 | 46 | 77457.67 | 16 | 78006.65 | 46 | 78549.70 |
| 17 | 76921.37 | 47 | 77476.06 | 17 | 78024.85 | 47 | 78567.70 |
| 18 | 76939.95 | 48 | 77494.45 | 18 | 78043.04 | 48 | 78585.69 |
| 19 | 76958.53 | 49 | 77512.83 | 19 | 78061.22 | 49 | 78603.67 |
| 20 | 76977.10 | 50 | 77531.21 | 20 | 78079.40 | 50 | 78621.65 |
| 21 | 76995.67 | 51 | 77549.[illegible] | 21 | 78097.57 | 51 | 78639.62 |
| 22 | 77014.23 | 52 | 77567.94 | 22 | 78115.74 | 52 | 78657.59 |
| 23 | 77032.78 | 53 | 77586.29 | 23 | 78133.90 | 53 | 78675.55 |
| 24 | 77051.32 | 54 | 77604.64 | 24 | 78152.05 | 54 | 78693.50 |
| 25 | 77069.86 | 55 | 77622.98 | 25 | 78170.19 | 55 | 78711.45 |
| 26 | 77088.39 | 56 | 77641.32 | 26 | 78188.33 | 56 | 78729.39 |
| 27 | 77106.91 | 57 | 77659.65 | 27 | 78206.46 | 57 | 78747.32 |
| 28 | 77125.44 | 58 | 77677.97 | 28 | 78224.59 | 58 | 78765.24 |
| 29 | 77143.95 | 59 | 77696.29 | 29 | 78242.71 | 59 | 78783.16 |
| 30 | 77162.46 | 60 | 77714.60 | 30 | 78260.82 | 60 | 78801.07 |

DEGRE

| M | Sinus. | M | Sinus. | M | Sinus. | M | Sinus. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 80901.70 | 30 | 81411.55 | 0 | 81915.21 | 30 | 82412.62 |
| 1 | 80918.79 | 31 | 81428.44 | 1 | 81931.89 | 31 | 82429.09 |
| 2 | 80935.88 | 32 | 81445.32 | 2 | 81948.56 | 32 | 82445.56 |
| 3 | 80952.96 | 33 | 81462.19 | 3 | 81965.23 | 33 | 82462.02 |
| 4 | 80970.03 | 34 | 81479.06 | 4 | 81981.89 | 34 | 82478.47 |
| 5 | 80987.10 | 35 | 81495.93 | 5 | 81998.54 | 35 | 82494.91 |
| 6 | 81004.16 | 36 | 81512.78 | 6 | 82015.19 | 36 | 82511.35 |
| 7 | 81021.21 | 37 | 81529.63 | 7 | 82031.83 | 37 | 82527.78 |
| 8 | 81038.26 | 38 | 81546.47 | 8 | 82048.46 | 38 | 82544.20 |
| 9 | 81055.30 | 39 | 81563.30 | 9 | 82065.08 | 39 | 82560.62 |
| 10 | 81072.33 | 40 | 81580.13 | 10 | 82081.70 | 40 | 82577.03 |
| 11 | 81089.36 | 41 | 81596.94 | 11 | 82098.31 | 41 | 82593.43 |
| 12 | 81106.38 | 42 | 81613.76 | 12 | 82114.92 | 42 | 82609.83 |
| 13 | 81123.39 | 43 | 81630.56 | 13 | 82131.52 | 43 | 82626.22 |
| 14 | 81140.40 | 44 | 81647.36 | 14 | 82148.11 | 44 | 82642.60 |
| 15 | 81157.40 | 45 | 81664.15 | 15 | 82164.69 | 45 | 82658.97 |
| 16 | 81174.39 | 46 | 81680.94 | 16 | 82181.27 | 46 | 82675.35 |
| 17 | 81191.37 | 47 | 81697.72 | 17 | 82197.84 | 47 | 82691.70 |
| 18 | 81208.35 | 48 | 81714.49 | 18 | 82214.40 | 48 | 82708.06 |
| 19 | 81225.32 | 49 | 81731.25 | 19 | 82230.96 | 49 | 82724.40 |
| 20 | 81242.29 | 50 | 81748.01 | 20 | 82247.51 | 50 | 82740.74 |
| 21 | 81259.25 | 51 | 81764.76 | 21 | 82264.05 | 51 | 82757.07 |
| 22 | 81276.20 | 52 | 81781.50 | 22 | 82280.59 | 52 | 82773.42 |
| 23 | 81293.14 | 53 | 81798.24 | 23 | 82297.12 | 53 | 82789.72 |
| 24 | 81310.08 | 54 | 81814.97 | 24 | 82313.64 | 54 | 82806.03 |
| 25 | 81327.01 | 55 | 81831.69 | 25 | 82330.15 | 55 | 82822.34 |
| 26 | 81343.93 | 56 | 81848.41 | 26 | 82346.66 | 56 | 82838.64 |
| 27 | 81360.84 | 57 | 81865.12 | 27 | 82363.16 | 57 | 82854.93 |
| 28 | 81377.75 | 58 | 81881.82 | 28 | 82379.65 | 58 | 82871.21 |
| 29 | 81394.65 | 59 | 81898.52 | 29 | 82396.14 | 59 | 82887.4[illegible] |
| 30 | 81411.55 | 60 | 81915.21 | 30 | 82412.62 | 60 | 82903.76 |

Degrés.

| M | Sinus. | M | Sinus. | M | Sinus. | M | Sinus. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 84804.81 | 30 | 85264.02 | 0 | 85716.73 | 30 | 86162.92 |
| 1 | 84820.22 | 31 | 85279.21 | 1 | 85731.71 | 31 | 86177.68 |
| 2 | 84835.62 | 32 | 85294.40 | 2 | 85746.68 | 32 | 86192.43 |
| 3 | 84851.02 | 33 | 85309.58 | 3 | 85761.64 | 33 | 86207.17 |
| 4 | 84866.41 | 34 | 85324.75 | [illegible] | 85776.60 | 34 | 86221.91 |
| 5 | 84881.79 | 35 | 85339.92 | 5 | 85791.55 | 35 | 86236.64 |
| 6 | 84897.17 | 36 | 85355.08 | 6 | 85806.49 | 36 | 86251.36 |
| 7 | 84912.54 | 37 | 85370.23 | 7 | 85821.42 | 37 | 86266.08 |
| 8 | 84927.90 | 38 | 85385.37 | 8 | 85836.35 | 38 | 86280.79 |
| 9 | 84943.35 | 39 | 85400.51 | [illegible] | 85851.27 | 39 | 86295.49 |
| 10 | 84958.60 | 40 | 85415.64 | 10 | 85866.18 | 40 | 86310.19 |
| 11 | 84973.94 | 41 | 85430.76 | 11 | 85881.09 | 41 | 86324.88 |
| 12 | 84989.27 | 42 | 85445.88 | 12 | 85895.99 | 42 | 86339.56 |
| 13 | 85004.59 | 43 | 85460.99 | 13 | 85910.88 | 43 | 86354.23 |
| 14 | 85019.91 | [illegible] | 85476.09 | 14 | 85925.76 | 44 | 86368.89 |
| 15 | 85035.22 | 45 | 85491.18 | 15 | 85940.64 | 45 | 86383.55 |
| 16 | 85050.52 | 46 | 85506.27 | 16 | 85955.51 | 46 | 86398.20 |
| 17 | 85065.82 | 47 | 85521.35 | 17 | 85970.37 | 47 | 86412.84 |
| [illegible] | 85081.11 | 48 | 85536.42 | 18 | 85985.23 | 48 | 86427.48 |
| 19 | 85096.39 | [illegible] | 85551.49 | 19 | 86000.07 | 49 | 86442.11 |
| 20 | 85111.66 | 50 | 85566.55 | 20 | 86014.91 | 50 | 86456.73 |
| 21 | 85126.93 | 51 | 85581.60 | 21 | 86029.75 | 51 | 86471.34 |
| 22 | 85142.19 | 52 | 85596.64 | 22 | 86044.57 | 52 | 86485.95 |
| 23 | 85157.44 | 53 | 85611.68 | 23 | 86059.39 | 53 | 86500.55 |
| 24 | 85172.69 | 54 | 85626.71 | 24 | 86074.20 | 54 | 86515.14 |
| 25 | 85187.93 | 55 | 85641.73 | 25 | 86089.00 | 55 | 86529.72 |
| 26 | 85203.16 | 56 | 85656.74 | 26 | 86103.80 | 56 | 86544.30 |
| 27 | 85218.39 | 57 | 85671.75 | 27 | 86118.59 | 57 | 86558.87 |
| 28 | 85233.60 | 58 | 85686.75 | 28 | 86133.37 | 58 | 86573.43 |
| 29 | 85248.81 | 59 | 85701.74 | 29 | 86148.15 | 59 | 86587.99 |
| 30 | 85264.01 | 60 | 85716.73 | 30 | 86162.92 | 60 | 86602.54 |

## S SINUS.

### 61 DEGR

| M | Sinus. | M | Sinus. | M | Sinus. | M | Sinus. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 86602.54 | 30 | 87035.57 | 0 | 87461.97 | 30 | |
| 1 | 86617.08 | 31 | 87049.89 | 1 | 87476.07 | 31 | |
| 2 | 86631.61 | 32 | 87064.10 | 2 | 87490.16 | 32 | |
| 3 | 86646.14 | 33 | 87078.51 | 3 | 87504.14 | 33 | |
| 4 | 86660.66 | 34 | 87092.81 | 4 | 87518.32 | 34 | |
| 5 | 86675.17 | 35 | 87107.10 | 5 | 87532.39 | 35 | |
| 6 | 86689.67 | 36 | 87121.38 | 6 | 87546.45 | 36 | |
| 7 | 86704.17 | 37 | 87135.66 | 7 | 87560.50 | 37 | |
| 8 | 86718.66 | 38 | 87149.93 | 8 | 87574.55 | 38 | |
| 9 | 86733.14 | 39 | 87164.19 | 9 | 87588.59 | 39 | |
| 10 | 86747.62 | 40 | 87178.44 | 10 | 87602.62 | 40 | |
| 11 | 86762.09 | 41 | 87192.69 | 11 | 87616.65 | 41 | |
| 12 | 86776.55 | 42 | 87206.93 | 12 | 87630.67 | 42 | |
| 13 | 86791.00 | 43 | 87221.16 | 13 | 87644.68 | 43 | |
| 14 | 86805.44 | 44 | 87235.38 | 14 | 87658.68 | 44 | |
| 15 | 86819.88 | 45 | 87249.60 | 15 | 87672.67 | 45 | |
| 16 | 86834.31 | 46 | 87263.81 | 16 | 87686.66 | 46 | |
| 17 | 86848.73 | 47 | 87278.01 | 17 | 87700.64 | 47 | |
| 18 | 86863.15 | 48 | 87292.21 | 18 | 87714.61 | 48 | |
| 19 | 86877.56 | 49 | 87306.40 | 19 | 87728.58 | 49 | |
| 20 | 86891.96 | 50 | 87320.58 | 20 | 87742.54 | 50 | |
| 21 | 86906.35 | 51 | 87334.75 | 21 | 87756.49 | 51 | |
| 22 | 86920.74 | 52 | 87348.91 | 22 | 87770.43 | 52 | |
| 23 | 86935.12 | 53 | 87363.07 | 23 | 87784.37 | 53 | 88198.98 |
| 24 | 86949.49 | 54 | 87377.22 | 24 | 87798.30 | 54 | 88212.68 |
| 25 | | | | | | | |
| 26 | | | | | | | |
| 27 | | | | | | | |
| 28 | | | | | | | |
| 29 | | | | | | | |
| 30 | | | | | | | |

| 62 Degrés. | | | | 63 Degrés. | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| M | Sinus. | M | Sinus. | M | Sinus. | M | Sinus. |
| 0 | 88294.76 | 30 | 88701.08 | 0 | 89100.66 | 30 | 89493.43 |
| 1 | 88308.41 | 31 | 88714.51 | 1 | 89113.85 | 31 | 89506.41 |
| 2 | 88322.05 | 32 | 88727.93 | 2 | 89127.05 | 32 | 89519.38 |
| 3 | 88335.69 | 33 | 88741.34 | 3 | 89140.24 | 33 | 89532.34 |
| 4 | 88349.32 | 34 | 88754.75 | 4 | 89153.42 | 34 | 89545.29 |
| 5 | 88362.94 | 35 | 88768.15 | 5 | 89166.59 | 35 | 89558.24 |
| 6 | 88376.56 | 36 | 88781.54 | 6 | 89179.75 | 36 | 89571.18 |
| 7 | 88390.17 | 37 | 88794.92 | 7 | 89192.91 | 37 | 89584.11 |
| 8 | 88403.77 | 38 | 88808.29 | 8 | 89206.06 | 38 | 89597.03 |
| 9 | 88417.36 | 39 | 88821.66 | 9 | 89219.20 | 39 | 89609.94 |
| 10 | 88430.95 | 40 | 88835.02 | 10 | 89232.34 | 40 | 89622.85 |
| 11 | 88444.53 | 41 | 88848.37 | 11 | 89245.46 | 41 | 89635.75 |
| 12 | 88458.10 | 42 | 88861.72 | 12 | 89258.58 | 42 | 89648.64 |
| 13 | 88471.66 | 43 | 88875.06 | 13 | 89271.69 | 43 | 89661.52 |
| 14 | 88485.22 | 44 | 88888.39 | 14 | 89284.79 | 44 | 89674.40 |
| 15 | 88498.76 | 45 | 88901.71 | 15 | 89297.89 | 45 | 89687.27 |
| 16 | 88512.30 | 46 | 88915.03 | 16 | 89310.98 | 46 | 89700.13 |
| 17 | 88525.83 | 47 | 88928.34 | 17 | 89324.06 | 47 | 89712.99 |
| 18 | 88539.36 | 48 | 88941.64 | 18 | 89337.14 | 48 | 89725.84 |
| 19 | 88552.88 | 49 | 88954.93 | 19 | 89350.21 | 49 | 89738.68 |
| 20 | 88566.39 | 50 | 88968.21 | 20 | 89363.27 | 50 | 89751.51 |
| 21 | 88579.89 | 51 | 88981.49 | 21 | 89376.32 | 51 | 89764.33 |
| 22 | 88593.39 | 52 | 88994.76 | 22 | 89389.36 | 52 | 89777.15 |
| 23 | 88606.88 | 53 | 89008.02 | 23 | 89402.39 | 53 | 89789.96 |
| 24 | 88620.36 | 54 | 89021.28 | 24 | 89415.42 | 54 | 89802.76 |
| 25 | 88633.83 | 55 | 89034.53 | 25 | 89428.44 | 55 | 89815.55 |
| 26 | 88647.29 | 56 | 89047.77 | 26 | 89441.45 | 56 | 89828.34 |
| 27 | 88660.75 | 57 | 89061.00 | 27 | 89454.46 | 57 | 89841.12 |
| 28 | 88674.20 | 58 | 89074.22 | 28 | 89467.46 | 58 | 89853.89 |
| 29 | 88687.64 | 59 | 89087.44 | 29 | 89480.45 | 59 | 89866.65 |
| 30 | 88701.08 | 60 | 89100.65 | 30 | 89493.43 | 60 | 89879.40 |

## 64 Degrés.

| M | Sinus. | M | Sinus. |
|---|---|---|---|
| 0 | 89879.40 | 30 | 90258.53 |
| 1 | 89892.15 | 31 | 90271.05 |
| 2 | 89904.89 | 32 | 90283.56 |
| 3 | 89917.62 | 33 | 90296.06 |
| 4 | 89930.35 | 34 | 90308.56 |
| 5 | 89943.07 | 35 | 90321.05 |
| 6 | 89955.78 | 36 | 90333.53 |
| 7 | 89968.48 | 37 | 90346.00 |
| 8 | 89981.17 | 38 | 90358.47 |
| 9 | 89993.86 | 39 | 90370.93 |
| 10 | 90006.54 | 40 | 90383.38 |
| 11 | 90019.21 | 41 | 90395.82 |
| 12 | 90031.87 | 42 | 90408.25 |
| 13 | 80044.53 | 43 | 90420.68 |
| 14 | 90057.18 | 44 | 90433.10 |
| 15 | 90069.82 | 45 | 90445.51 |
| 16 | 90082.45 | 46 | 90457.92 |
| 17 | 90095.08 | 47 | 90470.32 |
| 18 | 90107.70 | 48 | 90482.71 |
| 19 | 90120.31 | 49 | 90495.09 |
| 20 | 90132.91 | 50 | 90507.46 |
| 21 | 90145.51 | 51 | 90519.83 |
| 22 | 90158.10 | 52 | 90532.19 |
| 23 | 90170.68 | 53 | 90544.54 |
| 24 | 90183.25 | 54 | 90556.88 |
| 25 | 90195.82 | 55 | 90569.21 |
| 26 | 90208.38 | 56 | 90581.54 |
| 27 | 90120.92 | 57 | 90593.86 |
| 28 | 90233.47 | 58 | 90606.17 |
| 29 | 90246.00 | 59 | 90618.48 |
| 30 | 90258.53 | 60 | 90630.78 |

## 65 Degrés.

| M | Sinus. | M | Sinus. |
|---|---|---|---|
| 0 | 90630.78 | 30 | 90996.13 |
| 1 | 90643.07 | 31 | 91008.19 |
| 2 | 90655.35 | 32 | 91020.24 |
| 3 | 90667.62 | 33 | 91032.28 |
| 4 | 90679.89 | 34 | 91044.32 |
| 5 | 90692.15 | 35 | 91056.35 |
| 6 | 90704.40 | 36 | 91068.37 |
| 7 | 90716.64 | 37 | 91080.38 |
| 8 | 90728.88 | 38 | 91092.38 |
| 9 | 90741.11 | 39 | 91104.38 |
| 10 | 90753.33 | 40 | 91116.37 |
| 11 | 90765.54 | 41 | 91128.35 |
| 12 | 90777.75 | 42 | 91140.32 |
| 13 | 90789.95 | 43 | 91152.29 |
| 14 | 90802.14 | 44 | 91164.25 |
| 15 | 90814.32 | 45 | 91176.20 |
| 16 | 90826.49 | 46 | 91188.14 |
| 17 | 90838.66 | 47 | 91200.08 |
| 18 | 90850.82 | 48 | 91212.01 |
| 19 | 90862.97 | 49 | 91223.93 |
| 20 | 90875.11 | 50 | 91235.84 |
| 21 | 90887.25 | 51 | 91247.75 |
| 22 | 90899.38 | 52 | 91259.65 |
| 23 | 90911.50 | 53 | 91271.54 |
| 24 | 90923.61 | 54 | 91283.42 |
| 25 | 90935.71 | 55 | 91295.29 |
| 26 | 90947.81 | 56 | 91307.16 |
| 27 | 90959.90 | 57 | 91319.02 |
| 28 | 90971.98 | 58 | 91330.87 |
| 29 | 90984.06 | 59 | 91342.71 |
| 30 | 90996.13 | 60 | 91354.54 |

| 66 Degrés. | | | | 67 Degrés. | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| M | Sinus. | M | Sinus. | M | Sinus. | M | Sinus. |
| 0 | 91354.54 | 30 | 91706.01 | 0 | 92050.49 | 30 | 92387.95 |
| 1 | 91366.37 | 31 | 91717.60 | 1 | 92061.85 | 31 | 92399.08 |
| 2 | 91378.19 | 32 | 91729.19 | 2 | 92073.20 | 32 | 92410.10 |
| 3 | 91390.00 | 33 | 91740.77 | 3 | 92084.55 | 33 | 92421.31 |
| 4 | 91401.81 | 34 | 91752.34 | 4 | 92095.89 | 34 | 92432.41 |
| 5 | 91413.61 | 35 | 91763.90 | 5 | 92107.22 | 35 | 92443.51 |
| 6 | 91425.40 | 36 | 91775.46 | 6 | 92118.54 | 36 | 92454.60 |
| 7 | 91437.18 | 37 | 91787.01 | 7 | 92129.85 | 37 | 92465.68 |
| 8 | 91448.95 | 38 | 91798.55 | 8 | 92141.16 | 38 | 92476.75 |
| 9 | 91460.71 | 39 | 91810.08 | 9 | 92152.46 | 39 | 92487.82 |
| 10 | 91472.47 | 40 | 91821.61 | 10 | 62163.75 | 40 | 92498.88 |
| 11 | 91484.22 | 41 | 61833.13 | 11 | 92175.03 | 41 | 92509.93 |
| 12 | 91495.96 | 42 | 91844.64 | 12 | 92186.31 | 42 | 92520.97 |
| 13 | 91507.70 | 43 | 91856.14 | 13 | 92197.58 | 43 | 92532.00 |
| 14 | 91519.43 | 44 | 91867.63 | 14 | 92208.84 | 44 | 92543.03 |
| 15 | 91531.15 | 45 | 91879.12 | 15 | 92220.09 | 45 | 92554.05 |
| 16 | 91542.86 | 46 | 91890.60 | 16 | 92231.34 | 46 | 92565.06 |
| 17 | 91554.56 | 47 | 91902.07 | 17 | 92242.58 | 47 | 92576.06 |
| 18 | 91566.26 | 48 | 91913.53 | 18 | 92253.81 | 48 | 92587.06 |
| 19 | 91577.95 | 49 | 91924.99 | 19 | 92265.03 | 49 | 92598.05 |
| 20 | 91589.63 | 50 | 91936.44 | 20 | 92276.24 | 50 | 92609.02 |
| 21 | 91601.30 | 51 | 91947.88 | 21 | 92287.45 | 51 | 92620.00 |
| 22 | 91612.96 | 52 | 91959.31 | 22 | 92298.65 | 52 | 92630.96 |
| 23 | 91624.62 | 53 | 91970.73 | 23 | 92309.84 | 53 | 92641.91 |
| 24 | 91636.27 | 54 | 91982.15 | 24 | 92321.02 | 54 | 92652.86 |
| 25 | 91647.91 | 55 | 91993.56 | 25 | 92332.19 | 55 | 92663.80 |
| 26 | 91659.55 | 56 | 92004.96 | 26 | 92343.36 | 56 | 92674.73 |
| 27 | 91671.18 | 57 | 92016.35 | 27 | 92354.52 | 57 | 92685.66 |
| 28 | 91682.80 | 58 | 92027.74 | 28 | 92365.67 | 58 | 92696.58 |
| 29 | 91694.41 | 59 | 92039.12 | 29 | 92376.82 | 59 | 92707.48 |
| 30 | 91706.01 | 60 | 92050.49 | 30 | 92387.95 | 60 | 92718.39 |

# TABLE DES SINUS.

| 68 Degrés. | | | | 69 Degrés. | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| M | Sinus. | M | Sinus. | M | Sinus. | M | Sinus. |
| 0 | 92718.39 | 30 | 93041.75 | 0 | 93358.04 | 30 | 93667.22 |
| 1 | 92729.28 | 31 | 93052.41 | 1 | 93368.46 | 31 | 93677.40 |
| 2 | 92740.16 | 32 | 93063.06 | 2 | 93378.87 | 32 | 93687.57 |
| 3 | 92751.04 | 33 | 93073.70 | 3 | 93389.28 | 33 | 93697.74 |
| 4 | 92761.91 | 34 | 93084.33 | 4 | 93399.68 | 34 | 93707.90 |
| 5 | 92772.77 | 35 | 93094.96 | 5 | 93410.07 | 35 | 93718.05 |
| 6 | 92783.62 | 36 | 93105.58 | 6 | 93420.45 | 36 | 93728.19 |
| 7 | 92794.47 | 37 | 93116.19 | 7 | 93430.82 | 37 | 93738.33 |
| 8 | 92805.31 | 38 | 93126.79 | 8 | 93441.18 | 38 | 93748.46 |
| 9 | 92816.14 | 39 | 93137.38 | 9 | 93451.54 | 39 | 93758.58 |
| 10 | 92826.96 | 40 | 93147.97 | 10 | 93461.89 | 40 | 93768.69 |
| 11 | 92837.77 | 41 | 93158.55 | 11 | 93472.23 | 41 | 93778.80 |
| 12 | 92848.58 | 42 | 93169.12 | 12 | 93482.56 | 42 | 93788.89 |
| 13 | 92859.38 | 43 | 93179.68 | 13 | 93492.89 | 43 | 93798.98 |
| 14 | 92870.17 | 44 | 93190.24 | 14 | 93503.21 | 44 | 93809.06 |
| 15 | 92880.95 | 45 | 93200.79 | 15 | 93513.52 | 45 | 93819.13 |
| 16 | 92891.73 | 46 | 93211.33 | 16 | 93523.82 | 46 | 93829.19 |
| 17 | 92902.50 | 47 | 93221.86 | 17 | 93534.11 | 47 | 93839.25 |
| 18 | 92913.26 | 48 | 93232.38 | 18 | 93544.40 | 48 | 93849.30 |
| 19 | 92924.01 | 49 | 93242.89 | 19 | 93554.68 | 49 | 93859.34 |
| 20 | 92934.75 | 50 | 93253.40 | 20 | 93564.95 | 50 | 93869.37 |
| 21 | 92945.49 | 51 | 93263.90 | 21 | 93575.21 | 51 | 93879.40 |
| 22 | 82956.22 | 52 | 93274.39 | 22 | 93585.46 | 52 | 93889.42 |
| 23 | 92966.94 | 53 | 93284.87 | 23 | 93595.71 | 53 | 93899.43 |
| 24 | 92977.65 | 54 | 93295.35 | 24 | 93605.95 | 54 | 93909.43 |
| 25 | 92988.35 | 55 | 93305.82 | 25 | 93616.18 | 55 | 93919.42 |
| 26 | 92999.05 | 56 | 93316.28 | 26 | 93626.40 | 56 | 93929.40 |
| 27 | 93009.74 | 57 | 93326.73 | 27 | 93636.62 | 57 | 93939.38 |
| 28 | 93020.42 | 58 | 93337.17 | 28 | 93646.83 | 58 | 93949.35 |
| 29 | 93031.09 | 59 | 93347.61 | 29 | 93657.03 | 59 | 93959.31 |
| 30 | 93041.75 | 60 | 93358.04 | 30 | 93667.22 | 60 | 93969.26 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | [illegible] | 30 | [illegible] | 0 | [illegible] | 30 | [illegible] |
| 1 | 93979.21 | 31 | 94273.86 | 1 | 94561.32 | 31 | 94841.59 |
| 2 | 93989.14 | 32 | 94283.56 | 2 | 94570.78 | 32 | 94850.81 |
| 3 | 93999.07 | 33 | 94293.25 | 3 | 94580.23 | 33 | 94860.02 |
| 4 | 94008.99 | 34 | 94302.93 | 4 | 94589.67 | 34 | 94869.22 |
| 5 | 94018.90 | 35 | 94312.60 | 5 | 94599.10 | 35 | 94878.41 |
| 6 | 94028.81 | 36 | 94322.26 | 6 | 94608.53 | 36 | 94887.60 |
| 7 | 94038.71 | 37 | 94331.92 | 7 | 94617.95 | 37 | 94896.78 |
| 8 | 94048.60 | 38 | 94341.57 | 8 | 94627.36 | 38 | 94905.95 |
| 9 | 94058.48 | 39 | 94351.21 | 9 | 94636.76 | 39 | 94915.11 |
| 10 | 94068.35 | 40 | 94360.85 | 10 | 94646.16 | 40 | 94924.26 |
| 11 | 94078.22 | 41 | 94370.48 | 11 | 94655.55 | 41 | 94933.41 |
| 12 | 94088.08 | 42 | 94380.10 | 12 | 94664.93 | 42 | 94942.55 |
| 13 | 94097.93 | 43 | 94389.71 | 13 | 94674.30 | 43 | 94951.68 |
| 14 | 94107.77 | 44 | 94399.31 | 14 | 94683.66 | 44 | 94960.80 |
| 15 | 94117.60 | 45 | 94408.90 | 15 | 94693.01 | 45 | 94969.91 |
| 16 | 94127.42 | 46 | 94418.49 | 16 | 94702.36 | 46 | 94979.02 |
| 17 | 94137.24 | 47 | 94428.07 | 17 | 94712.70 | 47 | 94988.12 |
| 18 | 94147.05 | 48 | 94437.64 | 18 | 94721.03 | 48 | 94997.21 |
| 19 | 94156.86 | 49 | 94447.20 | 19 | 94730.35 | 49 | 95006.29 |
| 20 | 94166.65 | 50 | 94456.75 | 20 | 94739.66 | 50 | 95015.36 |
| 21 | 94176.44 | 51 | 94466.30 | 21 | 94748.97 | 51 | 95024.42 |
| 22 | 94186.22 | 52 | 94475.84 | 22 | 94758.27 | 52 | 95033.48 |
| 23 | 94195.99 | 53 | 94485.37 | 23 | 94767.56 | 53 | 95042.53 |
| 24 | 94205.75 | 54 | 94494.89 | 24 | 94776.84 | 54 | 95051.57 |
| 25 | 94215.50 | 55 | 94504.40 | 25 | 94786.11 | 55 | 95060.60 |
| 26 | 94225.24 | 56 | 94513.91 | 26 | 94795.38 | 56 | 95069.63 |
| 27 | 94234.98 | 57 | 94523.41 | 27 | 94804.64 | 57 | 95078.65 |
| 28 | 94244.71 | 58 | 94532.90 | 28 | 94813.89 | 58 | 95087.66 |
| 29 | 94254.43 | 59 | 94542.38 | 29 | 94823.13 | 59 | 95096.66 |

## ABLE DES SI

DEGRÈS. 73

| M | Sinus. | M | Sinus. |
|---|---|---|---|
| 0 | 95105.65 | 30 | 95371.69 |
| 1 | 95114.63 | 31 | 95380.43 |
| 2 | 95123.61 | 32 | 95389.17 |
| 3 | 95132.58 | 33 | 95397.90 |
| 4 | 95141.54 | 34 | 95406.62 |
| 5 | 95150.50 | 35 | 95415.33 |
| 6 | 95159.44 | 36 | 95424.03 |
| 7 | 95168.38 | 37 | 95432.72 |
| 8 | 95177.31 | 38 | 95441.41 |
| 9 | 95186.23 | 39 | 95450.09 |
| 10 | 95195.14 | 40 | 95458.76 |
| 11 | 95204.04 | 41 | 95467.42 |
| 12 | 95212.94 | 42 | 95476.07 |
| 13 | 95221.83 | 43 | 95484.72 |
| 14 | 95230.71 | 44 | 95493.36 |
| 15 | 95239.58 | 45 | 95501.99 |
| 16 | 95248.44 | 46 | 95510.61 |
| 17 | 95257.30 | 47 | 95519.23 |
| 18 | 95266.15 | 48 | 95527.83 |
| 19 | 95274.99 | 49 | 95536.43 |
| 20 | 95283.82 | 50 | 95545.02 |
| 21 | 95292.64 | 51 | 95553.60 |
| 22 | 95301.46 | 52 | 95562.17 |
| 23 | 95310.27 | 53 | 95570.74 |
| 24 | 95319.07 | 54 | 95579.30 |
| 25 | 95327.86 | 55 | 95587.85 |
| 26 | 95336.64 | 56 | 95596.39 |
| 27 | 95345.42 | 57 | 95604.92 |
| 28 | 95354.18 | 58 | 95613.45 |
| 29 | 95362.94 | 59 | 95621.97 |
| 30 | 95371.69 | 60 | 95630.48 |

| M | Si | | |
|---|---|---|---|
| 0 | 9563 | | |
| 1 | 95638.98 | 31 | 95890.23 |
| 2 | 95647.47 | 32 | 95898.48 |
| 3 | 95655.95 | 33 | 95906.72 |
| 4 | 95664.43 | 34 | 95914.95 |
| 5 | 95672.90 | 35 | 95923.18 |
| 6 | 95681.36 | 36 | 95931.40 |
| 7 | 95689.81 | 37 | 95939.61 |
| 8 | 95698.25 | 38 | 95947.81 |
| 9 | 95706.69 | 39 | 95956.00 |
| 10 | 95715.12 | 40 | 95964.18 |
| 11 | 95723.54 | 41 | 95972.36 |
| 12 | 95731.95 | 42 | 95980.53 |
| 13 | 95740.35 | 43 | 95988.69 |
| 14 | 95748.75 | 44 | 95996.84 |
| 15 | 95757.14 | 45 | 96004.98 |
| 16 | 95765.52 | 46 | 96013.12 |
| 17 | 95773.89 | 47 | 96021.25 |
| 18 | 95782.25 | 48 | 96029.37 |
| 19 | 95790.60 | 49 | 96037.48 |
| 20 | 95798.95 | 50 | 96045.58 |
| 21 | 95807.29 | 51 | 96053.68 |
| 22 | 95815.62 | 52 | 96061.77 |
| 23 | 95823.94 | 53 | 96069.85 |
| 24 | 95832.26 | 54 | 96077.92 |
| 25 | 95840.56 | 55 | 96085.98 |
| 26 | 85848.86 | 56 | 96094.03 |
| 27 | 95857.15 | 57 | 96102.08 |
| 28 | 95865.43 | 58 | 96110.12 |
| 29 | 95873.70 | 59 | 96118.15 |
| 30 | 95881.97 | 60 | 96126.17 |

## 74 Degrés.

| M | Sinus. | M | Sinus. |
|---|---|---|---|
| 0 | 96126.17 | 30 | 96363.05 |
| 1 | 96134.18 | 31 | 96370.83 |
| [redacted] | 96142.19 | 32 | 96378.58 |
| 3 | 96150.19 | 33 | 96386.33 |
| [redacted] | 96158.18 | 34 | 96394.07 |
| 5 | 96166.16 | 35 | 96401.81 |
| 6 | 96174.13 | 36 | 96409.54 |
| 7 | 96182.09 | 37 | 96417.26 |
| 8 | 96190.05 | 38 | 96424.97 |
| 9 | 96198.00 | 39 | 96432.67 |
| 10 | 96205.94 | 40 | 96440.37 |
| [redacted] | 96213.87 | 41 | 96448.06 |
| 12 | 96221.80 | 42 | 96455.74 |
| 13 | 96229.72 | 43 | 96463.41 |
| 14 | 96237.62 | 44 | 96471.07 |
| 15 | 96245.53 | 45 | 96478.73 |
| 16 | 96253.42 | 46 | 96486.38 |
| 17 | 96261.30 | 47 | 96494.02 |
| 18 | 96269.17 | 48 | 96501.65 |
| 19 | 96277.04 | 49 | 96509.27 |
| 20 | 96284.90 | 50 | 96516.88 |
| 21 | 96292.75 | 51 | 96524.49 |
| 22 | 96300.59 | 52 | 96532.09 |
| 23 | 96308.43 | 53 | 96539.68 |
| 24 | 96316.26 | 54 | 96547.26 |
| 25 | 96324.08 | 55 | 96554.83 |
| 26 | 96331.89 | 56 | 96562.40 |
| 27 | 96339.69 | 57 | 96569.96 |
| 28 | 96347.48 | 58 | 96577.51 |
| 29 | 96355.27 | 59 | 96585.05 |
| 30 | 96363.05 | 60 | 96592.58 |

## 75

| M | Si | | |
|---|---|---|---|
| 0 | 96592.58 | 30 | 96814.76 |
| 1 | 96600.10 | 31 | 96822.04 |
| 2 | 96607.62 | 32 | 96829.31 |
| 3 | 96615.13 | 33 | 96836.57 |
| 4 | 96622.63 | 34 | 96843.83 |
| 5 | 96630.12 | 35 | 96851.08 |
| 6 | 96637.60 | 36 | 96858.32 |
| [redacted] | 96645.08 | 37 | 96865.55 |
| 8 | 96652.55 | 38 | 96872.77 |
| 9 | 96660.01 | 39 | 96879.98 |
| 10 | 96667.46 | 40 | 96887.18 |
| 11 | 96674.90 | 41 | 96894.38 |
| 12 | 96682.33 | 42 | 96901.57 |
| 13 | 96689.76 | 43 | 96908.75 |
| 14 | 96697.18 | 44 | 96915.92 |
| 15 | 96704.59 | 45 | 96923.09 |
| 16 | 96711.99 | 46 | 96930.25 |
| 17 | 96719.38 | 47 | 96937.40 |
| 18 | 96726.77 | 48 | 96944.54 |
| 19 | 96734.15 | 49 | 96951.67 |
| 20 | 96741.52 | 50 | 96958.79 |
| [redacted] | 96748.88 | 51 | 96965.90 |
| 22 | 96756.23 | 52 | 96973.01 |
| 23 | 95763.58 | 53 | 96980.11 |
| 24 | [illegible] | | |
| 25 | [illegible] | | |
| 26 | [illegible] | | |
| 27 | [illegible] | | |
| 28 | [illegible] | | |
| 29 | [illegible] | | |
| 30 | [illegible] | | |

## 76 Degrés.

| M | Sinus. | M | Sinus. |
|---|---|---|---|
| 0 | 97029.57 | 30 | 97236.99 |
| 1 | 97036.60 | 31 | 97243.78 |
| 2 | 97043.63 | 32 | 97250.56 |
| 3 | 97050.65 | 33 | 97257.33 |
| 4 | 97057.66 | 34 | 97264.09 |
| 5 | 97064.66 | 35 | 97270.84 |
| 6 | 97071.65 | 36 | 97277.58 |
| 7 | 97078.63 | 37 | 97284.32 |
| 8 | 97085.61 | 38 | 97291.05 |
| 9 | 97092.58 | 39 | 97297.77 |
| 10 | 97099.54 | 40 | 97304.48 |
| 11 | 97106.49 | 41 | 97311.18 |
| 12 | 97113.43 | 42 | 97317.88 |
| 13 | 97120.36 | 43 | 97324.57 |
| 14 | 97127.29 | 44 | 97331.25 |
| 15 | 97134.21 | 45 | 97337.92 |
| 16 | 97141.22 | 46 | 97344.58 |
| 17 | 97148.02 | 47 | 97351.24 |
| 18 | 97154.91 | 48 | 97357.89 |
| 19 | 97161.79 | [illegible] | 97364.53 |
| 20 | 97168.67 | 50 | 97371.16 |
| 21 | 97175.54 | 51 | 97377.78 |
| 22 | 97182.40 | 52 | 97384.39 |
| 23 | 97189.25 | 53 | 97391.00 |
| 24 | 97196.09 | 54 | 97397.60 |
| 25 | 97202.93 | 55 | 97404.19 |
| 26 | 97209.76 | 56 | 97410.77 |
| 27 | 97216.58 | 57 | 97417.34 |
| 28 | 97223.39 | 58 | 97423.90 |
| 29 | 97230.19 | 59 | 97430.46 |
| 30 | 97236.99 | 60 | 97437.01 |

## 77 Degrés.

| M | Sinus. | M | Sinus. |
|---|---|---|---|
| 0 | 97437.01 | 30 | 97629.60 |
| 1 | 97443.51 | 31 | 97635.89 |
| 2 | 97450.08 | 32 | 97642.17 |
| 3 | 97456.60 | 33 | 97648.45 |
| 4 | 97463.11 | 34 | 97654.72 |
| 5 | 97469.62 | 35 | 47660.98 |
| 6 | 97476.12 | 36 | 97667.23 |
| 7 | 97482.61 | 37 | 97673.47 |
| 8 | 97489.09 | 38 | 97679.70 |
| 9 | 97495.56 | 39 | 97685.93 |
| 10 | 67502.03 | 40 | 97692.15 |
| 11 | 97508.49 | 41 | 97698.36 |
| 12 | 97514.94 | 42 | 97704.56 |
| 13 | 97521.38 | 43 | 97710.75 |
| 14 | 97527.81 | 44 | 97716.93 |
| 15 | 97534.23 | 45 | 97723.11 |
| 16 | 97540.65 | 46 | 97729.28 |
| 17 | 97547.06 | 47 | 97735.44 |
| 18 | 97553.46 | 48 | 97741.59 |
| 19 | 97559.85 | 49 | 97747.73 |
| 20 | 97566.23 | 50 | 97753.86 |
| 21 | 97572.60 | 51 | 97759.99 |
| 22 | 97578.97 | 52 | 97766.11 |
| 23 | 97585.33 | 53 | 97772.22 |
| 24 | 97591.68 | 54 | 97778.32 |
| 25 | 97598.02 | 55 | 97784.41 |
| 26 | 97604.35 | 56 | 97790.50 |
| 27 | 97610.67 | 57 | 97796.58 |
| 28 | 97616.99 | 58 | 97802.65 |
| 29 | 97623.30 | 59 | 97808.71 |
| 30 | 97629.60 | 60 | 97814.76 |

## 78 Degrès.

| M | Sinus. | M | Sinus. |
|---|---|---|---|
| 0 | 97814.76 | 30 | 97992.47 |
| 1 | 97820.80 | 31 | 97998.26 |
| 2 | 97826.84 | 32 | 98004.05 |
| 3 | 97832.87 | 33 | 98009.83 |
| 4 | 97838.89 | 34 | 98015.60 |
| 5 | 97844.90 | 35 | 98021.36 |
| 6 | 97850.90 | 36 | 98027.11 |
| 7 | 97856.89 | 37 | 98032.86 |
| 8 | 97862.88 | 38 | 98038.60 |
| 9 | 97868.86 | 39 | 98044.33 |
| 10 | 97874.83 | 40 | 98050.05 |
| 11 | 97880.79 | 41 | 98055.76 |
| 12 | 97886.74 | 42 | 98061.46 |
| 13 | 97892.68 | 43 | 98067.16 |
| 14 | 97898.62 | [illegible] | 98072.85 |
| 15 | 97904.55 | 45 | 98078.53 |
| 16 | 97910.47 | 46 | 98084.20 |
| 17 | 97916.38 | 47 | 98089.86 |
| 18 | 97922.28 | 48 | 98095.51 |
| 19 | 97928.17 | 49 | 98101.16 |
| 20 | 97934.06 | 50 | 98106.80 |
| 21 | 97939.94 | 51 | 98112.43 |
| 22 | 97945.81 | 52 | 98118.05 |
| 23 | 97951.67 | [illegible] | 98123.66 |
| 24 | 97957.52 | 54 | 98129.26 |
| 25 | 97663.37 | 55 | 98134.86 |
| 26 | 97969.21 | 56 | 98140.45 |
| 27 | 97975.04 | 57 | 98146.03 |
| 28 | 97980.86 | 58 | 98151.60 |
| 29 | 97986.67 | 59 | 98157.16 |
| 30 | 97992.47 | 60 | 98162.71 |

## 79 Degrès.

| M | Sinus. | M | Sinus. |
|---|---|---|---|
| 0 | 98162.71 | 30 | 98325.49 |
| 1 | 98168.26 | 31 | 98330.79 |
| 2 | 98173.80 | 32 | 98336.08 |
| 3 | 98179.33 | 33 | 98341.36 |
| 4 | 98184.85 | 34 | 98346.63 |
| 5 | 98190.36 | 35 | 98351.89 |
| 6 | 98195.97 | 36 | 98357.14 |
| 7 | 98201.37 | 37 | 98362.39 |
| 8 | 98206.86 | 38 | 98367.63 |
| 9 | 98212.34 | 39 | 98372.86 |
| 10 | 98217.81 | 40 | 98378.08 |
| 11 | 98223.27 | 41 | 98383.29 |
| 12 | 98228.72 | 42 | 98388.50 |
| 13 | 98234.17 | 43 | 98393.70 |
| 14 | 98239.61 | 44 | 98398.89 |
| 15 | 98245.04 | 45 | 98404.07 |
| 16 | 98250.46 | 46 | 28409.24 |
| 17 | 98255.87 | 47 | 98414.40 |
| 18 | 98261.27 | 48 | 98419.56 |
| 19 | 98266.67 | 49 | 98424.71 |
| 20 | 98272.06 | 50 | 98429.85 |
| 21 | 98277.44 | 51 | 98434.98 |
| 22 | 98282.81 | 52 | 98440.10 |
| 23 | 98288.17 | 53 | 98445.21 |
| 24 | 98293.53 | 54 | 98450.31 |
| 25 | 98298.88 | 55 | 98455.41 |
| 26 | 98304.22 | 56 | 98460.50 |
| 27 | 98309.55 | 57 | 98465.58 |
| 28 | 98314.87 | 58 | 98470.65 |
| 29 | 98320.18 | 59 | 98475.71 |
| 30 | 98325.49 | 60 | 98480.77 |

| Degree. | | | | 83 Degree. | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| M | Sinus. | M | Sinus. | M | Sinus. | M | Sinus. |
| 0 | 99026.80 | 30 | 99144.49 | 0 | 99254.62 | 30 | 99357.18 |
| 1 | 99030.84 | 31 | 99148.28 | 1 | 99258.16 | 31 | 99360.47 |
| 2 | 99034.88 | 32 | 99152.06 | 2 | 99261.69 | 32 | 99363.75 |
| 3 | 99038.91 | 33 | 99155.84 | 3 | 99265.21 | 33 | 99367.02 |
| 4 | 99042.93 | 34 | 99159.61 | 4 | 99268.72 | 34 | 99370.28 |
| 5 | 99046.92 | 35 | 99163.37 | 5 | 99272.23 | 35 | 99373.54 |
| 6 | 99050.94 | 36 | 99167.12 | 6 | 99275.73 | 36 | 99376.79 |
| 7 | 99054.93 | 37 | 99170.86 | 7 | 99279.22 | 37 | 99380.03 |
| 8 | 99058.92 | 38 | 99174.59 | 8 | 99282.70 | 38 | 99383.26 |
| 9 | 99062.90 | 39 | 99178.31 | 9 | 99286.17 | 39 | 99386.48 |
| 10 | 99066.87 | 40 | 99182.03 | 10 | 99289.64 | 40 | 99389.69 |
| 11 | 99070.83 | 41 | 99185.74 | 11 | 99293.10 | 41 | 99392.89 |
| 12 | 99074.78 | 42 | 99189.44 | 12 | 99296.55 | 42 | 99396.09 |
| 13 | 99078.72 | 43 | 99193.13 | 13 | 99299.99 | 43 | 99399.28 |
| 14 | 99082.66 | 44 | 99196.81 | 14 | 99303.42 | 44 | 99402.46 |
| 15 | 99086.58 | 45 | 99200.49 | 15 | 99306.84 | 45 | 99405.63 |
| 16 | 99090.51 | 46 | 99204.16 | 16 | 99310.25 | 46 | 99408.79 |
| 17 | 99094.41 | 47 | 99207.82 | 17 | 99313.66 | 47 | 99411.94 |
| 18 | 99098.32 | 48 | 99211.47 | 18 | 99317.06 | 48 | 99415.09 |
| 19 | 99102.21 | 49 | 99215.11 | 19 | 99320.45 | 49 | 99418.23 |
| 20 | 99106.09 | 50 | 99218.74 | 20 | 99323.83 | 50 | 99421.36 |
| 21 | 99109.97 | 51 | 99222.36 | 21 | 99327.20 | 51 | 99424.48 |
| 22 | 99113.84 | 52 | 99225.98 | 22 | 99330.57 | 52 | 99427.59 |
| 23 | 99117.70 | 53 | 99229.59 | 23 | 99333.93 | 53 | 99430.69 |
| 24 | 99121.55 | 54 | 99233.19 | 24 | 99337.28 | 54 | 99433.79 |
| 25 | 99125.39 | 55 | 99236.78 | 25 | 99340.62 | 55 | 99436.88 |
| 26 | 99129.23 | 56 | 99240.36 | 26 | 99343.95 | 56 | 99439.96 |
| 27 | 99133.06 | 57 | 99243.94 | 27 | 99347.27 | 57 | 99443.03 |
| 28 | 99136.88 | 58 | 99247.51 | 28 | 99350.58 | 58 | 99446.09 |
| 29 | 99140.69 | 59 | 99251.07 | 29 | 99353.88 | 59 | 99449.14 |
| 30 | 99144.49 | 60 | 99254.62 | 30 | 99357.18 | 60 | 99452.18 |

| 84 Degrés. | | | | 85 Degrés. | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *M.* | *Sinus.* | *M.* | *Sinus.* | *M.* | *Sinus.* | *M.* | *Sinus.* |
| 0 | 99452.18 | 30 | 99539.62 | 0 | 99619.47 | 30 | 99691.73 |
| 1 | 99455.22 | 31 | 99542.40 | 1 | 99622.00 | 31 | 99694.01 |
| 2 | 99458.25 | 32 | 99545.17 | 2 | 99624.52 | 32 | 99696.28 |
| 3 | 99461.27 | 33 | 99547.94 | 3 | 99627.03 | 33 | 99698.54 |
| 4 | 99464.28 | 34 | 99550.70 | 4 | 99629.54 | 34 | 99700.79 |
| 5 | 99467.28 | 35 | 99553.45 | 5 | 99632.04 | 35 | 99703.03 |
| 6 | 99470.27 | 36 | 99556.19 | 6 | 99634.53 | 36 | 99705.27 |
| 7 | 99473.26 | 37 | 99558.92 | 7 | 99637.01 | 37 | 99707.50 |
| 8 | 99476.24 | 38 | 99561.65 | 8 | 99639.48 | 38 | 99709.72 |
| 9 | 99479.21 | 39 | 99564.37 | 9 | 99641.94 | 39 | 99711.93 |
| 10 | 99482.17 | 40 | 99567.08 | 10 | 99644.40 | 40 | 99714.13 |
| 11 | 99485.12 | 41 | 99569.78 | 11 | 99646.85 | 41 | 99716.32 |
| 12 | 99488.06 | 42 | 99572.47 | 12 | 99649.29 | 42 | 99718.51 |
| 13 | 99491.00 | 43 | 99575.15 | 13 | 99651.72 | 43 | 99720.69 |
| 14 | 99493.93 | 44 | 99577.82 | 14 | 99654.14 | 44 | 99722.86 |
| 15 | 99496.85 | 45 | 99580.49 | 15 | 99656.55 | 45 | 99725.02 |
| 16 | 99499.76 | 46 | 99583.15 | 16 | 99658.95 | 46 | 99727.17 |
| 17 | 99502.66 | 47 | 99585.80 | 17 | 99661.35 | 47 | 99729.31 |
| 18 | 99505.55 | 48 | 99588.44 | 18 | 99663.74 | 48 | 99731.44 |
| 19 | 99508.44 | 49 | 99591.07 | 19 | 99666.12 | 49 | 99733.57 |
| 20 | 99511.32 | 50 | 99593.69 | 20 | 99668.49 | 50 | 99735.69 |
| 21 | 99514.19 | 51 | 99596.31 | 21 | 99670.85 | 51 | 99737.80 |
| 22 | 99517.05 | 52 | 99598.92 | 22 | 99673.20 | 52 | 99739.90 |
| 23 | 99519.90 | 53 | 99601.52 | 23 | 99675.55 | 53 | 99741.99 |
| 24 | 99522.74 | 54 | 99604.11 | 24 | 99677.89 | 54 | 99744.07 |
| 25 | 99525.57 | 55 | 99606.69 | 25 | 99680.22 | 55 | 99746.15 |
| 26 | 99528.40 | 56 | 99609.26 | 26 | 99682.54 | 56 | 99748.22 |
| 27 | 99531.22 | 57 | 99611.82 | 27 | 99684.85 | 57 | 99750.28 |
| 28 | 99534.03 | 58 | 99614.38 | 28 | 99687.15 | 58 | 99752.33 |
| 29 | 99536.83 | 59 | 99616.93 | 29 | 99689.44 | 59 | 99754.37 |
| 30 | 99539.62 | 60 | 99619.47 | 30 | 99691.73 | 60 | 99756.40 |

## 86 DEG

| M. | Sinus. | M. | Sinus. | M. | Sinus. | M. | Sinus. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 99756.40 | 30 | 99813.48 | 0 | 99862.95 | 30 | 99904.82 |
| 1 | 99758.42 | 31 | 99815.25 | 1 | 99864.47 | 31 | 99906.08 |
| 2 | 99760.44 | 32 | 99817.01 | 2 | 99865.98 | 32 | 99907.34 |
| 3 | 99762.45 | 33 | 99818.78 | 3 | 99867.48 | 33 | 99908.59 |
| 4 | 99764.45 | 34 | 99820.51 | 4 | 99868.97 | 34 | 99909.83 |
| 5 | 99766.44 | 35 | 99822.25 | 5 | 99870.45 | 35 | 99911.06 |
| 6 | 99768.42 | 36 | 99823.98 | 6 | 99871.93 | 36 | 99912.28 |
| 7 | 99770.39 | 37 | 99825.70 | 7 | 99873.40 | 37 | 99913.49 |
| 8 | 99772.36 | 38 | 99827.41 | 8 | 99874.86 | 38 | 99914.70 |
| 9 | 99774.32 | 39 | 99829.11 | 9 | 99876.31 | 39 | 99915.90 |
| 10 | 99776.27 | 40 | 99830.81 | 10 | 99877.75 | 40 | 99917.09 |
| 11 | 99778.21 | 41 | 99832.50 | 11 | 99879.18 | 41 | 99918.27 |
| 12 | 99780.14 | 42 | 99834.18 | 12 | 99880.61 | 42 | 99919.44 |
| 13 | 99782.06 | 43 | 99835.85 | 13 | 99882.03 | 43 | 99920.60 |
| 14 | 99783.98 | 44 | 99837.51 | 14 | 99883.44 | 44 | 99921.75 |
| 15 | 99785.89 | 45 | 99839.16 | 15 | 99884.84 | 45 | 99922.90 |
| 16 | 99787.79 | 46 | 99840.81 | 16 | 99886.23 | 46 | 99924.04 |
| 17 | 99789.68 | 47 | 99842.45 | 17 | 99887.61 | 47 | 99925.17 |
| 18 | 99791.56 | 48 | 99844.08 | 18 | 99888.98 | 48 | 99926.29 |
| 19 | 99793.43 | 49 | 99845.70 | 19 | 99890.35 | 49 | 99927.40 |
| 20 | 99795.29 | 50 | 99847.31 | 20 | 99891.71 | 50 | 99928.51 |
| 21 | 99797.15 | 51 | 99848.91 | 21 | 99893.06 | 51 | 99929.60 |
| 22 | 99799.00 | 52 | 99850.50 | 22 | 99894.40 | 52 | 99930.69 |
| 23 | 99800.84 | 53 | 99852.09 | 23 | 99895.73 | 53 | 99931.77 |
| 24 | 99802.67 | 54 | 99853.67 | 24 | 99897.05 | 54 | 99932.84 |
| 25 | 99804.49 | 55 | 99855.24 | 25 | 99898.37 | 55 | 99933.90 |
| 26 | 99806.30 | 56 | 99856.80 | 26 | 99899.68 | 56 | 99934.95 |
| 27 | 99808.11 | 57 | 99858.35 | 27 | 99900.98 | 57 | 99935.99 |
| 28 | 99809.91 | 58 | 99859.89 | 28 | 99902.27 | 58 | 99937.03 |
| 29 | 99811.70 | 59 | 99861.42 | 29 | 99903.55 | 59 | 99938.06 |
| 30 | 99813.48 | 60 | 99862.95 | 30 | 99904.82 | 60 | 99939.08 |

| TANGENTES des Angles au-dessous d'un Degré. | | | | SECANTES des Angles au-dessous d'un Degré. | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *M* | *Tangen.* | *M* | *Tangen.* | *M* | *Sécantes.* | *M* | *Sécantes.* |
| 0 | 0 | 30 | 872.69 | 0 | 100000.00 | 30 | 100003.80 |
| 1 | 29.09 | 31 | 901.78 | 1 | 100000.00 | 31 | 100004.06 |
| 2 | 58.18 | 32 | 930.87 | 2 | 100000.02 | 32 | 100004.33 |
| 3 | 87.27 | 33 | 959.96 | 3 | 100000.04 | 33 | 100004.61 |
| 4 | 116.36 | 34 | 989.05 | 4 | 100000.07 | 34 | 100004.89 |
| 5 | 145.44 | 35 | 1018.14 | 5 | 100000.11 | 35 | 100005.18 |
| 6 | 174.53 | 36 | 1047.24 | 6 | 100000.16 | 36 | 100005.48 |
| 7 | 203.62 | 37 | 1076.33 | 7 | 100000.21 | 37 | 100005.79 |
| 8 | 232.71 | 38 | 1105.42 | 8 | 100000.27 | 38 | 100006.11 |
| 9 | 261.80 | 39 | 1134.51 | 9 | 100000.34 | 39 | 100006.44 |
| 10 | 290.89 | 40 | 1163.61 | 10 | 100000.42 | 40 | 100006.77 |
| 11 | 319.98 | 41 | 1192.70 | 11 | 100000.51 | 41 | 100007.11 |
| 12 | 349.06 | 42 | 1221.79 | 12 | 100000.61 | 42 | 100007.46 |
| 13 | 378.16 | 43 | 1250.88 | 13 | 100000.72 | 43 | 100007.81 |
| 14 | 407.25 | 44 | 1279.98 | 14 | 100000.83 | 44 | 100008.19 |
| 15 | 436.33 | 45 | 1309.07 | 15 | 100000.95 | 45 | 100008.57 |
| 16 | 465.42 | 46 | 1338.17 | 16 | 100001.08 | 46 | 100008.96 |
| 17 | 494.51 | 47 | 1367.26 | 17 | 100001.22 | 47 | 100009.35 |
| 18 | 523.60 | 48 | 1396.35 | 18 | 100001.37 | 48 | 100009.75 |
| 19 | 552.69 | 49 | 1425.45 | 19 | 100001.53 | 49 | 100010.16 |
| 20 | 581.78 | 50 | 1454.54 | 20 | 100001.70 | 50 | 100010.58 |
| 21 | 610.87 | 51 | 1483.64 | 21 | 100001.87 | 51 | 100011.01 |
| 22 | 639.96 | 52 | 1512.73 | 22 | 100002.05 | 52 | 100011.45 |
| 23 | 669.05 | 53 | 1541.83 | 23 | 100002.24 | 53 | 100011.89 |
| 24 | 698.14 | 54 | 1570.93 | 24 | 100002.44 | 54 | 100012.34 |
| 25 | 727.23 | 55 | 1600.02 | 25 | 100002.65 | 55 | 100012.80 |
| 26 | 756.32 | 56 | 1629.12 | 26 | 100002.86 | 56 | 100013.27 |
| 27 | 785.41 | 57 | 1658.21 | 27 | 100003.08 | 57 | 100013.75 |
| 28 | 814.50 | 58 | 1687.31 | 28 | 100003.31 | 58 | 100014.24 |
| 29 | 843.60 | 59 | 1716.41 | 29 | 100003.55 | 59 | 100014.73 |
| 30 | 872.69 | 60 | 1745.51 | 30 | 100003.80 | 60 | 100015.23 |

## REMARQUE.

L'Approbation & le Privilege de cet Ouvrage, se trouvent dans la *Théorie des Etres sensibles*, dont ce Volume renferme la partie Mathématique.

| PAGES. | LIGNES. | FAUTES A CORRIGER. | |
|---|---|---|---|
| | | *FAUTES.* | *LISEZ.* |
| XV. | 31 | trois à quatre ans | trois ou quatre ans |
| XXI. | 4 | III°. On sera peut-être | On sera peut-être |
| | 21 | IV°. Le Cours de Physique, | Le Cours de Physique, |
| 41 | 1 | des quadrillons, | des quatrillons, |
| | | Ou bien (*fig.* 89), | Ou bien (*fig.* 117), |
| 470 | 21 | trouver par | trouver à peu près par |
| 506 | 29 | *Pieds de toise cubes.* | *Pieds de toise cube.* |
| 626. | 32 | jusqu'à 30 minutes | jusqu'à 60 minutes |

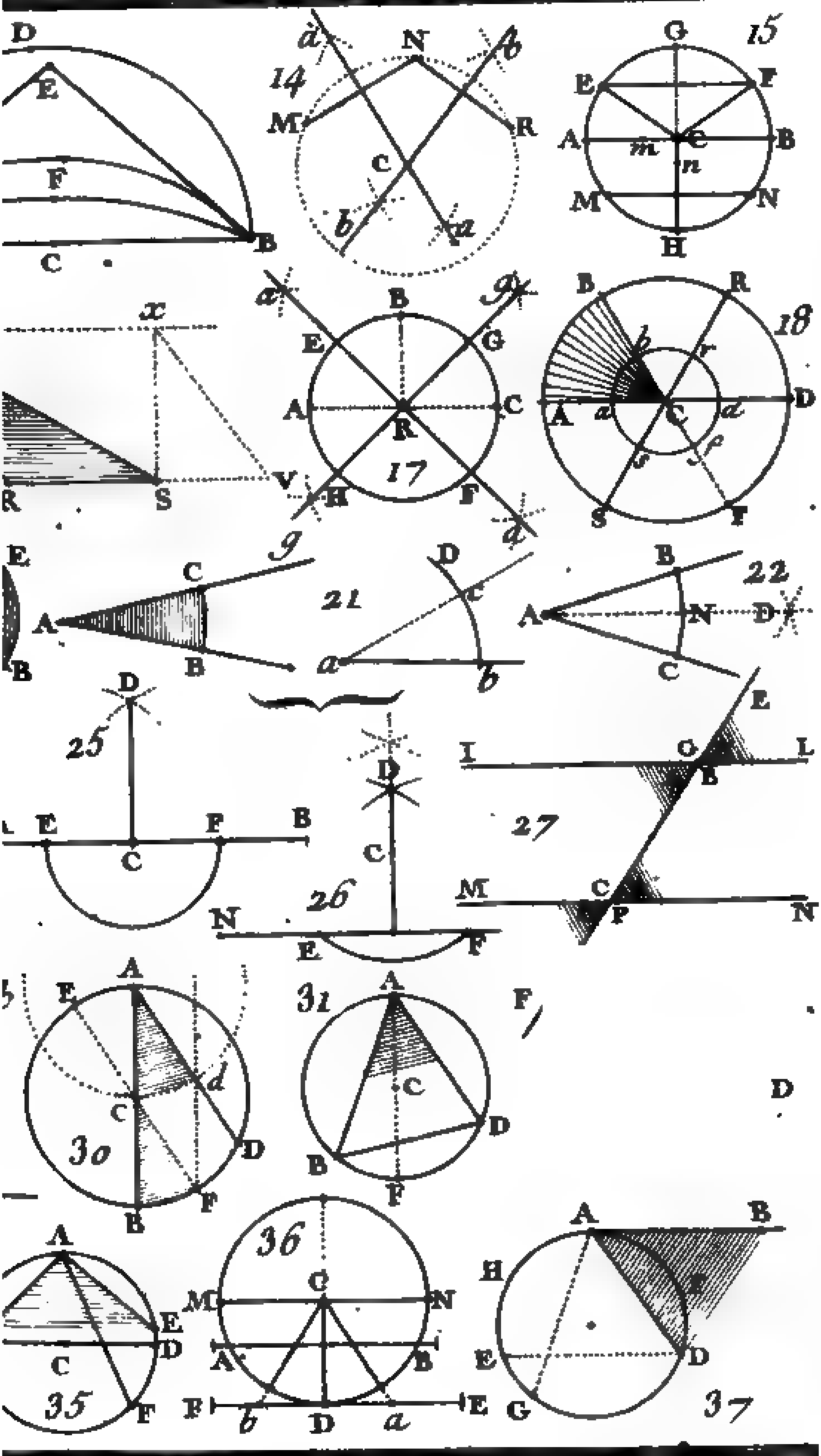
PAGE 152. *Il y a une omission dans cete page ; omission qui fait la suite de cette derniere ligne du problême :* supplément à l'angle donné A & à l'angle trouvé C. (386.)

Mais il faut faire attention ici que l'angle que l'on cherche, peut être ou aigu ou obtus; & qu'en cherchant la valeur de cet angle inconnu, aigu ou obtus, on trouve toujours un nombre qui répond dans les tables des sinus, à un angle aigu : parce que les nombres marqués dans les tables sont indifféremment ou le sinus d'un angle aigu, ou le sinus d'un angle obtus supplément à cet angle aigu (636). Par exemple (*fig.* 16) :

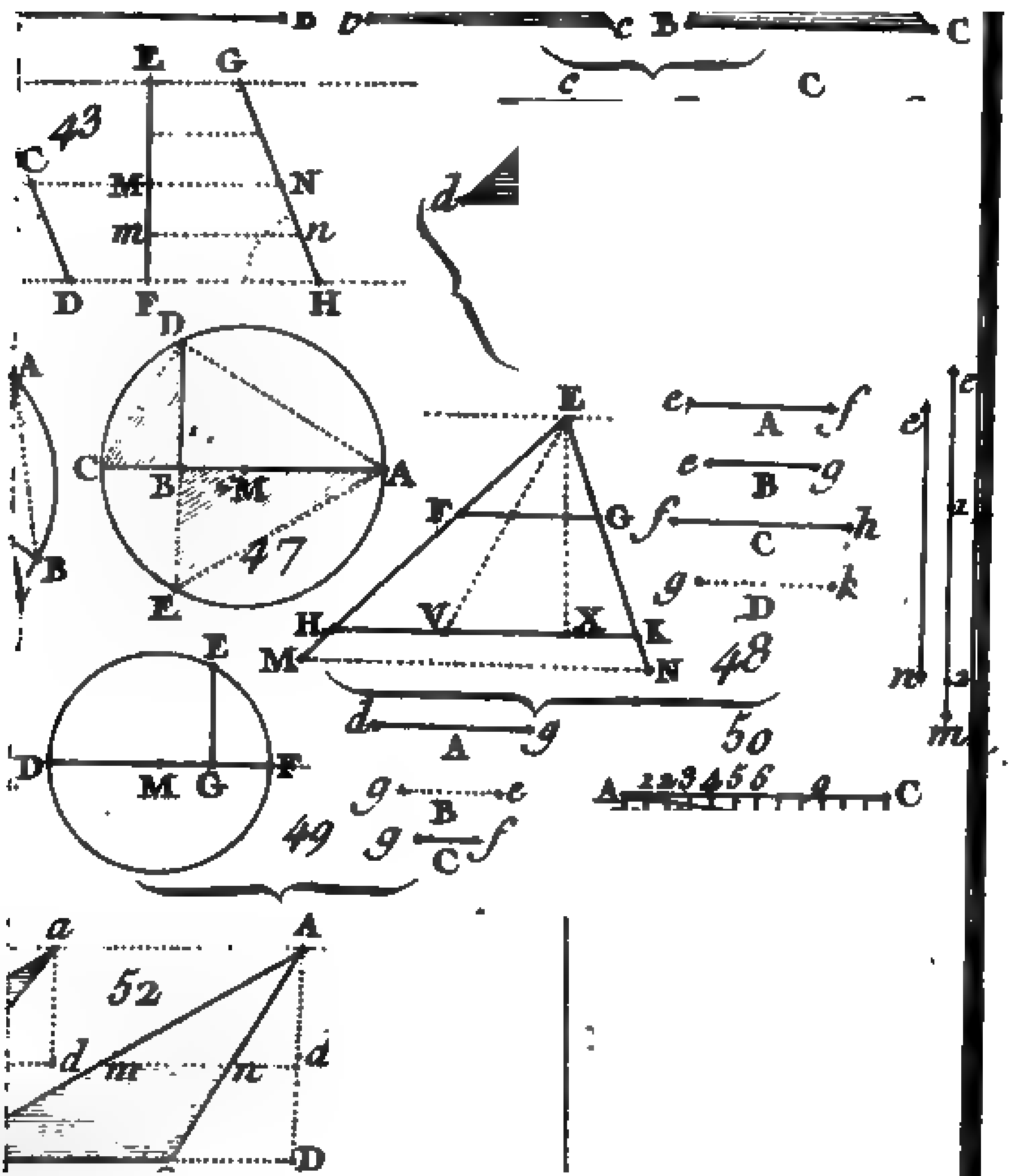
Soit le triangle DAC, dans lequel on connoisse l'angle aigu D & les deux côtés CD & CA. Avec un

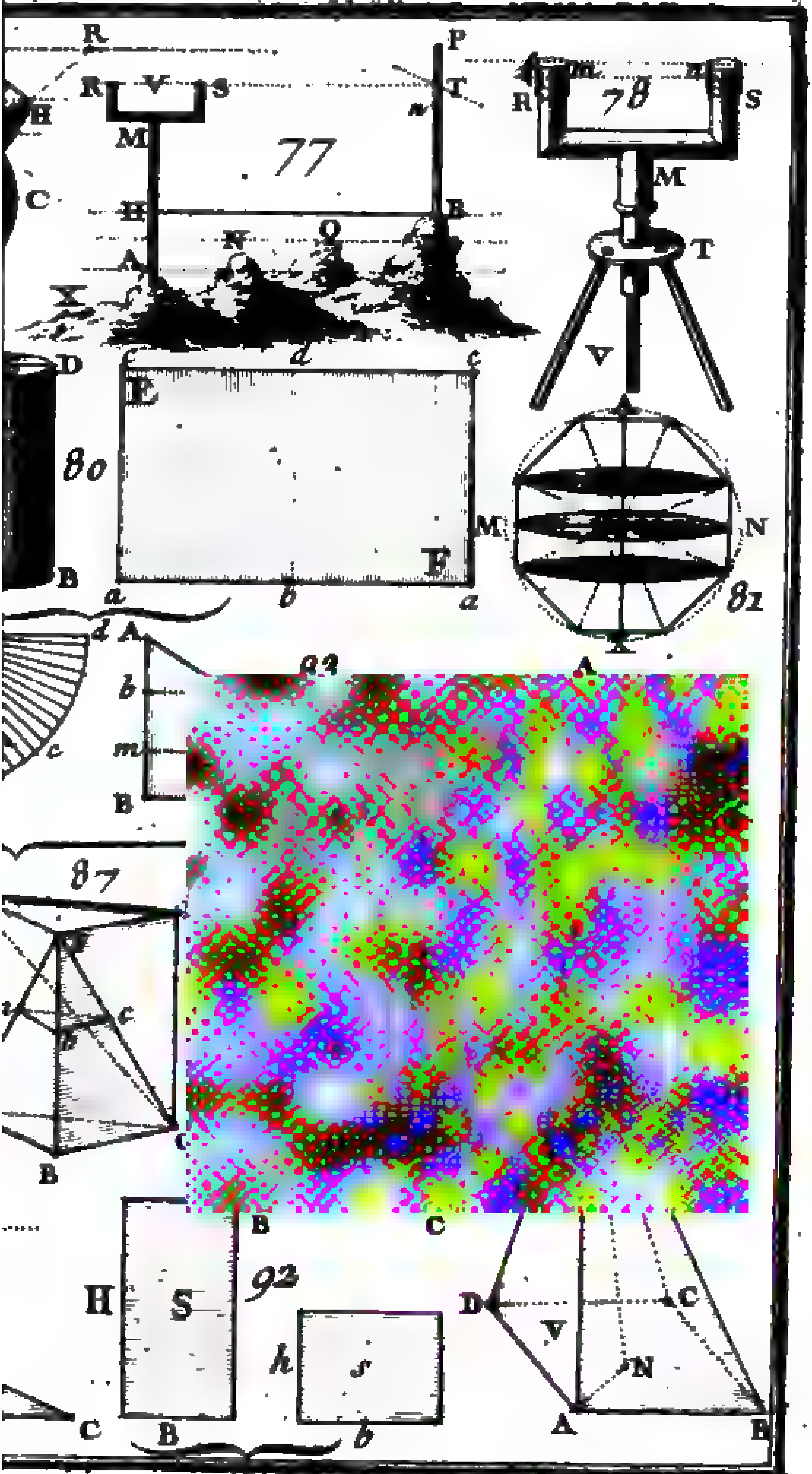
rayon CA décrivez un arc AB : vous aurez un autre triangle DBC, dans lequel le côté CB sera égal au côté CA, mais dans lequel l'angle aigu CBD sera différent de l'angle obtus CAD. Par la méthode de ce problême, vous trouverez indifféremment ou un angle obtus CAD, ou un angle aigu CBD. C'est pour quoi pour trouver ici l'angle inconnu, il faut préalablement savoir *si cet angle est aigu ou obtus*. Si l'angle est aigu, le nombre trouvé répond dans les tables à l'angle lui-même. Si l'angle est obtus, le nombre trouvé répond au supplément de cet angle. Par exemple, soit le côté CD de 10 toises; le côté CA ou CB, de *six* toises; l'angle D, commun aux deux triangles, de 20 degrés : on aura cette analogie : le sinus connu de l'angle D, est au côté opposé & connu *CA ou CB* $= 6$; comme le sinus inconnu de l'angle *CAD* ou CBD, est au côté opposé & connu CD $= 10$; ou en chiffres, en négligeant ceux qui suivent le point intercalaire dans les tables, $34202 . 6 :: x . 10$ : ce qui donne $x = 57003$, qui répond indifféremment ou à l'angle aigu CBD de 34 degrés 46 minutes, ou à l'angle obtus CAD de 145 degrés 14 minutes.

*LOGARITHMES.* &c.

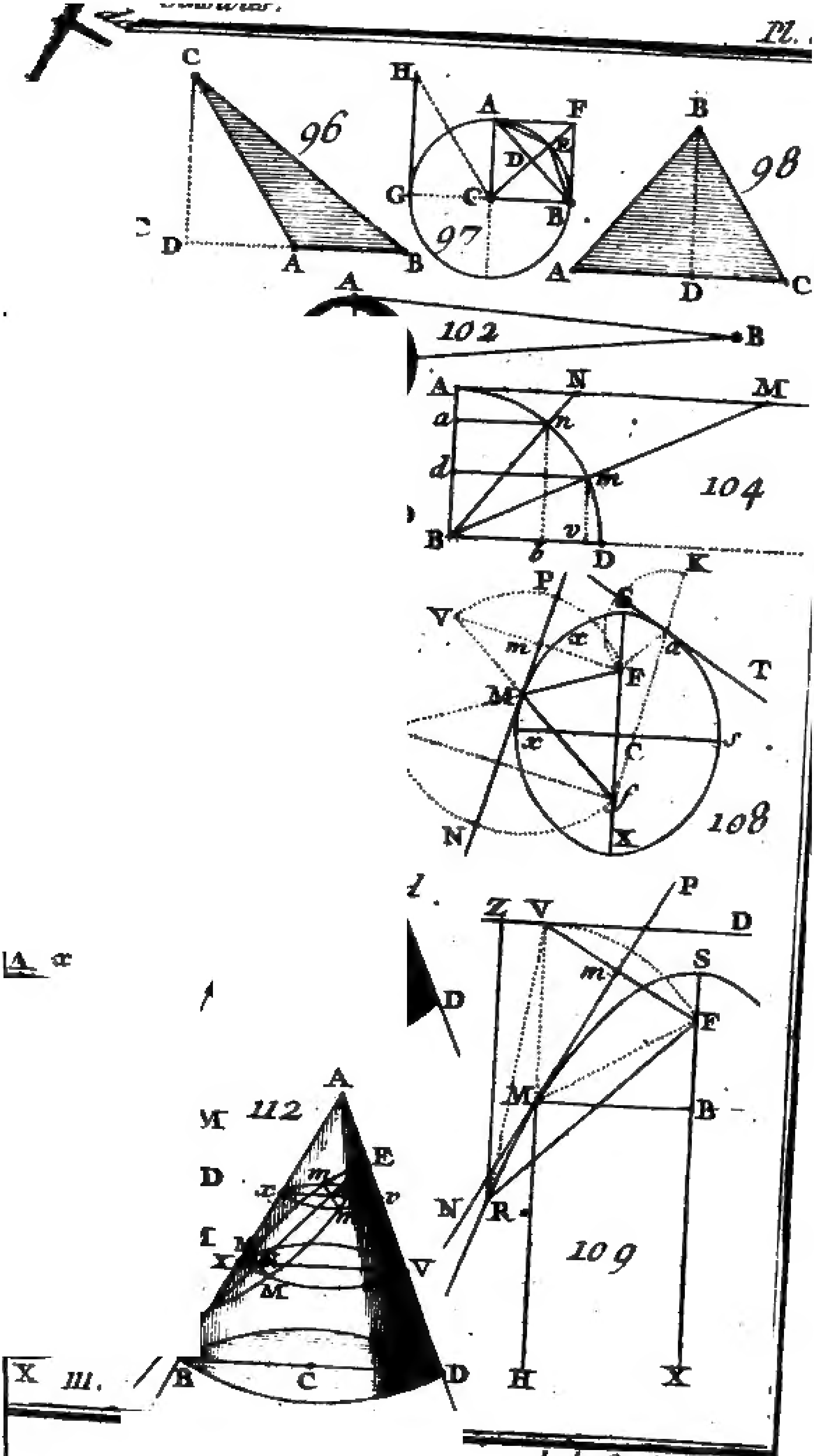



de la Gardette Sculp

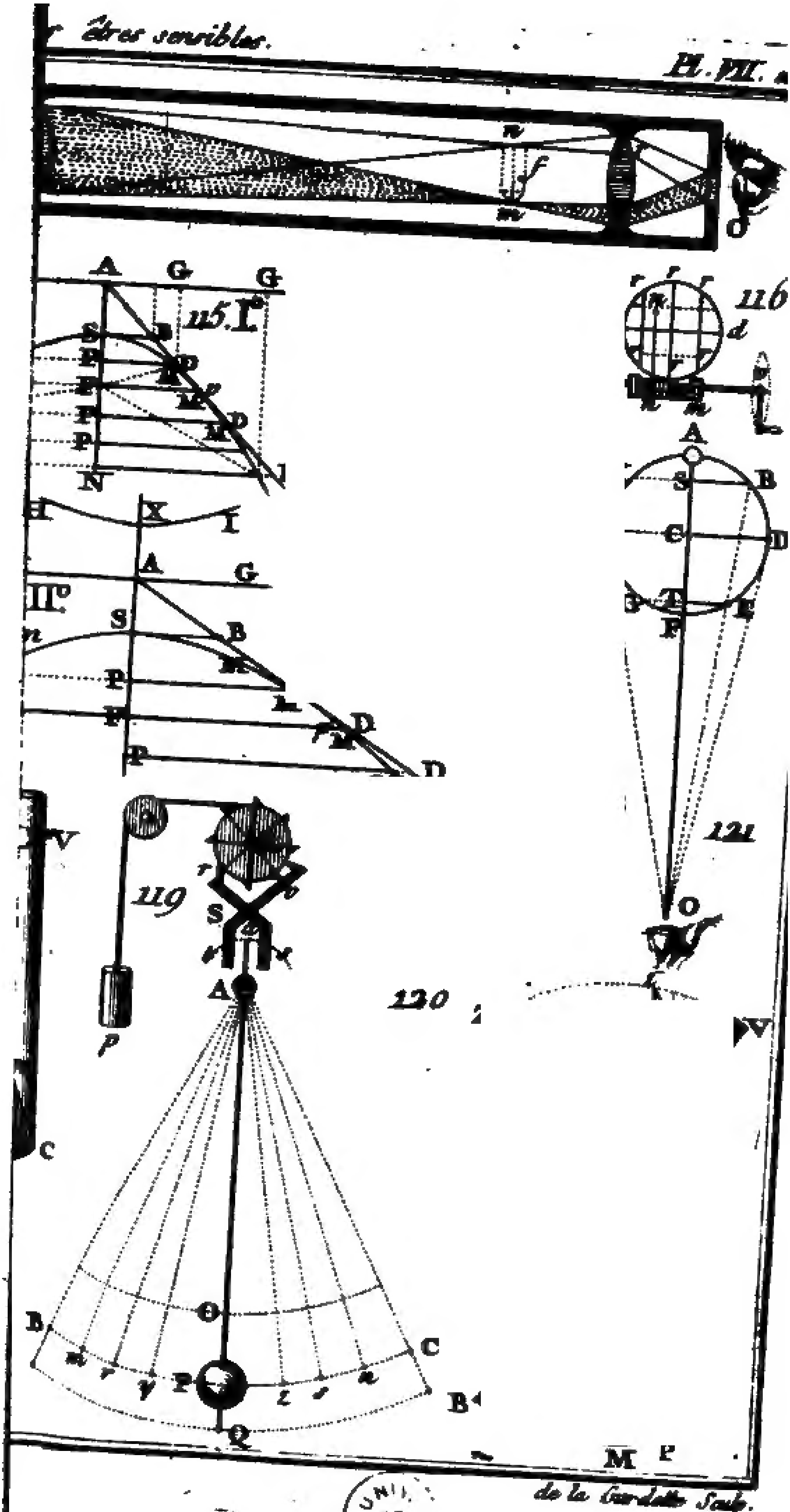

43
47
48
49
50
52




de la Gardette Sculp. 5.




de la Gardette Sculp.


êtres sensibles.
Pl. VII.
115. I°
116
II°
119
120
121
de la Gardette Sculp.